Virgil Drăghici

LOGICĂ

tradițională / clasică / modală

$$\vdash_{Q^{X}K4} \forall x\,\alpha(x) \supset \alpha(x/t)$$

$$\vdash_{Q^{X}K4} \Diamond\neg\alpha$$

?

EF
ES

Editura Fundației Studiilor Europene
Cluj-Napoca, 2007

LOGICĂ

tradiţională / clasică / modală

EDITURA FUNDAȚIEI
PENTRU STUDII EUROPENE
Str. Emm. De Martonne 1
Cluj-Napoca, România

Director: Ion Cuceu

ISBN - 978 - 973 - 7677 - 63 - 1

Autorul mulţumeşte domnişoarei dr. Mihaela GLIGOR pentru tehnoredactarea computerizată a acestui volum.

Copyright: Virgil DRĂGHICI

Prefață

Lucrarea de față reprezintă, în bună parte, tematica dezvoltată de autor în cadrul cursurilor de *Logică simbolică*, *Logică modală* și *Istoria logicii* la Facultatea de Istorie și Filosofie (Departamentul de Filosofie) din cadrul Universității „Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca. Materialul este structurat pe trei secțiuni: logica tradițională (Cap. 1), logica clasică (Cap. 2 și Cap. 3) și logica modală (Cap. 4 și Cap. 5). Fiecare capitol poate fi lecturat relativ independent de celelalte, motiv pentru care demonstrațiile unor teoreme au fost reluate în diferite variante. Capitolele sunt însoțite, prin paragrafele aferente, de exerciții rezolvate și exerciții propuse spre rezolvare. Pentru logica modală soluțiile exercițiilor sunt menționate la sfârșitul volumului.

Elaborarea tematicii acestui volum s-a bazat pe opera logico-filosofică a unor importanți autori contemporani, înainte de toate Hilbert, Ackermann, Gödel, Gentzen, Kleene, Quine, Smullyan, Boolos, Hughes și Cresswell, Fitting, Kripke, Benthem.

Lista bibliografică, aferentă volumului de față, conține atât lucrările care acoperă integral tematica dezvoltată cât și alte titluri, situate în proximitatea temelor tratate, dar de un nivel superior de complexitate și care fac obiectul unui alt volum (e.g. teoria recursivității, teoria calculabilității, diagonalizarea, logica demonstrabilității).

Lucrarea se adresează înainte de toate studenților de la filosofie și masteranzilor cu specializarea *Logica și Filosofia Științei*. Întrucât are caracterul unui manual, ea poate fi consultată cu folos de toți cei interesați de logică.

V.D.

Cuprins

Capitolul 1. Logica tradițională
Preliminar 1
1.1. *Teoria termenilor logici* 3
1.1.1. Structura termenilor logici 4
1.1.2. Raporturile dintre termenii logici 4
1.2. *Teoria propozițiilor categorice*
1.2.1. Propoziții categorice 5
1.2.2. Clasificarea propozițiilor categorice 5
1.2.3. Raporturile logice dintre propozițiile categorice 6
1.3. *Teoria inferenței* 9
1.3.1. Inferențe imediate 10
1.3.2. Inferențe mediate (silogismul) 14
1.3.2.1. Figuri și moduri silogistice 14
1.3.2.2. Metode de testare a validității silogismelor 15
Exerciții 25
1.3.2.3. Moduri silogistice indirecte 26
1.3.2.4. Silogistica cu termeni negativi 27
1.3.2.5. Silogistică modernă (Modelul predicativ Brentano) 32
1.3.2.5.1. Interpretarea Brentano a propozițiilor categorice 32
1.3.2.5.2. Procedeul formelor normale în logica predicatelor monadice 34
1.3.2.5.3. Modelul Brentano și tema validității 38
1.3.2.5.4. Completitudinea deductivă a modelului Brentano 39

Capitolul 2. Logica clasică a propozițiilor ($\mathcal{L}_p$)
2.1. *Teoria funcțiilor de adevăr*
2.1.1. Sintaxa $\mathcal{L}_p$ 47
2.1.2. Semantica $\mathcal{L}_p$ 48
2.1.2.1. Funcții de adevăr 48
2.1.2.2. Dualitatea 50
2.1.2.3. Procedeul matriceal de decizie în $\mathcal{L}_p$ 51
2.1.2.4. Relația de consecință semantică 54
2.1.2.5. Scheme deductive cu operatori ai $\mathcal{L}_p$ 55
Exerciții 56
2.1.3. Transformări echiveridice în $\mathcal{L}_p$
2.1.3.1. Conceptul echiveridicității 56

2.1.3.2. Operatori fundamentali, operatori derivați 58
2.1.3.3. Completitudine funcțională 59
2.1.3.4. Demonstrații de completitudine funcțională 61
Exerciții 64
2.1.4. Procedee de decizie în $\mathcal{L}_p$
2.1.4.1. Procedeul matriceal 65
2.1.4.2. Reductio test 66
2.1.4.3. Procedeu Quine 66
2.1.4.4. Formele normale în $\mathcal{L}_p$ 68
Exerciții 72
2.1.5. Teoreme fundamentale ale $\mathcal{L}_p$ 72
Exerciții 76
2.2. *Tablourile analitice în* $\mathcal{L}_p$
2.2.1. Metoda tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$ 77
2.2.1.1. Concepte 77
2.2.1.2. Formule ale $\mathcal{L}_p$ 77
2.2.1.3. Evaluări booleene. Interpretare. Mulțime saturată 78
2.2.1.4. Metoda tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$ 79
2.2.1.5. Tablourile analitice și forma normală disjunctivă 84
2.2.1.6. Tablouri analitice pentru mulțimi finite de formule 85
2.2.2. Corectitudinea și completitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$
2.2.2.1. Corectitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$ 87
2.2.2.2. Completitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$ 88
2.2.3. Compacitatea în $\mathcal{L}_p$ 90
2.3. *Axiomatica* $\mathcal{L}_p$
2.3.1. Preliminar 91
2.3.2. Sistemul axiomatic *S* 94
2.3.3. Corectitudinea și completitudinea sistemului axiomatic *S* 103
Exerciții 107
2.4. *Deducția naturală în* $\mathcal{L}_p$
2.4.1. Sistemul deducției naturale 109
2.4.2. Corectitudinea și completitudinea sistemului deducției naturale 120
2.5. *Calculul secvenților în* $\mathcal{L}_p$
2.5.1. Preliminar 123
2.5.2. Sistemul *G* 123
2.5.3. Concepte 124
2.5.4. Leme și teoreme 125
2.5.5. Tablourile analitice și calculul secvențial 128
2.5.6. Lema interpolării (Craig) 130
2.5.7. Compacitate, satisfiabilitate, consistență 131
2.5.8. Arborii deductivi și formele normale 133
2.5.9. Arborii deductivi și mulțimile Hintikka 134
2.5.10. Sistemul LK* 136
Exerciții 140

2.6. *Rezoluția în* $\mathcal{L}_p$
2.6.1. Ce este o rezoluție? 142
2.6.2. R-demonstrația și demonstrația Gentzen 145
2.6.2.1. Sistemul Gentzen G^* 146
2.6.2.2. Conversia demonstrațiilor 150
2.6.3. Corectitudinea și completitudinea metodei rezoluției 158

Capitolul 3. Logica clasică a predicatelor ($\mathcal{L}_P$)
3.1. *Sintaxa și semantica* $\mathcal{L}_P$
3.1.1. Sintaxa $\mathcal{L}_P$ 160
3.1.2. Semantica $\mathcal{L}_P$ 163
Exerciții 169
3.2. *Tablourile analitice în* $\mathcal{L}_P$ 170
Exerciții 173
3.3. $\mathcal{L}_P$ *axiomatizată*
3.3.1. Sistemul Q 174
3.3.2. Sistemul Hilbert-Ackermann 194
Exerciții 203
3.4. *Rezoluția în* $\mathcal{L}_P$
3.4.1. Teorema lui Herbrand 204
3.4.2. Rezoluția în $\mathcal{L}_P$ 212
Exerciții 218
3.5. *Interpolare și definibilitate în* $\mathcal{L}_P$ 219

Capitolul 4. Logica modală propozițională ($\mathcal{L}_p{}^\square$)
4.1. *Sintaxa* $\mathcal{L}_p{}^\square$
4.1.1. Limbajul logicii modale propoziționale 228
4.1.2. Sisteme de logică modală propozițională 228
Exerciții 242
4.2. *Semantica* $\mathcal{L}_p{}^\square$
4.2.1. *S*-validitatea formulelor $\mathcal{L}_p{}^\square$ 243
4.2.2. Verificarea validității formulelor în sistemul modal *S5* 250
4.2.3. Cadrele sistemelor modale 255
Exerciții 258
4.3. *Modele canonice*
4.3.1. Mulțimi maximal consistente de formule 259
4.3.2. Modele canonice 261
4.3.3. Completitudinea sistemelor modale 263
Exerciții 269
4.4. *Modele finite* 269

Capitolul 5. Logica modală a predicatelor ($\mathcal{L}_P{}^{\Box}$)
5.1. *Preliminar* 282
5.2. *Sintaxa* $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$
5.2.1. Limbajul $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$ 286
5.2.2. Sisteme de logică modală a predicatelor 286
5.3. *Semantica* $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$ 287
5.4. *Corectitudinea sistemelor modale* Q^x*S Bar* 287
5.5. *Completitudinea şi incompletitudinea în* $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$
5.5.1. Completitudinea sistemelor modale Q^x*S Bar* 293
5.5.2. Incompletitudinea sistemului modal Q^x*S4 MBar* 299
5.5.3. Completitudinea sistemelor modale Q^x*S* 301
5.5.4. Incompletitudinea sistemelor Q^x*S4.4* şi Q^x*S4.9* 303
Exerciţii 306

Soluţiile exerciţiilor ($\mathcal{L}_p{}^{\Box}$, $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$) 308
Bibliografie 318
Index 333

Capitolul 1

Logica tradițională

Preliminar

Considerată în sensul cel mai general, logica tradițională este teoria inferenței. Începuturile ei notabile trebuie căutate în opera gânditorului grec Aristotel [1]. O dată cu *Organon*-ul său se pun bazele a ceea ce astăzi numim „silogistică clasică" (asertorică și modală). Această lucrare aristotelică a exercitat o considerabilă influență asupra generațiilor următoare, până în epoca modernă. O dată cu rafinarea conceptualizării, determinată de crearea logicii simbolice, în secolul al XIX-lea, s-a deschis posibilitatea re-lecturii silogisticii clasice care, în noua ipostază, favorizată de formalizare și axiomatizare, devine silogistică modernă [2].

Capitolul de față nu are în vedere o analiză istorică a silogisticii[3], ci o elaborare sistematică a logicii tradiționale, înglobând astfel perfecționările instrumentarului logicii, păstrându-i însă determinațiile care o fac să rămână o logică *tradițională*.

Întrucât teoria inferenței presupune teoria propoziției, iar teoria propoziției presupune teoria termenilor logici, vom trata succesiv, în ordinea complexității lor, aceste forme logice[4].

Însă logica nu este interesată de orice fel de inferențe, ci doar de inferențele *valide*, adică de acele inferențe care conservă în concluzia lor adevărul premiselor. Iar ca o inferență să fie validă, ea trebuie să respecte anumite exigențe, între care există anumite raporturi de dependență (derivare). Căutând să explicităm exigențele fundamentale, cele care le întemeiază pe toate celelalte, ajungem la ceea ce logica numește *principii logice*. Să ne oprim mai întâi la o analiză succintă a acestor principii.

Principiile logice

Investigarea *statutului* principiilor logice este una foarte complexă. Chiar dacă formularea lor este veche (Aristotel, Leibniz), disputele pe această temă continuă și în zilele noastre. Ca principii logice ele nu pot, firește, să fie întemeiate în logică, pentru că în acest caz ar avea un caracter derivat, fiind deduse din alte principii mai generale. Putem, atunci, conchide că sunt construcții arbitrare, convenții lingvistice? Modul în care ele funcționează ca principii ne arată mai curând contrariul. Iar dacă au un temei, care este acesta?[5] Ne limităm, în considerațiile de față, la a menționa că principiile logice pot fi formulate atât *ontologic* (cu referire la obiecte și proprietățile lor), cât și *epistemologic* (cu referire la propoziții și valorile lor de adevăr), fără a le reduce, ca principii *logice*, la aceste formulări.

---

[1] Aristotel, *Organon I* (*Analitica primă*).

[2] Comp. J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, 1951.

[3] Pentru o prezentare istorică a temei, comp. *Bibliografie*.

[4] Prin forme logice vom înțelege: termenii logici, propozițiile logice și inferențele.

[5] Răspunsurile la această întrebare sunt foarte diferite: comp. B. Russell, *Probleme der Philosophie*, F.a.M. , 1969, 78-79; M. Heidegger, *Der Satz vom Grund*, Pfullingen 1957.

a) ***Principiul identității***

Principiul identității a fost formulat mai întâi de Leibniz, astfel: „Fiecare lucru este ceea ce este. Şi în atâtea exemple câte vreți, *A* este *A*, *B* este *B*"[6]. „*A* este *A*" este formularea ontologică a ideii de identitate: prin proprietățile sale constante, un lucru este el însuşi şi nu altul. Desigur, chiar dacă realitatea este într-o continuă transformare, ea nu poate fi gândită decât prin ceea ce conferă individualitate (şi deci constanță) entităților ei. Ca principiu al *identității*, acesta rămâne un principiu *logic*, nu ontologic. Iar ca principiu logic, el pretinde, oricărui demers rațional, precizie. Altfel spus, în orice raționalizare pe care o efectuăm termenii logici trebuie să-şi conserve înțelesul. În caz contrar, din premise adevărate putem obține concluzii false sau absurde. De exemplu, din propozițiile „Creionul este verde" şi „"Verde" are cinci litere" derivăm, în mod eronat, „Creionul are cinci litere". Nevaliditatea acestei inferențe rezidă în faptul că termenul mediu (i.e. „verde") nu şi-a păstrat înțelesul: în prima propoziție el se referă la o proprietate a unui obiect iar în cea de-a doua la o entitate lingvistică. Aşadar, a fost nesocotit principiul identității.

b) ***Principiul noncontradicției***

Acest principiu a fost formulat pentru prima dată de Aristotel: „este peste putință ca unuia şi aceluiaşi subiect să i se potrivească şi totodată să nu i se potrivească sub acelaşi raport unul şi acelaşi predicat" [7].

Ca principiu logic, acesta reclamă exigența *consistenței: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport o propoziție nu poate fi adevărată împreună cu contradicția ei* [8]. În orice demers pe care-l întreprindem, nu putem include „în acelaşi timp şi sub acelaşi raport", atât propoziția „$2+2=4$" cât şi propoziția „$2+2\neq4$".

c) ***Principiul terțului exclus*** (*tertium non datur*)

Tot lui Aristotel îi revine meritul de a fi formulat pentru prima dată principiul logic al terțului exclus: „Dar nu e cu putință nici ca să existe un termen mijlociu între cele două membre extreme ale unei contradicții, ci despre un obiect trebuie neaparat sau să fie afirmat sau negat fiecare predicat" [9].

Dacă principiul noncontradicției respinge posibilitatea ca o propoziție şi contradictoria ei să fie simultan adevărate, principiul terțului exclus respinge posibilitatea ca o propoziție şi contradictoria ei să fie simultan false. Iată un fragment din Leibniz care lămureşte relația dintre aceste două principii, în forma relației dintre următoarele două formulări: „una, că *adevărul şi falsul nu sunt compatibile în aceeaşi propoziție* sau că o propoziție nu ar putea să fie adevărată şi falsă în acelaşi timp; cealaltă, că *opusul sau negația adevărului şi falsului nu sunt compatibile,* sau că nu există mijlociu între adevărat şi fals, sau că *nu se poate ca o propoziție să nu fie nici adevărată nici falsă*" [10].

Exemple intuitive, elementare, ne arată totuşi că acest principiu nu are extensiunea primelor două, deoarece există situații în care între cele două valori de adevăr ale propozițiilor (adevărat şi fals) trebuie admisă o a treia (nedeterminatul). Chiar Aristotel dă un exemplu de acest gen. De ori câte ori ne referim la evenimente viitor-contingente, cea de-a treia valoare

[6] G. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1708), Flammarion, Paris 1935, IV, II, 1.

[7] Aristotel, *Metafizica*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1965, IV, 3, 1005 b, 19.

[8] Pentru o analiză a diferitelor expresii ale principiilor logice, comp. N. Rescher, *Many-valued logics*, McGraw Hill, 1969.

[9] Aristotel, *Metafizica*, IV, 7, 1011b.

[10] Leibniz, *Nouveaux*..., IV, II, 1.

trebuie admisă [11]. Pentru propoziţii de genul „Mâine va avea loc o bătălie navală” şi „Mâine nu va avea loc o bătălie navală”, cea de-a treia posibilitate este admisă: indecizia [12].

Este uşor de constatat că valabilitatea principiului terţului exclus este sincronă acceptării ideii semantice a *bivalenţei*: orice propoziţie admite strict una din cele două valori de adevăr: adevărat sau fals.

Exigenţa reclamată de principiul terţului exclus este *coerenţa: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport o propoziţie logică este adevărată sau falsă, cea de-a treia posibilitate este exclusă.*

d) ***Principiul raţiunii suficiente***

Ca principiul logic, acesta ne cere *să nu acceptăm sau respingem vreo propoziţie fără a dispune de vreun temei suficient, în demersul pe care-l întreprindem*[13]. El exprimă o relaţie de condiţionare între propoziţii. Lingvistic, condiţionările pot fi redate astfel: „*dacă p, atunci q*” (condiţionarea suficientă), unde *p* şi *q* denotă propoziţii, „*dacă nu p, atunci nu q*” (condiţionarea necesară) sau „*p dacă şi numai dacă q*” (condiţionarea necesară şi suficientă). Teoriile ştiinţifice sunt interesate înainte de toate de *condiţiile suficiente* ale adevărului propoziţiilor lor şi, de aici, exigenţa conţinută în principiul raţiunii suficiente.

1.1. Teoria termenilor logici

Atunci când atribuim o valoare de adevăr unei propoziţii, în raţionările noastre curente, o facem ţinând seamă de modul în care părţile lor constitutive se îmbină. Propoziţia *Cerul este albastru*, de exemplu, este adevărată dacă „albastru” poate fi spus (i.e. predicat) despre „cer”. În caz contrar, propoziţia este falsă. Elementele constitutive ale propoziţiilor sunt *termenii*. Însă nu toţi termenii unui limbaj au acelaşi rol în limbajul respectiv. Unii au atât înţeles de sine stătător, desemnând clase de obiecte, cât şi înţeles contextual, fiind părţi ale propoziţiilor. Aceşti termeni se numesc *categorematici*. Alţii, în schimb, ajută la construcţia propoziţiilor, cuantificând, modalizând, conectând etc („unii”, „toţi”, „e posibil”, „e necesar”, „şi”, „fără”, „sau”, „este”, ş. a.). Aceşti termeni se numesc *sincategorematici*.

În continuare, în acest paragraf dedicat teoriei termenilor, vom avea în vedere strict *teoria termenilor categorematici*, adică teoria acelor termeni care pot deveni *subiect logic* şi *predicat logic* într-o propoziţie[14].

O remarcă trebuie să facem însă de-ndată. Termenii categorematici nu sunt întotdeauna expresii formate dintr-un singur cuvânt, ci şi construcţii mai complexe, uneori chiar fraze: „radiaţie remanentă”, „orchestră de cameră”, „număr prim între 6 şi 9”, compozitorul lucrării "Ruslan şi Ludmila"”, etc. În cele ce urmează ne interesează, fireşte, termenii categorematici ca *termeni logici*, ca o formă logică distinctă, cu o structură proprie ireductibilă la exprimarea ei lingvistică[15].

Definiţie. Termenul logic este forma logică elementară care denotă clase de obiecte, respectiv conotă proprietăţi ale lor.

---

[11] Cf. Aristotel, *Organon*.

[12] Respingerea validităţii terţului exclus va face carieră în logica intuiţionistă, pentru acele cazuri în care operăm cu mulţimi infinite. Comp. C. Calude, *Matematici constructive*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1995.

[13] Principiul raţiunii suficiente este mai curând un principiu metalogic: nu introduce vreo exigenţă fără de care gândirea nu s-ar putea manifesta, ci exprimă un principiu cuprinzător, valabil în orice demers cognitiv.

[14] În logica tradiţională această categorie de termeni constituie „noţiunile”.

[15] Unitatea dintre termenul logic şi unitatea lingvistică se numeşte *expresie*. Orice expresie, care poate fi subiectul sau predicatul unei propoziţii, are aşadar o dublă dimensiune, logică şi lingvistică.

1.1.1. Structura termenilor logici

În structura oricărui termen logic pot fi puse în evidență două componente: *extensiunea* şi *intensiunea*. Un exemplu simplu ne arată în ce constau ele. „Carte", de exemplu, este un termen logic a cărui *extensiune* (sferă) este totalitatea cărților existente. Totodată, „carte" înseamnă totalitatea *trăsăturilor* pe care le posedă orice obiect care poate fi numit carte. Aceste trăsături se constituie în ceea ce numim *intensiunea* (conținutul) termenului „carte".

Definiția 1. Extensiunea unui termen logic este componenta structurală care constă în totalitatea obiectelor ale căror proprietăți formează intensiunea termenului logic.

Definiția 2. Intensiunea unui termen logic este componenta structurală care constă în totalitatea proprietăților obiectelor care formează extensiunea termenului logic.

Corespondența structurală dintre cele două definiții (i.e. faptul să una se obține din cealaltă permutând termenii „extensiune", „obiect", „intensiune" cu „intensiune", „proprietate", „extensiune") se numeşte *dualitate.*

Între extensiunea şi intensiunea unui termen putem pune în evidență raportul variației inverse a extensiunii şi intensiunii (construiți un exemplu).

1.1.2. Raporturile dintre termenii logici

Distincția logică dintre extensiune şi intensiune fundamentează distincția dintre cele două tipuri de raporturi logice: extensionale şi intensionale.

Raporturile extensionale dintre doi termeni logici sunt raporturile dintre clasele la care se referă, raporturi formulate în termenii incluziune-excluziune. Aceste raporturi extensionale pot fi exhaustive sau neexhaustive, după cum raportul respectiv epuizează sau nu universul de discurs[16].

1. *Subordonare neexhaustivă.* În acest caz, extensiunea unui termen S este inclusă în extensiunea celuilalt (P), fără exhaustivarea universului de discurs (U). (Exemplu: S = aur, P = metal, U = element chimic).

2. *Supraordonare neexhaustivă* (Raportul convers lui 1).

3. *Intersecție neexhaustivă.* Extensiunile celor doi termeni au elemente comune, dar şi elemente diferite şi nu epuizează universul de discurs. (Exemplu: S = număr par, P = număr prim, U = număr natural).

4. *Identitate neexhaustivă.* Extensiunile celor doi termeni coincid, fără a epuiza universul de discurs (Exemplu: S = 2, P = număr par şi prim, U = număr natural).

5. *Intersecție exhaustivă.* Cele două extensiuni au elemente comune dar acoperă întreg universul de discurs: $S = Z^+ \cup \{0\}$, $P = Z^- \cup \{0\}$, $U = Z$.

6. *Excluziune neexhaustivă.* Cele două extensiuni nu au nici un element în comun şi nici nu exhaustivează universul de discurs (construiți un exemplu).

7. *Excluziune exhaustivă.* Nici în acest caz extensiunile nu au elemente comune, dar epuizează U (Exemplu: organic – neorganic, roşu – nonroşu, etc).

Raporturile intensionale sunt raporturile dintre termeni considerate din perspectiva însuşirilor, respectiv dacă termenii respectivi pot figura sau nu simultan ca însuşiri într-un alt termen. Dacă da, atunci raporturile care se stabilesc sunt de *concordanță*, în caz contrar sunt de *opoziție*. Deja specificarea făcută mai sus a raporturilor extensionale ne permite să deosebim cele două clase de raporturi intensionale (de concordanță: primele cinci, de opoziție: ultimele două).

---

[16] Universul de discurs pentru două clase S, P este clasa supraordonată (includentă) claselor în discuție. „Mamifer" şi „vertebrat" pot avea ca univers de discurs „animal" etc.

Remarcă 1. Cele două tipuri de raporturi de excluziune (exhaustivă, neexhaustivă) fundamentează două raporturi logice distincte dintre propozițiile logice: contradicție și contrarietate. De aceea raportul de excluziune exhaustivă dintre termenii logici se mai numește și *raport de contradicție*, iar cel de excluziune neexhaustivă se mai numește și *raport de contrarietate*. Să vedem mai îndeaproape în ce constă distincția.

Raportul de contrarietate se stabilește între extensiunile a doi termeni astfel încât clasele respective nu acoperă întreg universul de discurs. Așadar, universul de discurs conține cel puțin trei clase reciproc exclusive. „Roşu" și „galben" nu epuizează universul „culoare". Termenii contrari nu pot fi în același timp predicați despre același obiect (un obiect nu poate fi în același timp și roșu și galben), dar pot fi negați (din faptul că un obiect nu este roșu, nu rezultă că este galben, căci poate fi verde, albastru etc). Neputând fi asertați simultan despre același obiect, raportul dintre termenii contrari este fundamentat de principiul logic al noncontradicției.

Raportul de contradicție se stabilește între două extensiuni care exhaustivează universul de discurs: „roşu – nonroşu", „par – impar", „organic – anorganic" etc. În acest caz, fiecare termen este negația celuilalt. Întrucât divid universul de discurs strict în două clase, ei nu pot fi nici asertați simultan, nici negați simultan despre același obiect. Motiv pentru care acest raport dintre termenii logici este fundamentat simultan de principiul noncontradicției și de principiul terțului exclus.

Remarcă 2. Teoria termenilor logici include și tema clasificării termenilor logici, cea a diferitelor reprezentări diagramatice dintre ei sau tema operațiilor logice cu termeni (diviziune, clasificare, definire etc). Capitolul de față nu include și aceste abordări[17].

1.2. Teoria propozițiilor categorice

1.2.1. Propoziții categorice

Termenii logici pot figura, în multele lor posibilități de conectare, drept componente în structuri mai complexe, numite propoziții. În acest paragraf nu vom face un inventar al tuturor propozițiilor, ci vom selecta o clasă de astfel de propoziții și o explicităm în determinațiile ei esențiale. Clasa avută în vedere este cea a *propozițiilor categorice*.

Definiție. O propoziție categorică este o structură logico-lingvistică în care se enunță ceva despre elementele unei clase de obiecte.

Exemple de propoziții categorice: 1. *Toți studenții au obținut rezultate bune*. 2. *Nici un participant la manifestație n-a fost chestionat*. 3. *Unele cărți sunt interesante*. 4. *Unii concurenți n-au luat premiu*. 5. *Nigel Kennedy este cel mai strălucit interpret „Vivaldi"*. 6. *John Fogerty n-a cântat cu „Rolling Stones"*.

Structura propozițiilor categorice este simplă: doi termeni logici sunt corelați în așa fel încât ceva se spune despre ceva. Un termen logic este *subiectul logic* al propoziției, celălalt este *predicatul logic*. Legătura dintre ei se poate face în varii feluri: cu verbele *a fi*, *a avea*, cu alte verbe sau pur și simplu poate fi sublimată (în forma gramaticală a predicatului). Însă, dacă din punct de vedere gramatical în structura unei propoziții categorice pot intra și alte elemente (adjective, complemente, adverbe etc), sub aspect logic (singurul relevant aici!) o propoziție categorică conține strict două elemente: subiectul logic (*S*) și predicatul logic (*P*).

1.2.2. Clasificarea propozițiilor categorice

Fie și numai enumerarea de mai sus, putem constata unele deosebiri, logic relevante, între propozițiile categorice. Atât în propoziția 1 cât și în propoziția 2 subiectul logic a fost

[17] Pentru o tratare clară, sistematică a lor, comp. Marga, Stoianovici, Dima, *Logica generală*, pp. 81-123.

luat în considerare (chiar dacă în moduri diferite!) în totalitatea sa. Altfel spus, predicatul logic revine întregii clase denotate de subiect. În ambele cazuri vom vorbi despre propoziţii *universale*. În propoziţiile 3 şi 4, în schimb, predicatul se referă (revine) unei părţi a clasei denotate de subiectul logic , motiv pentru care aceste propoziţii se numesc *particulare*. În fine, în cazurile 5 şi 6 clasa denotată de subiectul logic are un singur element; aceste propoziţii se numesc *individuale*. Această clasificare s-a făcut după *criteriul cantităţii*, respectiv dacă predicatul revine sau nu întregii extensiuni a subiectului logic. Putem uşor constata că, aplicând acest criteriu, propoziţiile individuale au forma propoziţiilor universale şi deci, în cele ce urmează vor fi incluse în această clasă. După cantitate deosebim aşadar: propoziţii universale şi particulare.

Acum, dacă luăm propoziţiile 1, 3 şi 5, pe de-o parte, şi 2, 4 şi 6, pe de alta, vom observa că cele două clase de propoziţii se deosebesc prin următorul fapt: în prima clasă predicatul logic este *afirmat* despre subiect (i.e. nota respectivă aparţine subiectului logic, indiferent de extensiunea considerată), în cea de-a doua însă, predicatul logic este *negat* despre subiect. Aşadar, propoziţiile categorice pot fi clasificate şi după criteriul *calităţii*, în *afirmative* şi *negative*.

În cele ce urmează nu vom opera distinct cu cele două clasificări, ci cu una singură, făcută simultan după cele două criterii (cantitate şi calitate), astfel:

1. *SaP*: propoziţii universal afirmative
2. *SeP*: propoziţii universal negative
3. *SiP*: propoziţii particular afirmative
4. *SoP*: propoziţii particular negative

Notaţiile din frontul fiecărei clase au următoarea sursă: *S* şi *P* sunt elementele structurale ale oricărei propoziţii categorice. *a* şi *i*, puse între *S* şi *P* (în cazurile 1 şi 3) sunt primele vocale din cuvântul latin *affirmo* şi ne arată că în ambele cazuri avem propoziţii afirmative (prima universală, a doua particulară). Vocalele *e* şi *o* din *SeP* şi *SoP* sunt vocalele conţinute în *nego* şi ne indică faptul că propoziţiile respective sunt negative. Această abreviere notaţională are un avantaj operaţional în analiza raporturilor logice dintre propoziţiile respective [18].

Remarcă. Nu întotdeauna în limbajul natural cele patru tipuri de propoziţii categorice au forma de mai sus. *Unii S sunt P* (*SiP*) nu exclude, în clasificarea făcută, posibilitatea ca *Toţi S să fie P* (*SaP*). Însă, dacă o propoziţie particulară este formulată *Numai unii S sunt P*, atunci această posibilitate este exclusă. În primul caz avem o propoziţie particulară inclusivă, în cel de-al doilea exclusivă. Adusă la forma uzuală din clasificarea făcută, propoziţia *Numai unii S sunt P* devine *Unii S nu sunt P*. Aşa cum propoziţia *Numai unii S nu sunt P* devine *Unii S sunt P*.

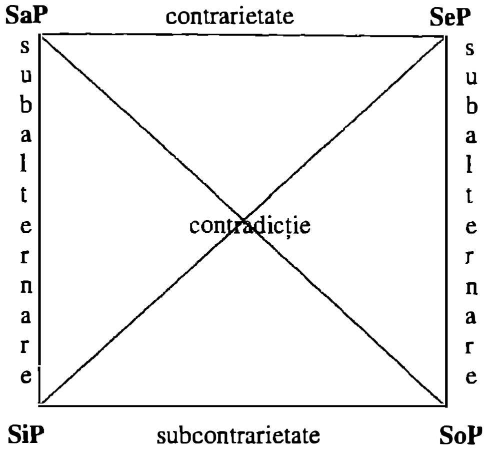
Alteori propoziţiile particulare au forma: *Numai S sunt P*, respectiv *Numai S nu sunt P*. Asemenea propoziţii particulare exclusive se pot transforma, echivalent, în propoziţii universale, de aceeaşi calitate, dar în care *S* şi *P* îşi schimbă reciproc locul. Ele devin *Toţi P sunt S*, respectiv *Nici un P nu este S*.

1.2.3. Raporturile logice dintre propoziţiile categorice

Aşa cum între termenii logici există o serie de raporturi logice, tot astfel între propoziţiile categorice putem pune în evidenţă nişte raporturi specifice. Dacă, de exemplu, propoziţia *Toţi studenţii sunt prezenţi* este adevărată, atunci propoziţiile *Unii studenţi nu sunt prezenţi* şi *Nici un student nu este prezent* sunt false. Aşa cum, dacă propoziţia *Unii studenţi nu sunt prezenţi* este falsă, propoziţia *Unii studenţi sunt prezenţi* este adevărată etc.

[18] Alteori apar doar majusculele corespunzătoare: A, E, I, O, cu semnificaţia SaP, SeP, SiP, SoP.

Raporturile logice dintre propozițiile categorice pot fi redate schematic prin *pătratul lui Boethius*[19].



Aşa cum vom vedea, această reprezentare simplă ne pune în evidență o particularitate logic relevantă a acestor raporturi: sub asumpția *adevărului* sau *falsității* unei propoziții (din cele patru) putem conchide asupra valorii de adevăr a celorlalte propoziții. Dacă $SaP=1$[20], atunci $SoP=0$, $SeP=0$ iar $SiP=1$. Dacă $SiP=0$, atunci $SeP=1$, $SoP=1$ şi $SaP=0$ (construiți exemple în limbajul natural, care ilustrează aceste cazuri).

Să caracterizăm succint cele 4 tipuri de raporturi logice.

Raportul de contradicție. Se stabileşte între propozițiile *SaP* – *SoP* şi *SeP* – *SiP* (diagonalele pătratului). Să luăm, ca exemplu, propozițiile *SaP* şi *SoP*.

1. Dacă $SaP=1$, atunci $SoP=0$.	1*. $SaP \supset \neg SoP$
2. Dacă $SaP=0$, atunci $SoP=1$.	2*. $\neg SaP \supset SoP$
3. Dacă $SoP=1$, atunci $SaP=0$.	3*. $SoP \supset \neg SaP$
4. Dacă $SoP=0$, atunci $SaP=1$.	4*. $\neg SoP \supset SaP$

Altfel spus, raportul de contradicție se stabileşte între două propoziții cantitativ şi calitativ opuse, astfel că ele *nu pot fi nici adevărate simultan şi nici false simultan*.

În coloana din dreapta sunt redate simbolic aceste raporturi, unde „$\supset$" este *implicația* iar „$\neg$" este *negația*[21]. Din expresiile simbolice 1* - 4* deducem că în raportul de contradicție o propoziție este echivalentă (i.e. are aceeaşi valoare logică) cu negația celeilalte. Putem scrie aşadar: $SaP \equiv \neg SoP$ echivalent $(SaP \supset \neg SoP) \wedge (\neg SoP \supset SaP)$[22], sau

$\neg SaP \equiv SoP$ echivalent $(\neg SaP \supset SoP) \wedge (SoP \supset \neg SaP)$.

Remarcă. Prin transformarea implicațiilor din formula $(SaP \supset \neg SoP) \wedge (\neg SoP \supset SaP)$ în conjuncții obținem formula echivalentă $\neg(SaP \wedge \neg\neg SoP) \wedge \neg(\neg SoP \wedge \neg SaP)$, adică $\neg(SaP \wedge SoP) \wedge (SoP \vee SaP)$, formulă care exprimă faptul că raportul de contradicție este

[19] Boethius (480-524).

[20] „1" şi „0" denotă valorile de adevăr „adevărat" şi „fals".

[21] Pus în fața unei expresii, simbolul „$\neg$" denotă negația expresiei respective: $\neg SoP$ înseamnă: „propoziția SoP este falsă" (şi nicidecum negația lui S!); $\neg P(x)$ înseamnă „ $P(x)$ este falsă" etc.

[22] În logica propozițiilor aceste derivări succesive se numesc *transformări echiveridice*. Pentru detalii trimitem la 2.1.3. (din capitolul următor).

fundamentat simultan de principiul logic al noncontradicției (i.e. $\neg(SaP \wedge SoP)$, cele două propoziții nu pot fi adevărate simultan) și de principiul logic al terțului exclus (i.e. $SoP \vee SaP$, cele două propoziții nu pot fi false simultan). Același rezultat îl obținem prin transformarea celeilalte formule, $(\neg SaP \supset SoP) \wedge (SoP \supset \neg SaP)$ (exercițiu).

Raportul de contrarietate. Se stabilește între propozițiile universale de calitate opusă: $SaP - SeP$. Pe baza unor exemple simple din limbajul natural putem constata că acest raport poate fi caracterizat astfel:

5. Dacă $SaP = 1$, atunci $SeP = 0$. — 5*. $SaP \supset \neg SeP$
6. Dacă $SaP = 0$, atunci $SeP = ?$. — 6*. $\neg SaP \supset ?$
7. Dacă $SeP = 1$, atunci $SaP = 0$. — 7*. $SeP \supset \neg SaP$
8. Dacă $SeP = 0$, atunci $SaP = ?$. — 8*. $\neg SeP \supset ?$

În formulările de mai sus simbolul „?" exprimă faptul că valoarea de adevăr a propoziției respective nu poate fi asertată, sub asumpția condiției din enunț. Adică, din faptul că propoziția *SaP* este falsă, nu putem spune ce valoare de adevăr are propoziția *SeP* (ea poate fi falsă sau adevărată). Așadar, două propoziții aflate în raport de contrarietate *nu pot fi adevărate simultan dar pot fi false simultan*. În redare simbolică: $\neg(SaP \wedge SeP)$, echivalent $\neg SaP \vee \neg SeP$, echivalent $SaP \supset \neg SeP$ sau $SeP \supset \neg SaP$.

Cum nu pot fi adevărate simultan, rezultă că raportul de contrarietate este fundamentat pe principiul logic al noncontradicției.

Raportul de subcontrarietate. Se stabilește între propozițiile particulare de calitate opusă: *SiP* și *SoP*. Aici vom avea, corespunzător:

9. Dacă $SiP = 1$, atunci $SoP = ?$. — 9*. $SiP \supset ?$.
10. Dacă $SiP = 0$, atunci $SoP = 1$. — 10*. $\neg SiP \supset SoP$.
11. Dacă $SoP = 1$, atunci $SiP = ?$. — 11*. $SoP \supset ?$.
12. Dacă $SoP = 0$, atunci $SiP = 1$. — 12*. $\neg SoP \supset SiP$.

Două propoziții subcontrare nu pot fi false simultan, dar pot fi adevărate. Adică, $\neg(\neg SiP \wedge \neg SoP)$, echivalent $\neg\neg SiP \vee \neg\neg SoP$, echivalent $SiP \vee SoP$. Sau, echivalent $\neg SiP \supset SoP$ sau $\neg SoP \supset SiP$. Raportul de subcontrarietate este fundamentat de principiul logic al terțului exclus.

Raportul de subalternare. Acest raport are loc între o propoziție universală și particulara de aceeași calitate, adică între *SaP* și *SiP*, respectiv *SeP* și *SoP*. Următoarele expresii explicitează acest raport (considerăm doar *SaP* și *SiP*):

13. Dacă $SaP = 1$, atunci $SiP = 1$. — 13*. $SaP \supset SiP$.
14. Dacă $SaP = 0$, atunci $SiP = ?$. — 14*. $\neg SaP \supset ?$.
15. Dacă $SiP = 1$, atunci $SaP = ?$. — 15*. $SiP \supset ?$.
16. Dacă $SiP = 0$, atunci $SaP = 0$. — 16*. $\neg SiP \supset \neg SaP$.

Propozițiile *SiP* și *SoP* sunt subalterne propozițiilor *SaP* și, respectiv, *SeP*, așa cum *SaP* și *SeP* sunt supraalterne propozițiilor *SiP* și *SoP*. Așadar, raportul de subalternare înseamnă: *adevărul supraalternei implică adevărul subalternei*, respectiv, *falsitatea subalternei implică falsitatea supraalternei.*

Remarcă. Două propoziții contrare pot fi false simultan, așa cum două propoziții subcontrare pot fi adevărate simultan. Dacă vrem să vedem în ce caz se întâmplă acest lucru, atunci vom proceda după cum urmează. Din cele 7 tipuri de raporturi extensionale dintre

termenii logici, dacă renunțăm la distincția exhaustiv-neexhaustiv (irelevantă aici), rămân doar 5: identitate, subordonare, supraordonare, intersecție și opoziție. Considerăm acum că cei doi termeni logici avuți în vedere sunt subiectul (*S*) și predicatul (*P*) unei propoziții. Desigur, valoarea ei logică depinde de raportul dintre termenii logici *S* și *P*. Dacă ținem seamă de toate aceste 5 raporturi dintre termenii *S* și *P*, atunci raporturile logice dintre propozițiile categorice, din pătratul lui Boethius, pot fi redate, mai nuanțat, prin următorul tabel:

	Identitate	Subordonare	Supraordonare	Intersecție	Opoziție
SaP	1	1	0	0	0
SeP	0	0	0	0	1
SiP	1	1	1	1	0
SoP	0	0	1	1	1

Deci, dacă *S* și *P* se află în raport de identitate, atunci *SaP* (adică *Toți S sunt P*) este o propoziție adevărată, *SeP* este falsă, *SiP* este adevărată $SoP = 0$ etc. E ușor de văzut că toate raporturile mai sus discutate pot fi „citite” pe acest tabel. Mai mult chiar, putem constata că două propoziții contrare pot fi false simultan dacă *S* și *P* se află în raport de supraordonare și de intersecție. Caz în care două propoziții subcontrare pot fi adevărate simultan.

Exerciții

1. Argumentați că date fiind raporturile de contradicție și contrarietate raportul de subalternare poate fi dedus.
2. Argumentați că date fiind raporturile de contradicție și subcontrarietate raportul de subalternare poate fi dedus.
3. Comparând raporturile logice din pătratul lui Boethius cu funcțiile de adevăr din 2.1.2.1., determinați, în fiecare caz în parte, ce funcții de adevăr corespund acestor raporturi.

Exemplu: Raportul de subalternare *SaP-SiP* este redat de funcția implicație: $SaP \supset SiP$ (la fel, $SeP \supset SoP$) etc.

1.3. Teoria inferenței

Așa cum termenii logici intră în construcția propozițiilor, tot astfel propozițiile participă la constituirea celei mai complexe forme logice: cea a inferenței. Inferarea ține de însuși modul de a fi al ființelor umane ca ființe raționale. Facem inferențe mereu, de la cele curente, cotidiene, până la cele mai complexe, realizate în domeniile excepționale ale cercetării științifice.

Definiție. Inferența este operația logică prin care din una sau mai multe propoziții asumate ca premise obținem o altă propoziție numită concluzie.

Inferențele sunt de o mare diversitate. Dacă luăm drept criteriu gradul de generalitate al concluziei în raport cu premisele, vom deosebi: *inferențe deductive* și *inferențe inductive.* O altă clasificare o putem face având în vedere dacă inferențele respective sunt *valide* (i.e. conservă în concluzie adevărul premisei/premiselor) sau *nevalide* (i.e. adevărul premisei/premiselor nu garantează adevărul concluziei). Logica se interesează exclusiv de inferențele valide. Iar dacă numărul premiselor este cel avut în vedere, atunci deosebim: *inferențe imediate* (i.e. inferențe cu o singură premisă) și *inferențe mediate* (i.e. inferențe cu

două sau mai multe premise). La aceste din urmă inferențe ne vom opri în cele ce urmează, cu mențiunea că propozițiile lor constitutive sunt *propoziții categorice*.

1.3.1. Inferențe imediate

Dacă știm, de exemplu, că propoziția *Toți studenții sunt prezenți* este adevărată, atunci, fără a face investigații empirice, știm că și propoziția *Unii dintre cei prezenți sunt studenți* este la fel. Adevărul primeia garantează adevărul celei de-a doua. Această operație prin care din prima propoziție (*SaP*) am obținut-o pe cea de-a doua (*PiS*) nu este o simplă transformare lingvistică, ci o operație *logică*, cea a *conversiunii*.

Definiția 1. Conversiunea este inferența imediată prin care dintr-o propoziție S-P derivăm o altă propoziție de forma P-S (i.e. termenii logici își schimbă locul și deci și funcțiile).

Să vedem acum în ce fel se convertesc cele 4 tipuri de propoziții categorice.

$SaP \xrightarrow{c} PiS$; aici $\xrightarrow{c}$ indică operația logică a conversiunii. Chiar și din exemplul de mai sus ne putem da seama că din propoziția *SaP* prin conversiune n-am fi putut obține propoziția *PaS*, adică *Toți cei prezenți sunt studenți*, pentru că această propoziție nu este întotdeauna adevărată. Și deci inferența făcută ar fi nevalidă. Însă dacă *SaP* este adevărată, atunci și *PiS* este adevărată. Premisa *SaP* se numește *convertendă* iar *PiS* se numește *conversă*. Întrucât în acest caz cantitatea premisei s-a alterat (i.e. din universală am obținut o particulară), conversiunea se numește *prin accident (per accidens)*.

$SeP \xrightarrow{c} PeS$ (conversiune simplă)

$SiP \xrightarrow{c} PiS$ (conversiune simplă)

$SoP \xrightarrow{c} ?$ (nu se convertesc)

Pe baza unor exemple simple putem să vedem că propozițiile particular negative *nu* se convertesc. Așadar, adevărul unei propoziții *SoP* nu poate garanta întotdeauna adevărul conversei ei *PoS*. Din adevărul propoziției *Unii oameni nu sunt ingineri* nu putem conchide *Unii ingineri nu sunt oameni*. În schimb, din propoziția *Unii studenți nu sunt logicieni* putem conchide că *Unii logicieni nu sunt studenți*. Întrucât nu întotdeauna concluzia este o propoziție adevărată, vom spune că propozițiile *SoP* nu se convertesc.

După cum se vede, prin conversiune obținem întotdeauna o propoziție de aceeași calitate. Propozițiile *SeP* și *SiP* se convertesc simplu (în aceste cazuri și cantitatea se conservă), *SaP* se convertește prin accident iar *SoP* nu se convertesc.

Așa cum din propoziții *SoP* adevărate obținem *uneori* propoziții *PoS* adevărate, tot astfel din propoziții *SaP* adevărate obținem *uneori* propoziții *PaS* adevărate. În logică este relevantă și cunoașterea acestor situații. Așa cum relevant a fost și răspunsul din paragraful precedent cu privire la situațiile în care două propoziții contrare/subcontrare pot fi false/adevărate simultan. Și în acest caz răspunsul poate fi dat ținând seamă de raportul dintre termenii logici *S* și *P*. Pentru aceasta considerăm din nou cele cinci raporturi extensionale și determinăm, în fiecare caz în parte, adevărul propozițiilor *SaP, PaS, SeP, PeS, SiP, PiS, SoP, PoS*.

Exemplu. Dacă *S* și *P* sunt în raport de identitate, atunci atât *SaP* cât și *PaS* sunt adevărate. În acest caz din propoziția *SaP*, prin conversiune, obținem *PaS* etc.

Tot astfel putem determina cazul în care *SoP* se convertește (exercițiu).

Gama inferențelor imediate nu se reduce însă la conversiune. Dacă, de exemplu, propoziția *Toți studenții sunt bursieri* este adevărată, atunci va fi adevărată și propoziția *Nici un student nu este nebursier*. În acest caz vorbim despre o altă operație *logică*, cea a *obversiunii*.

Definiția 2. Obversiunea este inferența imediată prin care dintr-o propoziție S-P derivăm o altă propoziție de forma $\overline{S-\overline{P}}$.

Premisa se numeşte *obvertendă* iar concluzia *obversă*. Notația $\overline{S - \overline{P}}$ are următoarea semnificație: în concluzie termenii logici își păstrează locul, predicatul este *negat*[23] iar bara de deasupra întregii expresii înseamnă înlocuirea reciprocă a operatorilor intrapropoziționali *a* cu *e* şi *i* cu *o*. Adică:

$SaP \xrightarrow{o} Se\overline{P}$ (locul barei de deasupra întregii expresii este preluat de transformarea lui *a* în *e*).

$SeP \xrightarrow{o} Sa\overline{P}$ (explicație similară).

$SiP \xrightarrow{o} So\overline{P}$

$SoP \xrightarrow{o} Si\overline{P}$

Simbolul $\xrightarrow{o}$ indică operația logică a *obversiunii* (construiți exemple pentru fiecare caz în parte).

În cazul obversiunii *cantitatea* premisei se conservă în concluzie, în toate cele patru cazuri.

Cele două inferențe imediate, aplicate succesiv (şi alternativ) asupra unei propoziții categorice permit derivarea unor propoziții de alte tipuri decât cele menționate mai sus. Să luăm, de exemplu, propoziția *SaP* şi să aplicăm alternativ cele două operații, începând cu obversiunea. Vom obține:

$SaP \xrightarrow{o} Se\overline{P} \xrightarrow{c} \overline{P}eS \xrightarrow{o} \overline{P}a\overline{S} \xrightarrow{c} \overline{S}i\overline{P} \xrightarrow{o} \overline{S}oP$

Propozițiile obținute în paşii 3 şi 4, respectiv $\overline{P}eS$ şi $\overline{P}a\overline{S}$ se numesc *contrapuse*, iar ultimele două propoziții $\overline{S}i\overline{P}$ şi $\overline{S}oP$ se numesc *inverse*. Să le considerăm pe rând.

Definiția 3. Contrapoziția este inferența imediată prin care dintr-o propoziție S-P derivăm o altă propoziție de forma $\overline{P} - (S/\overline{S})$ *(i.e. obținem o concluzie al cărei subiect este contradictoriul predicatului premisei).*

Premisa se numeşte *contraponendă* iar concluzia *contrapusă*. Notația $S/\overline{S}$ simbolizează următorul fapt: predicatul concluziei este fie subiectul premisei, fie subiectul *negat* al premisei. În primul caz, când concluzia are forma $\overline{P} - S$ vorbim despre contrapusă *parțială*, în cel de-al doilea, $\overline{P} - \overline{S}$, de contrapusă *totală*.

Definiția 4. Inversa este inferența imediată prin care dintr-o propoziție S-P derivăm o altă propoziție de forma $\overline{S} - (P/\overline{P})$ *(i.e. obținem o concluzie al cărei subiect este contradictoriul subiectului premisei).*

Şi în acest caz notația $P/\overline{P}$ simbolizează faptul că o inversă poate să fie *parțială* (de forma $\overline{S} - P$) sau *totală* (de forma $\overline{S} - \overline{P}$) (Construiți exemple).

Aşadar, prin aplicarea repetată şi alternativă a conversiunii şi obversiunii putem obține toate propozițiile adevărate dintr-o propoziție dată ca adevărată.

$SaP \xrightarrow{c} PiS \xrightarrow{o} Po\overline{S}$

$SaP \xrightarrow{o} Se\overline{P} \xrightarrow{c} \overline{P}eS \xrightarrow{o} \overline{P}a\overline{S} \xrightarrow{c} \overline{S}i\overline{P} \xrightarrow{o} \overline{S}oP$

$SeP \xrightarrow{c} PeS \xrightarrow{o} Pa\overline{S} \xrightarrow{c} \overline{S}iP \xrightarrow{o} \overline{S}o\overline{P}$

$SeP \xrightarrow{o} Sa\overline{P} \xrightarrow{c} \overline{P}iS \xrightarrow{o} \overline{P}o\overline{S}$

$SiP \xrightarrow{c} PiS \xrightarrow{o} Po\overline{S}$

$SiP \xrightarrow{o} So\overline{P}$

$SoP \xrightarrow{c} ?$

---

[23] De câte ori ne vom referi la termenii logici strict *extensional* (i.e. termeni care denotă *clase* de obiecte) vom utiliza, pentru *clasa complementară*, o bară deasupra simbolului respectiv ($\overline{S}$, $\overline{M}$, $\overline{P}$). Aşadar $\overline{P}$ (*P* negat) înseamnă: „clasa complementară lui *P*" (adică non *P*).

$SoP \xrightarrow{o} Si\bar{P} \xrightarrow{c} \bar{P}iS \xrightarrow{o} \bar{P}o\bar{S}$

Remarci. 1. Lanțul derivărilor se oprește atunci când ajungem la o propoziție *SoP* care urmează să fie convertită.

2. În cazul conversiunii simple (*SeP* și *SiP*) propozițiile obținute (*PeS* și *PiS*) sunt echivalente cu premisele lor. În cazul conversiunii prin accident avem doar un raport de implicație $SaP \supset PiS$.

3. În cazul obversiunii, obvertendele și obversele sunt propoziții *echivalente*.

În fine, încheiem acest paragraf cu câteva explicații privitoare la validitatea inferențelor imediate.

Distribuirea termenilor logici

Să considerăm, de exemplu, propoziția *Unii studenți sunt melomani*. Din această propoziție *nu* putem deriva propoziția *Toți studenții sunt melomani*. În caz contrar derivarea ar fi *nevalidă*, deoarece încalcă următoarea cerință privitoare la inferențele deductive: concluzia unei inferențe deductive nu trebuie să depășească gradul de generalitate al premisei (premiselor) ei. Gradul de generalitate al concluziei se referă atât la propoziția ca atare cât și la termenii logici din care se compune. Derivarea de mai sus ar fi nevalidă atât pentru faptul că dintr-o premisă particulară deducem o concluzie universală, cât și pentru motivul că termenul logic „studenți" este considerat parțial în premisă pe când în concluzie el este luat extensional în întreaga lui sferă. Acest din urmă aspect ne interesează în cele ce urmează. În premisa din exemplul de mai sus, despre termenul logic „studenți" vom spune că este *nedistribuit*, pe când în concluzie este *distribuit*.

Definiția 5. Un termen logic este distribuit dacă într-o propoziție este considerat în maxima lui extensiune; în caz contrar el este nedistribuit.

Trebuie să remarcăm de la bun început că această proprietate a unui termen logic se poate afirma sau nega doar în raport cu propoziția din care termenul logic respectiv face parte ca subiect sau predicat.

Dacă prin „+" înțelegem „distribuit" iar prin „ − " înțelegem „nedistribuit", atunci distribuirea termenilor logici *S* și *P* în propozițiile categorice arată astfel: S^+aP^-, S^+eP^+, S^-iP^-, S^-oP^+.

Într-o propoziție universal afirmativă *S* este distribuit, fapt care rezultă chiar din lectura expresiei „Toți *S* sunt *P*". Însă de aici nu deducem nimic cu privire la extensiunea lui *P*, motiv pentru care *P* este considerat nedistribuit. Explicații similare putem găsi și pentru celelalte 3 cazuri (exercițiu).

Rezumativ, distribuirea termenilor logici poate fi redată astfel:

1. Subiectul (*S*) este distribuit în propoziții *universale*.
2. Predicatul (*P*) este distribuit în propoziții *negative*.

Echivalent, *un termen logic este distribuit dacă este subiectul unei propoziții universale sau predicatul unei propoziții negative.*

Validitatea inferențelor (imediate și mediate) presupune respectarea unei *reguli* cu privire la distribuirea termenilor logici: *un termen logic poate să apară distribuit în concluzie doar dacă a fost distribuit și în premisa corespunzătoare.*

O dată formulată această regulă, putem argumenta de ce, de exemplu, conversiunea *simplă* a propozițiilor *SaP* și *SoP* nu este o inferență validă. Dacă am face astfel de conversiuni, atunci am avea:

$S^+aP^- \xrightarrow{c} P^+aS^-$ și $S^-oP^+ \xrightarrow{c} P^-oS^+$

În ambele cazuri se încalcă regula distribuirii termenilor. În primul caz, în concluzie, *P* apare distribuit, fără a fi distribuit în premisă, în al doilea, *S* este distribuit în concluzie și nu este distribuit în premisă.

Remarcă. Un termen logic poate fi distribuit în premisă fără a fi distribuit în concluzie (dați exemple).

Propoziții cu termeni negativi

Aşa cum am văzut din derivările de mai sus, prin aplicarea repetată a conversiunii şi obversiunii obținem propoziții în care apar termeni *negați*. Unele din acestea sunt echivalente cu propoziția inițială, altele sunt implicate de propoziția inițială. Cu toate acestea, dată fiind o propoziție categorică, anumite propoziții nu pot fi obținute din aceasta. Din propoziția *SaP*, de exemplu, nu putem obține inversa $\overline{S}a\overline{P}$ (nici reciproc). Motiv pentru care cele două propoziții sunt considerate *independente.* Aşadar, dacă vom considera şi propozițiile cu termeni negați, vom constata că la cele patru tipuri de propoziții categorice, *SaP, SeP, SiP, SoP*, se adaugă încă patru tipuri diferite de propoziții, inversele celor dintâi: $\overline{S}a\overline{P}$, $\overline{S}e\overline{P}$, $\overline{S}i\overline{P}$, $\overline{S}o\overline{P}$. Fiecare dintre aceste opt tipuri are câte trei propoziții *echivalente.* Acestea pot fi găsite exact în modul în care am procedat mai sus: prin aplicarea repetată a conversiunii şi obversiunii. Din *SaP*, de exemplu, am obținut propozițiile echivalente: $Se\overline{P}$, $\overline{P}eS$, $\overline{P}a\overline{S}$. Din *SeP* am obținut: *PeS*, $Pa\overline{S}$ şi $Sa\overline{P}$ etc. La fel putem proceda acum cu propoziția $\overline{S}a\overline{P}$, astfel: $\overline{S}a\overline{P} \xrightarrow{o} \overline{S}eP \xrightarrow{c} Pe\overline{S} \xrightarrow{o} PaS$, obținând trei propoziții echivalente cu $\overline{S}a\overline{P}$. Apoi luăm propoziția $\overline{S}e\overline{P}$ şi procedăm similar etc (exercițiu). Deosebim, aşadar, în total 32 de propoziții categorice:

SaP	SeP	SiP	SoP	$\overline{S}a\overline{P}$	$\overline{S}e\overline{P}$	$\overline{S}i\overline{P}$	$\overline{S}o\overline{P}$
$Se\overline{P}$	$Sa\overline{P}$	$So\overline{P}$	$Si\overline{P}$	$\overline{S}eP$	$\overline{P}e\overline{S}$	$\overline{P}i\overline{S}$	$\overline{S}iP$
$\overline{P}eS$	PeS	$Po\overline{S}$	$\overline{P}iS$	$Pe\overline{S}$	$\overline{P}aS$	$\overline{P}oS$	$Pi\overline{S}$
$\overline{P}a\overline{S}$	$Pa\overline{S}$	PiS	$\overline{P}o\overline{S}$	PaS	$\overline{S}aP$	$\overline{S}oP$	PoS

Prima linie a tabelului o reprezintă cele 8 tipuri de propoziții categorice, iar fiecare coloană conține propoziții echivalente.

Aşa cum între cele patru tipuri de propoziții categorice cu termeni pozitivi există raporturile desemnate de pătratul lui *Boethius*, tot astfel putem reprezenta prin acelaşi pătrat logic raporturile dintre propozițiile cu termeni negați. Numai că, de data aceasta, în colțurile pătratului vom pune aceleaşi propoziții *A, E, I, O* dar în care termenii logici sunt negați.

Iar dacă vrem să reprezentăm raporturile logice din toate cele 8 tipuri de propoziții categorice, atunci reprezentarea va fi un *octogon*, în vârfurile căruia vom aşeza cele 8 tipuri de propoziții categorice (plus echivalentele lor) şi vom decupa raporturile corespunzătoare [24].

Raporturi de contradicție: între propozițiile *SaP – SoP, SeP – SiP*, $\overline{S}a\overline{P} - \overline{S}o\overline{P}$, $\overline{S}e\overline{P} - \overline{S}i\overline{P}$ (şi echivalentele lor).

Raporturi de contrarietate: $SaP - SeP$, $\overline{S}a\overline{P} - \overline{S}e\overline{P}$, $SaP - \overline{S}e\overline{P}$, $\overline{S}a\overline{P} - SeP$.

Raporturi de subcontrarietate: $SiP - SoP$, $\overline{S}i\overline{P} - \overline{S}o\overline{P}$, $SiP - \overline{S}o\overline{P}$, $\overline{S}i\overline{P} - SoP$.

Raporturi de subalternare: $SaP - SiP$, $SeP - SoP$, $\overline{S}a\overline{P} - \overline{S}i\overline{P}$, $\overline{S}e\overline{P} - \overline{S}o\overline{P}$, $SaP - \overline{S}i\overline{P}$, $\overline{S}e\overline{P} - SoP$.

Pentru fiecare propoziție menționată în această enumerare se consideră toate propozițiile echivalente cu ea (i.e. întreaga coloană din care face parte).

Exerciții

1. De ce propozițiile *SiP* nu admit contrapuse?
2. Câte contrapuse admit propozițiile *SaP, SeP* şi *SoP*?

[24] Din motive tipografice, acest octogon n-a putut fi redat aici. Cititorul poate găsi această reprezentare în E.A. Hacker, The octogon of opposition, in *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVI, 3, 1975.

3. De ce propozițiile particulare nu admit inverse?
4. Derivați toate propozițiile categorice adevărate ce decurg din următoarele propoziții: *Numai S sunt P, Numai unii S sunt P, Numai unii S nu sunt P.*
5. Care sunt propozițiile categorice al căror adevăr decurge din adevărul propoziției $Sa\bar{P}$?
6. Este dubla obversiune a unei propoziții identică cu propoziția inițială? Dar dubla conversiune? (Argumentați).
7. Este adevărată propoziția de mai jos?

„Un termen logic este distribuit într-o propoziție ddacă [25] el este nedistribuit în contradictoria propoziției respective".

1.3.2. Inferențe mediate (silogismul)

Dacă în cazul inferențelor imediate concluzia rezlută nemijlocit dintr-o singură premisă, într-o inferență *mediată* concluzia este formulată pe baza a două sau mai multe premise. Forma fundamentală a inferențelor deductive mediate o reprezintă *silogismul* [26].

Definiție. Silogismul este inferența deductivă mediată prin care din două propoziții asumate ca premise se deduce o altă propoziție numită concluzie.

Exemplu.

Toate plantele au o structură celulară.	*MaP*
Teiul este o plantă.	*SaM*
Teiul are o structură celulară.	*SaP*

În structura unui silogism intră, așadar, trei propoziții. Însă, nu oricare trei propoziții formează un silogism. Primele două propoziții, premisele silogismului, au un element comun, care le leagă: *plantă*. Acest element comun se numește *termen mediu* (*M*) și nu apare în concluzia silogismului. Ceilalți doi termeni, predicatul primei premise și subiectul celei de-a doua apar și în concluzie, ca predicat (*P*), respectiv subiect (*S*) al concluziei. Acești termeni, *S* și *P*, se numesc *termen minor* (*S*) și *termen major* (*P*). Corespunzător, premisa care conține subiectul concluziei se numește *premisă minoră* (a doua propoziție din exemplul de mai sus) iar cea care conține *predicatul concluziei* (prima premisă) se numește *premisă majoră*. Termenul minor și cel major se numesc, laolaltă, *termeni extremi*. Așadar, într-un silogism întâlnim trei termeni: *S*, *M* și *P*, fiecare având strict două ocurențe (apariții).

Remarcă. Ordinea standard în care sunt redate silogismele în logică este: premisă majoră, premisă minoră, concluzie. Aceasta nu înseamnă că în argumentarea curentă ea este obligatorie. La fel de bine puteam schimba ordinea premiselor păstrând concluzia. Obțineam astfel un silogism echivalent, uneori mai „firesc" decât primul.

1.3.2.1. Figuri și moduri silogistice

Dacă vrem să redăm *schematic* silogismul de mai sus, adică să renunțăm la formularea lui în limbajul natural și să-i explicităm structura abstractă, atunci schema din dreapta reprezintă exact acest lucru. Însă această schemă silogistică nu acoperă nicidecum toate posibilitățile de construire a silogismelor. Și aceasta din două motive: în structura unui silogism pot să apară și alte propoziții decât cele universal afirmative; în al doilea rând, felurile în care termenii logici se ordonează pot fi altele decât cele din exemplul de mai sus.

[25] Abreviere pentru „dacă și numai dacă".
[26] Corespunzător, *silogistica* este teoria silogismului. Aceasta reprezintă nucleul logicii tradiționale.

Exemplu.

Nici un student n-a fost anchetat.	*MeP*
Toți studenții sunt promovați.	*MaS*
Unii dintre cei promovați n-au fost anchetați.	*SoP*

Dacă avem mai întâi în vedere ordinea termenilor logici într-un silogism, indiferent de tipul propozițiilor care-l compun, atunci, schematic, putem pune în evidență următoarele 4 structuri, numite *figuri silogistice*:

M – P	P – M	M – P	P – M
S – M	S – M	M – S	M – S
S – P	S – P	S – P	S – P
(I)	(II)	(III)	(IV)

În toate aceste cazuri concluzia este aceeași, S – P. Deosebirea rezidă în ordinea termenilor din premise, ordine care depinde de *poziția* pe care termenul mediu o ocupă în premise. *O figură silogistică este deci o structură determinată de funcția pe care termenul mediu o ocupă în premise.* În cadrul fiecărei figuri silogistice deosebim *moduri silogistice, deosebite între ele prin felul propozițiilor din care se compun* (i.e. cantitatea și calitatea acestor propoziții).

Iar dacă luăm în considerare și acest aspect, adică tipul propozițiilor care pot fi premise și concluzie în fiecare mod din cele 4 figuri silogistice, atunci vom constata că, teoretic, numărul silogismelor care pot fi construite este destul de mare. Respectiv, 4 (cele 4 tipuri de propoziții care pot fi o premisă) înmulțit cu 4 (cele 4 tipuri care pot fi cealaltă premisă) înmulțit cu 4 (propozițiile posibile din concluzie) înmulțit cu 4 (cele patru figuri silogistice). Adică $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. Firește, nu toate aceste posibilități de construcție a silogismelor genereazǎ silogisme *valide*, adică silogisme în care din adevărul premiselor rezultă în mod necesar adevărul concluziei. Logica este interesată înainte de toate de fundamentarea riguroasă a distincției dintre silogismele valide și cele nevalide, prin formularea unor criterii sau metode de testare și, aferent, de inventarierea silogismelor valide.

1.3.2.2. Metode de testare a validității silogismelor

Pentru testarea validității silogismelor avem la îndemână mai multe metode. Ne vom opri, aici, la două dintre ele: una care se bazează pe formularea și aplicarea regulilor generale ale validității silogismelor, iar cealaltă pe reducerea (directă sau indirectă) a silogismelor la silogisme din figura I, asumate ca valide. Să le considerăm pe rând.

I. Metoda aplicării regulilor generale

Să vedem mai întâi care sunt regulile generale ale validității silogismelor și cum se justifică ele.

1. Orice silogism valid conține strict trei termeni logici: S, M, P.

În reprezentarea schematică acest lucru este evident, din moment ce o astfel de schemă conține doar cele trei simboluri. Ca silogisme (i.e. formulate în limbajul natural) pot exista situații în care această regulă este încălcată. Date fiind propozițiile *Creionul este negru*, *„Negru" este un cuvânt*, am putea conchide: *Creionul este un cuvânt*. Evident, concluzia nu poate fi acceptată și deci silogismul este nevalid. Aceasta se datorează faptului că termenul mediu, *negru*, are, în cele două premise, sensuri diferite. În prima exprimă o proprietate a creionului, iar în a doua o entitate lingvistică, redată corect prin scrierea acestui cuvânt între ghilimele. Acest silogism nu conține trei termeni, ci patru (neavând, de fapt, termen mediu). Și deci aici s-a încălcat principiul logic al *identității.*

2. Termenul mediu trebuie să fie distribuit în cel puțin una dintre premise.

Să considerăm următoarea schemă silogistică:

MiP
SaM

SiP

Termenul mediu este nedistribuit în ambele premise (în cea majoră este subiect de particulară, în cea minoră este predicat de afirmativă). Vrem ca pe baza celor două premise să formulăm o concluzie. Este posibilă oricare din următoarele situații contradctorii: *SiP, SeP.*

a) Concluzia *SiP* poate fi derivată din cele două premise, în următorul caz: *M* şi *P* se află în raport de intersecție (premisa majoră) iar *S* este subordonat lui *M* (premisa minoră) şi, *simultan*, *S* se află în raport de intersecție cu *P*.

b) Concluzia *SeP* se poate obține astfel: considerăm, ca mai sus, cele două raporturi conținute în premise, şi, *simultan*, *S* se află în raport de opoziție cu *P*.

Întrucât aceleaşi premise permit obținerea unor concluzii contradictorii, modul în cauză nu poate fi valid. Sursa nevalidității lui este nedistribuirea termenului mediu în cel puțin una din premise (i.e. termenul mediu *M* nu corelează în nici un fel extensiunile termenilor extremi, *S* şi *P*, lăsând deschisă posibilitatea ca între aceştia să existe mai multe raporturi)[27].

3. Un termen logic extrem nu poate să apară distribuit în concluzie dacă n-a fost distribuit în premisa corespunzătoare.

Să luăm acum următoarea schemă silogistică:

MaP
MaS

SaP

După cum vedem, în concluzie *S* este distribuit, fără a fi distribuit în premisa minoră (fiind predicat de afirmativă). Şi în acest caz putem deriva, pe baza adevărului premiselor, două concluzii contradictorii: *SaP* şi *SoP*.

a) Concluzia *SaP* rezultă din raporturile dintre termeni, conținute în premise (respectiv, *M* este subordonat lui *P* şi lui *S*), plus *S* este subordonat lui *P*.

b) Concluzia *SoP* rezultă, ca mai sus, din raporturile conținute în premise plus *S* şi *P* se află în raport de intersecție.

La fel, pentru a arăta nevaliditatea unui silogism în care *P* este distribuit în concluzie şi nedistribuit în premisa majoră (Exercițiu).

4. Cel puțin una din premise trebuie să fie afirmativă (Echivalent: din două premise negative nu se poate deriva în mod valid o concluzie).

Dacă ambele premise sunt negative, cei trei termeni logici *S, M* şi *P* se află în raport de opoziție (n-au nici un element comun) şi deci *M* nu corelează în nici un fel termenii *S* şi *P* în premise. Şi astfel premisele nu pot constitui o rațiune suficientă pentru concluzie.

5. Din premise afirmative rezultă o concluzie afirmativă.

Premisele fiind afirmative, raportul dintre cei trei termeni logici conținuți în premise este, intensional, unul de concordanță. Respectiv, extensiunile lor sunt explicitate în forma elementelor *comune* acestor trei termeni. Iar din faptul că *S* şi *P* au elemente comune cu *M* nu putem spune nimic cu privire la elementele lor deosebitoare, dar putem spune cu necesitate ceva cu privire la notele *comune* ale lui *S* şi *P*. Şi deci concluzia trebuie să fie afirmativă. Şi

[27] Cititorii pot „vizualiza" aceste raporturi, dacă recurg la o reprezentare prin diagrame Euler (exercițiu).

astfel, în virtutea principiului noncontradicției, o concluzie negativă nu se poate nicidecum obține.

6. Din premise calitativ diferite rezultă o concluzie negativă.

Premisele fiind calitativ diferite (una afirmativă și una negativă), fiecare conține un raport diferit cu termenul mediu. Cea afirmativă exprimă faptul că termenul extrem pe care-l conține are o parte *comună* cu termenul mediu, iar cea negativă că termenul extrem pe care-l conține se află în raport de *opoziție* cu termenul mediu. Iar din faptul că raporturile termenilor extremi cu termenul mediu sunt *diferite* putem conchide doar asupra *opoziției* dintre *S* și *P* (deoarece acel termen logic care apare în premisa negativă este separat în totalitatea extensiunii sale de întreaga extensiune *comună* celuilalt termen și termenului mediu). Și astfel putem doar conchide asupra opoziției dintre extremi, fapt redat prin concluzia negativă a silogismului.

7. Cel puțin una dintre premise trebuie să fie universală (Echivalent: din două premise particulare nu se poate deriva în mod valid o concluzie).

Să presupunem că ambele premise sunt particulare. Avem astfel următoarele trei posibilități:

a) Ambele premise sunt particular afirmative. În acest caz silogismul nu poate fi valid, deoarece termenul mediu nu este distribuit în cel puțin una dintre premise (așa cum cere regula 2).

b) Ambele premise sunt negative. Silogismul este nevalid, deoarece încalcă regula 4.

c) O premisă este negativă, cealaltă afirmativă. În acest caz concluzia este negativă (pe baza regulii 6) și deci predicatul concluziei este un termen distribuit. Ca silogismul să fie valid, predicatul concluziei ar trebui să fie distribuit și în premisa majoră. Însă numărul total al termenilor distribuiți în premise este 1 (i.e. predicatul propoziției negative). Și deci silogismul este nevalid, căci în premise ar trebui să avem doi termeni logici distribuiți (predicatul concluziei și termenul mediu).

8. Din premise cantitativ diferite rezultă o concluzie particulară.

Dacă luăm în considerare și calitatea premiselor, atunci deosebim următoarele trei cazuri:

a) Ambele premise sunt afirmative. Cum una din premise este universal afirmativă iar cealaltă particular afirmativă rezultă că în premise avem un singur termen logic distribuit: subiectul propoziției universal afirmative. În virtutea regulii 2, acesta trebuie să fie termenul mediu. În acest caz în concluzie *S* nu poate fi distribuit și deci concluzia este o propoziție particulară.

b) Ambele propoziții sunt negative. Nici o concluzie nu poate fi derivată în virtutea regulii 4.

c) O premisă este afirmativă și una negativă. Și cum o premisă este universală iar una particulară (cf. enunțului regulii) rezultă că numărul total al termenilor distribuiți în premise este 2 (subiectul premisei universale și predicatul premisei negative). Dintre acești doi termeni unul trebuie să fie predicatul concluziei (pentru că premisele fiind diferite calitativ, concluzia este negativă, în virtutea regulii 6, și deci *P* este distribuit). Așadar, subiectul (*S*) nu poate să fie distribuit în concluzie (cf. regulii 3).

Remarcă. În logică propozițiile negative și cele particulare sunt considerate „mai slabe" decât cele afirmative și, respectiv, universale. Pentru acest motiv regulile 6 și 8 pot fi sintetic exprimate astfel: *concluzia urmează partea mai slabă.*

O dată formulate și justificate regulile generale ale validității silogismelor, inventarierea modurilor valide, proprii fiecărei figuri silogistice, se simplifică. Tot ceea ce trebuie să facem este să testăm, în fiecare caz în parte, dacă modul respectiv respectă sau nu toate cele 8 reguli. Dacă da, atunci este un mod valid. Pentru aceasta considerăm mai întâi

toate combinațiile posibile de propoziții categorice, care pot fi *premisele* unui mod, redându-le simbolic (A, E, I, O) în ordinea standard (i.e. premisă majoră – premisă minoră). Obținem astfel:

AA	AE	AI	AO
EA	EE	EI	EO
IA	IE	II	IO
OA	OE	OI	OO

În fiecare dublet, primul simbol denotă premisa majoră iar al doilea premisa minoră. Acum, considerăm *pe rând* cele patru figuri silogistice.

Modurile valide ale figurii I

$$\frac{\begin{array}{c} M-P \\ S-M \end{array}}{S-P}$$

Vom lua prima combinație de premise, AA, și vom construi un mod din figura I iar apoi verificăm dacă respectă toate cele 8 reguli. Avem, așadar,

$$\frac{\begin{array}{c} MaP \\ SaM \end{array}}{SaP}$$

Formularea concluziei, *SaP*, s-a făcut pe baza faptului că premisele sunt universal afirmative. Am presupus că și concluzia este universal afirmativă[28] iar acum vom verifica dacă modul astfel obținut este într-adevăr valid. Prima regulă este respectată (fapt evident în toate cazurile, dat fiind că operăm doar cu scheme silogistice). *M* este distribuit cel puțin o dată (i.e. în majoră). S este distribuit în concluzie, dar este distribuit și în premisa minoră. Cel puțin o premisă este universală și cel puțin una este afirmativă. Avem așadar un mod valid din figura I: AA / A (i.e. din două premise universal afirmative s-a obținut o concluzie universal afirmativă).

Trecem acum la următoarea combinație de premise:

$$\frac{\begin{array}{c} MaP \\ SeM \end{array}}{SeP}$$

Întrucât o premisă este negativă, concluzia formulată este negativă. Am presupus că este *SeP*. Verificând respectarea celor 8 reguli, constatăm că una din acestea nu este respectată: *P* apare distribuit în concluzie, dar este nedistribuit în premisa majoră. Și deci modul este *nevalid*. În acest fel vom proceda în fiecare caz în parte. După excluderea modurilor nevalide din figura I rămân (ca valide!) următoarele patru (exercițiu):

AA / A: BARBARA
EA / E: CELARENT
AI / I: DARII
EI / O: FERIO

AA / I: BARBARI
EA / O: CELARONT

[28] Este o presupunere al cărei adevăr trebuie testat. Nu întotdeauna din propoziții universal afirmative se obține o concluzie universal afirmativă (comp. figura a III-a).

Cuvintele corespunzătoare fiecărui mod valid sunt denumirile mnemotehnice ale acestora[29]. Fiecare cuvânt mnemotehnic conține trei vocale. Succesiunea acestora în cuvânt denotă succesiunea: *premisă majoră – premisă minoră – concluzie*. Primele patru moduri de mai sus sunt modurile valide principale ale figurii I.

Însă, dacă un astfel de mod are concluzie universală, atunci va fi valid şi modul subaltern, a cărui concluzie este particulara (subalterna) concluziei modului principal. Aşadar, fiindcă AA / A este un mod valid, şi modul AA / I (BARBARI) este un mod valid. Similar, din validitatea lui CELARENT conchidem asupra validității lui CELARONT.

Modurile valide ale figurii a II-a

Procedăm similar figurii I, numai că, de data aceasta, vom avea în vedere structura specifică figurii a II-a:

$$\frac{\begin{array}{c} P - M \\ S - M \end{array}}{S - P}$$

Dacă luăm prima combinație de premise, AA, vom putea construi modul

$$\frac{\begin{array}{c} PaM \\ SaM \end{array}}{SaP}$$

şi vom constata că este un mod nevalid, deoarece *M* nu este distribuit în cel puțin una din premise. Testând fiecare mod posibil al acestei figuri şi eliminând modurile nevalide, obținem, în final, următoarele moduri valide ale acestei figuri silogistice (exercițiu).

EA / E: CESARE
EI / O: FESTINO
AE / E: CAMESTRES
AO / O: BAROCO

EA / O: CESARO
AE / O: CAMESTROP

Modurile valide ale figurii a III-a

Procedând similar, obținem următoarele moduri valide:

AA / I: DARAPTI
IA / I: DISAMIS
AI / I: DATISI
EA / O: FELAPTON
OA / O: BOCARDO
EI / O: FERISON

Modurile valide ale figurii a IV-a

AA / I: BRAMANTIP
AE / E: CAMENES

[29] Date de Petrus Hispanus (1205-1277).

IA / I: DIMARIS
EA / O: FESAPO
EI / O: FRESISON

AE / O: CAMENOP

Aşadar, din cele 256 de moduri teoretic posibile doar 24 de moduri sunt valide, câte 6 în fiecare figură. Din cele 24, 19 sunt moduri principale iar 5 subalterne. Fiind moduri valide, toate respectă regulile generale ale validităţii silogismelor. De altfel, aplicarea regulilor generale a constituit *metoda* prin care aceste moduri au fost explicitate.

Însă, găsirea modurilor valide din fiecare figură silogistică o putem face şi altfel: prin aplicarea *regulilor specifice* figurii respective. Aceste reguli specifice nu se adaugă celor 8 reguli generale, mai sus formulate, ci pot fi deduse şi *demonstrate* pe baza celor 8.

Reguli specifice modurilor valide din figura I

Formularea acestor reguli o putem face, simplu, examinând ordinea în care se succed vocalele în cuvintele mnemotehnice. Pentru figura I aceste reguli sunt:

R1. Premisa minoră este afirmativă.

R2. Premisa majoră este universală.

Demonstraţie a regulii R1 (reductio ad absurdum)

Presupunem că premisa minoră este negativă. Rezultă, prin regula generală 6, că în mod necesar concluzia este negativă. Şi deci predicatul concluziei (*P*) este un termen logic distribuit. În acord cu regula generală 3, ca modul să fie valid *P* trebuie să fie distribuit şi în premisa majoră, unde ocupă locul şi funcţia predicatului logic. Iar pentru a fi distribuit în majoră, majora trebuie să fie negativă. Însă din două premise negative, în acord cu regula generală 4, nu putem deriva în mod valid o concluzie. Aşadar, premisa minoră a unui mod valid din figura I nu poate fi negativă; echivalent, este o propoziţie afirmativă.

Demonstraţie a regulii R2.

Din faptul că premisa minoră este afirmativă rezultă că termenul mediu este nedistribuit în această premisă (deoarece *M* este predicat de afirmativă). Pentru ca modul să fie valid *M* trebuie neaparat să fie distribuit în premisa majoră (în acord cu regula generală 2). Aşadar, în premisa majoră *M* trebuie să fie subiectul unei propoziţii universale.

Acum, dacă aplicăm aceste reguli specifice, obţinerea modurilor valide este simplă. Premisa majoră este universală (cf. R2), adică A sau E. Din posibilităţile de combinare ale acestor propoziţii cu toate celelalte 4 tipuri (pentru premisa minoră), adică AA, AE, AI, AO; EA, EE, EI, EO, eliminăm acele combinaţii care nu respectă R1, adică AE, AO, EE şi EO. Rămân, aşadar, 4: AA, AI, EA, EO, adică premisele modurilor BARBARA, DARII, CELARENT şi FERIO. Pe baza acestor premise formulăm concluziile şi obţinem mai întâi cele 4 moduri valide principale. Apoi adăugăm *subalternele* lor: BARBARI şi CELARONT.

Reguli specifice modurilor valide din figura a II-a

R1. Una din premise este negativă (echivalent: premisele sunt neomogene calitativ).

R2. Premisa majoră este universală.

Demonstraţie a regulii R1.

Cum termenul mediu (*M*) este predicat în ambele premise, pentru a fi distribuit una din premise trebuie să fie negativă.

Demonstraţie a regulii R2.

O premisă fiind negativă, concluzia este negativă şi deci predicatul (*P*) este un termen logic distribuit. În acord cu regula generală 3, predicatul (*P*) trebuie să fie distribuit şi în

premisa majoră unde are locul şi funcţia subiectului logic al premisei. Şi deci premisa majoră trebuie să fie universală.

Aplicând aceste reguli putem afla cu uşurinţă care sunt modurile valide ale acestei figuri (exerciţiu).

Reguli specifice modurilor valide din figura a III-a

R1. Premisa minoră este afirmativă.

R2. Concluzia este particulară.

Demonstraţia regulii R1. (Similară demonstraţie R1 de la figura I) (Exerciţiu).

Demonstraţia regulii R2.

Premisa minoră fiind afirmativă, termenul logic *S*, care este predicatul premisei minore, este nedistribuit şi deci nu poate să apară ca distribuit în concluzie (cf. regulii generale 3).

Reguli specifice modurilor din figura a IV-a

Aceste reguli au o formulare condiţională, fiind restricţii relaţionate de următorul fel:

R1. Dacă premisa majoră este afirmativă, atunci premisa minoră este universală.

R2. Dacă premisa minoră este afirmativă, atunci concluzia este particulară.

R3. Dacă o premisă este negativă, atunci premisa majoră este universală.

Demonstraţia regulii R1.

Dacă premisa majoră este afirmativă, atunci termenul mediu este nedistribuit (pentru că *M* este predicat de afirmativă). Şi deci *M* trebuie să fie distribuit în premisa minoră. Aşadar, premisa minoră trebuie să fie universală (pentru că *M* este subiect în această premisă, iar subiectul este distribuit doar în propoziţii universale).

Demonstraţia regulii R2 (Similară demonstraţiei R1 de la figura a III-a) (Exerciţiu).

Demonstraţia regulii R3

Dacă o premisă este negativă, atunci concluzia va fi negativă şi deci *P* este un termen logic distribuit în concluzie. El trebuie să fie distribuit şi în premisa majoră (în acord cu regula generală 3), unde ocupă locul şi funcţia subiectului logic. Aşadar, premisa majoră trebuie să fie universală.

II. Metoda reducerii

Dacă în inventarierea modurilor valide în paragraful precedent am apelat la regulile generale ale validităţii silogismelor, de data aceasta vom avea în vedere relaţiile dintre modurile diferitelor figuri silogistice. Aşa cum am constatat în paragraful dedicat inferenţelor imediate, prin conversiunea unei propoziţii *SeP* vom obţine o propoziţie *PeS*, echivalentă primeia. Iar dacă un mod care conţine în concluzie propoziţia *SeP* este unul valid, atunci va fi valid şi modul care se obţine din primul înlocuind *SeP* cu *PeS*. La fel putem spune şi despre premise. Aceste corelaţii care se pot stabili între moduri îngăduie *justificarea* validităţii unor moduri *asumând* ca valide alte moduri. Aristotel a presupus ca valide modurile figurii I, pe care le-a numit „moduri perfecte"[30], date fiind următoarele particularităţi: au concluzii de toate cele patru tipuri (A, E, I, O), termenii extremi (*S*, *P*) au în concluzie aceleaşi funcţii pe care le au în premise, structura figurii I redă, în esenţă, structura unei demonstraţii.

Demonstrarea validităţii unor moduri prin reducerea lor la alte moduri considerate valide se poate face fie ca reducere directă, fie ca reducere indirectă. Să le considerăm pe rând.

---

[30] Aristotel, *Analitica primă*, I, 1, 24 b.

II. A. Metoda reducerii directe

Reducerea directă *asumă* ca valide cele şase moduri din figura I (BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO, BARBARI şi CELARONT). Demonstrarea validităţii unui mod presupus nevalid (fig. II-IV) înseamnă:

a) din premisele modului „nevalid" deducem premisele unui mod valid din fig. I.

b) concluziile celor două moduri sunt identice sau concluzia modului „nevalid" este deductibilă din concluzia celui valid.

Exemplu.

Să demonstrăm validitatea modului „nevalid" FELAPTON (fig. a III-a)

MeP		MeP
MaS	$\xrightarrow{c}$	SiM
SoP		SoP
FELAPTON		FERIO

Reducerea lui FELAPTON o facem la FERIO (fig. I), deoarece premisele majore ale celor două moduri coincid, iar din premisa minoră a lui FELAPTON, prin conversiune prin accident, obţinem premisa minoră a modului FERIO. Cum concluziile celor două moduri coincid, în acord cu exigenţele a) şi b) ale reducerii directe, rezultă că modul FELAPTON este un mod valid.

Alteori, pentru a face reducerea directă sunt necesare mai multe operaţii. Să demonstrăm acum validitatea modului CAMESTRES (fig. a II-a).

PaM		PaM	↘↗	MeS
SeM	$\xrightarrow{c}$	MeS	↗↘	PaM
SeP		SeP		PeS

Observăm, mai întâi, că pentru a obţine structura figurii 1 trebuie să convertim (simplu) premisa minoră, apoi schimbăm reciproc locul premiselor: premisa majoră devine premisă minoră (şi deci conţine subiectul concluziei) iar premisa minoră devine premisă majoră (şi deci conţine predicatul concluziei). Modul astfel obţinut este modul valid CELARENT, din figura 1. În fine, în acord cu b) de mai sus, din concluzia modului CELARENT, *SeP*, obţinem, prin conversiune (simplă) concluzia modului CAMESTRES.

În esenţă, reducerea directă este o argumentare de următorul gen. Modul a cărui validitate trebuie demonstrată este un mod cu premise adevărate şi trebuie arătat că concluzia sa rezultă în mod necesar din premise. Pentru aceasta, din premisele acestui mod (considerate adevărate) se obţin, prin inferenţe imediate *valide*, premisele unui mod valid din figura I (şi care vor fi de asemenea adevărate). Cum modul din figura I este asumat ca valid, deducem, în acord cu conceptul validităţii, că din premisele lui adevărate obţinem o concluzie în mod necesar adevărată. Din această concluzie a modului valid din figura I prin inferenţe imediate vom obţine concluzia modului presupus nevalid (în cazul în care cele două concluzii nu sunt identice). Şi deci şi concluzia modului „de demonstrat" este în mod necesar adevărată.

Felul în care, dat fiind un mod din figurile II – IV, construim un mod valid din figura I este sugerat de unele *consoane* din cuvintele mnemotehnice, astfel:

a) Consoana iniţială din denumirea unui mod din fig II – IV, a cărui validitate trebuie demonstrată, coincide cu consoana iniţială a modului respectiv din figura I la care facem reducerea. Exemple: pe CAMESTRES l-am redus la CELARENT, pe FELAPTON la FERIO, pe DARAPTI îl vom reduce la DARII etc.

b) S din denumirea unui mod din fig. II – IV indică o *conversiune simplă* a premisei denotate de vocala imediat precedentă. În demonstrarea validităţii lui CAMESTRES am făcut

o conversiune simplă a premisei minore. În demonstrarea validității lui CESARE vom face o conversiune simplă a premisei majore etc.

c) P din denumirea unui mod din fig. II – IV indică o *conversiune prin accident* (*per accidens*) a propoziției denotate de vocala imediat precedentă. În DARAPTI (fig a III-a) vom înlocui premisa minoră *MaS* cu *SiM*, obținută prin conversiune prin accident din *MaS*. În FESAPO (fig. a IV-a) la fel.

d) M ne indică o perMutare a premiselor (*mutatio praemissarum*) (CAMESTRES, CAMENES, DISAMIS, BRAMANTIP, DIMARIS).

Această cale de demonstrare a validității unui mod poate fi însă integral transpusă simbolic. Pentru a prezenta simbolic reducerea lui FELAPTON (fig. a III-a) la FERIO (fig. I), din exemplul nostru de mai sus, procedăm în felul următor. Redăm mai întâi *implicativ* modul FERIO: $(MeP \wedge SiM) \supset SoP$. Apoi, în locul propozițiilor *MeP, SiM, SoP* vom pune variabilele propoziționale[31] *p, q* şi *r*. Conversiunea premisei minore *MaS*, a lui FELAPTON, în *SiM* o vom reda în forma implicației $s \supset q$. Iar modul FELAPTON (implicativ: $(MeP \wedge MaS) \supset SoP$) îl vom reda corespunzător, prin $(p \wedge s) \supset r$. Reducerea directă a lui FELAPTON la FERIO înseamnă: „Dacă FERIO este un mod valid, (atunci dacă implicația $MaS \supset SiM$ este adevărată), atunci FELAPTON este un mod valid". Redată în simbolismul logicii propoziționale această idee este: $[(p \wedge q) \supset r] \supset \{(s \supset q) \supset [(p \wedge s) \supset r]\}$. Aceasta este o formulă validă[32] a logicii propozițiilor. Însă $(p \wedge q) \supset r$ este adevărată (deoarece exprimă, prin asumpție, validitatea modului FERIO) şi deci, prin *modus ponens*, vom obține: $(s \supset q) \supset [(p \wedge s) \supset r]$. Acum, cum $s \supset q$ este adevărată (pentru că exprimă conversiunea $MaS \xrightarrow{c} SiM$), printr-o nouă aplicarea a regulii *modus ponens*, obținem $(p \wedge s) \supset r$; formulă care exprimă validitatea modului FELAPTON.

La fel putem proceda cu orice altă reducere directă a vreunui mod din figurile II – IV la un mod din figura I. Reducerea lui DARAPTI (fig. a III-a) la DARII (fig. I), de exemplu, o vom reda prin aceaşi formulă, iar cea a lui BRAMANTIP (fig. a IV-a) la BARBARA (fig. I) prin: $[(p \wedge q) \supset r] \supset \{(r \supset s) \supset [(p \wedge q) \supset s]\}$, în acest din urmă caz redând modul BARBARA prin $(MaS \wedge PaM) \supset PaS$ (exercițiu).

II. B. Metoda reducerii indirecte (reductio ad absurdum)

A demonstra prin *reducere la absurd* validitatea unui mod silogistic înseamnă: *a presupune că modul respectiv este nevalid, iar dacă din această presupunere rezultă o contradicție (sau o contrarietate), atunci presupunerea ca atare trebuie respinsă, aceasta echivalând cu o demonstrație de validitate a modului respectiv.*

Demonstrația prin reducere la absurd este reclamată de faptul că anumite moduri nu pot fi reduse direct la un mod valid de figura I. BOCARDO (fig. a III-a), de exemplu, nu poate fi reconstruit în forma unui mod din figura I, pentru că premisa minoră, *MaS*, prin conversiune (pentru ca *M* să fie predicat în minoră) devine *SiM*, care împreună cu *MoP* nu poate forma un mod valid (fiind două premise particulare). Nici dacă schimbăm locul premiselor lui BOCARDO nu putem construi un mod din fig. I, deoarece, în acest caz, premisa (acum) minoră *MoP* ar trebui convertită, iar aceste propoziții nu se convertesc.

Şi în cazul reducerii la absurd sunt presupuse ca valide toate cele şase moduri ale figurii I. Să demonstrăm acum, de exemplu, validitatea modului BOCARDO:

---

[31] Înaintea parcurgerii expunerii care urmează cititorul este invitat să parcurgă paragrafele 2.1.1, 2.1.2 şi 2.1.4.

[32] Pentru verificarea validității ei cititorul poate apela la oricare din procedeele descrise în paragraful 2.1.4. Prin operativitatea sa, se recomandă *Reductio test*.

$$\begin{array}{c} MoP \\ MaS \\ \hline SoP \end{array}$$

Presupunem că modul BOCARDO este nevalid. Aceasta înseamnă că premisele acestui mod sunt adevărate iar concluzia falsă. Însă din falsitatea propoziției *SoP* conchidem asupra adevărului contradictoriei sale, *SaP*. Cu propoziția *SaP* şi cu una din premisele modului BOCARDO construim un mod din fig. I. Este uşor de văzut că împreună cu premisa minoră obținem modul

$$\begin{array}{c} SaP \\ MaS \\ \hline MaP, \end{array}$$

Adică BARBARA din fig. I, unde *S* este acum termen mediu. Cum *SaP* este adevărată (fiind contradictoria unei propoziții false), *MaS* este adevărată (prin presupoziție) iar modul BARBARA este valid (prin presupoziție) deducem că propoziția din concluzie, *MaP*, este, de asemenea, adevărată. Însă propozițiile *MaP* (concluzia modului BARBARA de mai sus) şi *MoP* (premisa majoră a modului BAROCO) nu pot fi simultan adevărate, deoarece sunt în raport de contradicție. Cum *MoP* este adevărată prin presupoziție, rezultă că *MaP* este falsă. De aici deducem că modul (valid!) BARBARA are concluzie falsă, ceea ce înseamnă că cel puțin una din premise este falsă. Cum *MaS* este adevărată (prin presupoziție) rezultă că falsă este premisa majoră a acestui mod, *SaP*. Însă din falsitatea lui *SaP* conchidem asupra adevărului contradictoriei ei, *SoP*, adică tocmai asupra adevărului concluziei modului a cărui validitate trebuie demonstrată (BOCARDO). Aşadar, dacă premisele modului BOCARDO sunt adevărate, atunci şi concluzia lui este în mod necesar adevărată. Şi deci modul este valid.

Remarci.

1. În mod similar demonstrăm validitatea modului BAROCO (fig. a II-a). Consoana „C" din cuvintele BOCARDO şi BAROCO indică faptul că în cursul demonstrației prin reducere la absurd contradictoria concluziei ia locul premisei denotate de vocala imediat precedentă.

2. Prin reducere la absurd se poate demonstra validitatea oricărui mod (valid!) din figurile II – IV, nu doar a celor două moduri mai sus menționate. Însă, unele demonstrații prin reducere la absurd se bazează nu pe raportul de contradicție, ci pe cel de *contrarietate,* dintre propoziții, fără ca prin aceasta demonstrația să fie alterată. De exemplu, în demonstrarea validității lui FELAPTON, propoziția *SaP* (contradictoria concluziei, *SoP*) formează împreună cu premisa minoră a modului FELAPTON (*MaS*) modul BARBARA (cu concluzia *MaP*). Însă *MaP* şi *MeP* (premisa majoră a lui FELAPTON) se află în raport de contrarietate (detaliați demonstrația).

Aşa cum în demonstrația prin reducere directă întreaga demonstrație a putut fi redată cu simbolismul logicii formale a propozițiilor, tot astfel reducerea indirectă poate fi exprimată prin formule valide ale logicii propozițiilor. În demonstrația de mai sus, de exemplu, validitatea lui BOCARDO a fost demonstrată asumând validitatea modului nou construit, BARBARA. În expresia lui implicativă, am obținut $(SaP \wedge MaS) \supset MaP$. Dacă redăm această formulă cu ajutorul variabilelor propoziționale *p, q* şi *r*, obținem $(p \wedge q) \supset r$. Însă, în logica propozițiilor această formulă este echivalentă cu $(\neg r \wedge q) \supset \neg p$, adică $(\neg MaP \wedge MaS) \supset \neg SaP$, adică $(MoP \wedge MaS) \supset SoP$ (expresia implicativă a modului

BOCARDO). Aşadar, dată fiind validitatea modului BARBARA, validitatea modului BOCARDO poate fi justificată pe baza următoarei echivalențe a logicii propozițiilor:

$$[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(\neg r \wedge q) \supset \neg p],$$

expresie care redă simbolic structura demonstrației prin reducere la absurd.

Remarcă. Pentru demonstrarea validității lui BAROCO vom folosi o echivalență similară: $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(p \wedge \neg r) \supset \neg q]$. Echivalențele care intervin în acest tip de demonstrații sunt, aşadar:

$$[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(p \wedge \neg r) \supset \neg q] \equiv [(\neg r \wedge q) \supset \neg p]$$

Exerciții

1. Este adevărată următoarea propoziție?
   Numărul termenilor distribuiți în premise este strict mai mare decât numărul termenilor distribuiți în concluzie.
   (Argumentați).
2. Să se demonstreze că doar un mod valid din figura I admite o concluzie *SaP*.
3. Să se demonstreze că dacă concluzia unui mod valid este o propoziție universală, termenul mediu (*M*) nu poate fi distribuit în premise decât o dată.
4. Ce notă distinctivă are un silogism valid în care doar *M* este distribuit?
5. Să se demonstreze că modul EI / O este valid în orice figură.
6. Să se demonstreze că modul IE / O nu este valid în nici o figură.
7. Ce putem spune despre premisa majoră a unui mod valid în care premisa minoră este negativă? (Argument)
8. De ce într-un mod valid din figurile I şi IV, propozițiile particular negative nu pot fi premise?
9. Care este modul valid care are următoarea determinație: *P* este distribuit în premisă şi nedistribuit în concluzie?
10. Ce putem spune despre premisa minoră a unui silogism valid în care *P* ocupă locul şi funcția predicatului logic în premisa majoră?
11. Fie două silogisme valide aflate în aceeaşi figură, care au o premisă comună iar celelalte premise sunt în raport de contradicție. Ce fel de propoziție este premisa comună? (Argumentați).
12. Să se demonstreze că dacă două silogisme au o premisă comună iar celelalte premise sunt în raport de contradicție, atunci concluziile lor sunt propoziții particulare.
13. Determinați toate modurile valide care satisfac următoarea condiție: conțin numai doi termeni distribuiți fiecare de două ori.
14. Determinați modurile valide care satisfac următoarea condiție: sunt moduri ale aceleiaşi figuri iar premisele lor majore sunt subcontrare.
15. Determinați modul valid care corespunde următoarei descrieri: premisa majoră este afirmativă, *P* este distribuit în concluzie, *S* este nedistribuit în premisa minoră.
16. De ce nu este valid un mod în care premisele admit conversiuni simple iar premisa majoră este afirmativă?
17. Să se demonstreze prin reducere directă validitatea următoarelor moduri: CESARE (II), FESTINO (II), DARAPTI (III), FERISON (III), FESAPO (IV), DIMARIS (IV).
18. Detreminați acele formule valide ale logicii propozițiilor care exprimă reducerea directă a modurilor din exercițiul 17.
19. Să se demonstreze prin reducere indirectă (*reductio ad absurdum*) validitatea modurilor din figurile III şi IV.

20. Să se arate, pe baza echivalențelor $\mathcal{L}_p$, că modurile DARII și FERIO (fig. I) pot fi reduse *indirect* la modurile CAMESTRES, respectiv CESARE (fig. a II-a).
21. Să se arate că modurile CAMESTRES și CESARE pot fi reduse *direct* la modul CELARENT (fig. I).

Indicație. (20 și 21). $(MaP \wedge SiM) \supset SiP$ (DARII) îl redăm prin $(p \wedge q) \supset r$. De unde, pe baza echivalenței $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(p \wedge \neg r) \supset \neg q]$ obținem CAMESTRES, din care obținem apoi, direct, CELARENT. Prin substituții adecvate de termeni obținem modul în forma lui standard.

1.3.2.3. Moduri silogistice indirecte

Un mod silogistic se numește *indirect* dacă ordinea termenilor în concluzie este inversată. În unele cazuri, anumite combinații de premise pot figura doar în moduri indirecte. Dacă, de exemplu, premisa minoră a unui mod silogistic din figura I este universal negativă, atunci, indirect, nu putem construi un mod valid. De altfel, acest lucru este respins chiar de una din regulile specifice acestei figuri: premisa minoră trebuie să fie afirmativă. Dar dacă vom schimba reciproc ordinea termenilor din concluzie, atunci construcția unui mod valid este posibilă. Din premisele *MaP* și *SeM* putem obține concluzia *PoS*. Așadar, vom obține modul $(MaP \wedge SeM) \supset PoS$, mod valid al fig. I. Tot în fig I premisa majoră poate fi *MiP* (de ce?) și astfel obținem modul valid $(MiP \wedge SeM) \supset PoS$. Avem așadar următoarele două moduri valide indirecte ale fig. I:

MaP		*MiP*	
SeM	(FAPESMO)	*SeM*	(FRISESOMORUM)
PoS		*PoS*	

Similar putem obține și alte moduri indirecte valide în figura I, prin conversiunea concluziei unui mod direct:

Din	*MaP*			*MaP*	
	SaM	(BARBARA)	obținem	*SaM*	(BARALIPTON)
	SaP			*PiS*	
Din	*MeP*			*MeP*	
	SaM	(CELARENT)	obținem	*SaM*	(CELANTES)
	SeP			*PeS*	
Din	*MaP*			*MaP*	
	SiM	(DARII)	obținem	*SiM*	(DABITIS)
	SiP			*PiS*	

Remarcă. Există o deosebire între ultimele trei moduri indirecte și primele două. BARALIPTON,CELANTES și DABITIS sunt valide și ca moduri directe. În schimb, FAPESMO și FRISESOMORUM nu.

Similar putem obţine modurile valide indirecte ale figurii a II-a. Şi aici avem un mod indirect care nu este valid ca mod direct: FIRESMO (de ce?). Corespunzător, în figura a III-a, cele două moduri indirecte, nevalide ca moduri directe, sunt FAPEMO şi FRISEMO.[33]

Remarcă. Modurile indirecte ale fig. I pot fi transformate în moduri valide directe ale fig. a IV-a (corespondenţă indicată de prima consoană din cuvântul mnemotehnic: BARALIPTON devine BRAMANTIP etc). (Exerciţiu).

1.3.2.4. Silogistica cu termeni negativi

Aşa cum am văzut în cazul inferenţelor imediate, prin aplicarea repetată a conversiunii şi obversiunii putem obţine şi propoziţii care conţin *termeni negaţi*. Şi astfel, dacă propoziţia iniţială era adevărată, atunci şi propoziţiile derivate sunt adevărate. Şi în cazul inferenţelor mediate întâlnim cazuri similare. Să dăm câteva exemple.

$$
\text{a)}\ \begin{array}{c} MaP \\ SaM \\ \hline SaP \end{array} \qquad \begin{array}{c} Me\bar{P} \\ SaM \\ \hline Se\bar{P} \end{array} \qquad\qquad \text{b)}\ \begin{array}{c} MaP \\ SaM \\ \hline SaP \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bar{P}a\bar{M} \\ SaM \\ \hline SaP \end{array} \qquad\qquad \text{c)}\ \begin{array}{c} MaP \\ SaM \\ \hline SaP \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bar{M}aP \\ Sa\bar{M} \\ \hline SaP \end{array}
$$

Cum modul BARBARA este un mod valid al figurii I, şi modul obţinut din el prin obvertirea premisei majore şi a concluziei este tot un mod valid (cazul a). Căci dacă nici un *M* nu este non *P* şi toţi *S* sunt *M*, atunci nici un *S* nu este non *P*. În cazul b) premisa majoră a modului BARBARA a fost înlocuită cu contrapusa ei totală (echivalentă), obţinând astfel tot un mod valid. Însă, din modul valid BARBARA, prin *substituirea* termenului mediu cu negatul său, $\bar{M}$, putem obţine, de asemenea, un mod valid (cazul c).

Substituirea termenilor logici în silogistică nu se restrânge însă la substituirea unui termen arbitrar cu negatul său (sau invers), ci un termen logic se poate substitui cu un alt termen logic. Să luăm două exemple. Fie modul valid FELAPTON (fig. a III-a).

$$
\text{d)}\ \begin{array}{c} MeP \\ MaS \\ \hline SoP \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bar{P}eM \\ \bar{P}aS \\ \hline SoM \end{array} \qquad \begin{array}{c} (M/\bar{P}) \\ (P/M) \\ \end{array} \qquad\qquad \text{e)}\ \begin{array}{c} \bar{P}e\bar{M} \\ \bar{P}aS \\ \hline So\bar{M} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (M/\bar{P}) \\ (P/\bar{M}) \\ \end{array}
$$

În cazul d) din FELAPTON am obţinut un alt mod, tot din figura a III-a, prin substituirea lui *M* cu $\bar{P}$ ($M/\bar{P}$) şi a lui *P* cu *M* (*P/M*). Similar, în e) am făcut următoarele substituţii: $M/\bar{P}$ şi $P/\bar{M}$, obţinând, de asemenea, un mod valid. În felul acesta, prin substituţii corecte, din moduri valide obţinem alte moduri valide.

Remarcă 1. Substituţia trebuie să fie corectă, în următorul sens:

a) Dacă substituim un termen logic cu un alt termen logic (negat sau nenegat), atunci substituţia trebuie să o facem în toate ocurenţele (apariţiile) termenului respectiv. Cum în orice mod silogistic valid fiecare termen are două ocurenţe distincte, tot de două ori îl vom substitui cu noul termen ales.

b) Dacă într-un mod silogistic termenul pe care vrem să-l substituim apare o dată negat şi o dată nenegat, atunci în substituţie vom ţine seamă de „jocul" negaţiilor logice.

---

[33] Chiar Aristotel menţionează existenţa modurilor indirecte valide în situaţiile în care ca moduri directe nu sunt valide (*An. Pr.*, I, 7 29a), deşi le menţionează doar pe cele din fig. I. Celelalte moduri (FIRESMO, FAPEMO, FRISEMO) sunt specificate mult mai târziu, de către *Iulius Pacius* (1550-1635).

Exemplu:

$\overline{P}a\overline{M}$	$Ma\overline{P}$	$(\overline{P}/M)$
SoP	$So\overline{M}$	(M/P)
SoM	SoP	

Din primul mod l-am obținut pe al doilea prin substituțiile indicate în dreapta. Cum în modul inițial termenul P apare o dată negat și o dată nenegat, prin substituirea lui $\overline{P}$ cu M, în premisa minoră în loc de P vom pune $\overline{M}$. Similar, cum în loc de M punem P (a doua substituție) în concluzie, rezultă că în premisa majoră în loc de $\overline{M}$ vom pune $\overline{P}$.

c) Orice termen logic se poate substitui cu orice termen logic, operație care poate fi executată simultan pentru toți cei trei termeni logici, cu condiția că modul care rezultă să aibe tot trei termeni logici (Nu putem substitui într-un mod pe S cu P și atât. În acest caz modul ar avea doar doi termeni logici).

Remarcă 2. Termenii logici, prin definiție, denotă clase de obiecte. Întrucât în cele ce urmează operăm cu termeni logici și negațiile lor, pentru ca toate derivările de moduri valide să fie logic corecte va trebui să introducem următoarea asumpție: *atât clasele de obiecte desemnate de S, M, P cât și complementarele lor,* $\overline{S}, \overline{M}, \overline{P}$ *trebuie să fie nevide.*[34]
Echivalent: o dată specificat universul de discurs, excludem posibilitatea ca un termen logic să denote clasa universală (i.e. întreg universul de discurs) sau clasa vidă.

Pe baza operației substituției termenilor logici și având în vedere asumpția menționată, să vedem acum câteva cazuri de moduri silogistice valide care conțin termeni negați.[35]

Să presupunem în cele ce urmează că modurile analizate sunt redate în formă implicativă.

Figura I

1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; BARBARA

2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; CELARENT

Acest mod se obține din BARBARA prin substituția $P/\overline{P}$: $(Ma\overline{P} \wedge SaM) \supset Sa\overline{P}$, echivalent $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$ (prin obvertirea premisei majore și a concluziei și eliminarea dublei negații, pe baza: complementara complementariei unei clase este clasa însăși).

3. $(MaP \wedge SiM) \supset SiP$; DARII

Modul DARII se poate obține tot din BARBARA, prin utilizarea echivalențelor menționate la reducerea indirectă și prin substituții adecvate de termeni logici. Fie următoarea echivalență a $\mathcal{L}_p$: $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(p \wedge \neg r) \supset \neg q]$. Să presupunem acum că echivalentul stâng, $(p \wedge q) \supset r$, reprezintă modul BARBARA. Corespunzător, vom avea $[(MaP \wedge SaM) \supset SaP] \equiv [(MaP \wedge \neg SaP) \supset \neg SaM]$. Membrul drept al echivalenței este echivalent, mai departe, cu $(MaP \wedge SoP) \supset SoM$. Însă premisa majoră a acestui mod, MaP, este echivalentă cu contrapusa ei totală $\overline{P}a\overline{M}$. Înlocuind-o în modul astfel obținut avem: $(\overline{P}a\overline{M} \wedge SoP) \supset SoM$. Prin substituțiile $\overline{P}/M$ și $M/\overline{P}$ obținem $(Ma\overline{\overline{P}} \wedge So\overline{M}) \supset So\overline{P}$, echivalent $(Ma\overline{\overline{P}} \wedge Si\overline{\overline{M}}) \supset Si\overline{\overline{P}}$, echivalent $(MaP \wedge SiM) \supset SiP$.

[34] Cazurile de viditate a unor termeni și problema validității vor fi tratate în paragraful următor.

[35] Expunerea de față procedează deductiv, în sensul derivării tuturor modurilor (cu termeni negați sau nu) din modul valid BARBARA.

4. $(MeP \wedge SiM) \supset SoP$; FERIO

FERIO se obține din DARII prin substituția $P/\overline{P}$.

5. $(MaP \wedge SaM) \supset SiP$; BARBARI

6. $(MeP \wedge SaM) \supset SoP$; CELARONT

Aceste două moduri sunt subalternele modurilor BARBARA și CELARENT.

7. $(MaP \wedge SaM) \supset \overline{S}i\overline{P}$ ($S\ddot{i}P$)[36]; BARBARIJ

Acest mod poate fi derivat din modul BARBARA în felul următor: din concluzia SaP a modului BARBARA obținem, prin derivări succesive, inversa $\overline{S}i\overline{P}$. Și deci, cum SaP este adevărată, rezultă că și $\overline{S}i\overline{P}$ este adevărată. Am obținut astfel un mod valid din figura I în care în *concluzie ambii termeni sunt negați*, respectiv modul BARBARIJ.

Remarcă. Denumirile acestor moduri aparțin lui A. Menne.[37] Întrucât ele sunt legate de notația autorului, în cele ce urmează vom prelua această notație. Respectiv, de ori câte ori operatorii intrapropoziționali a, e, i și o apar cu treme (i.e. ä, ë, ï, ö) vom avea în vedere propozițiile corespunzătoare: A, E, I, O *în care ambii termeni sunt negați.*

8. $(MeP \wedge SaM) \supset S\ddot{o}P$; CELARÖNT

Acest mod este derivat din CELARENT. Căci SeP, concluzia lui CELARENT, fiind adevărată rezultă că și $\overline{S}o\overline{P}$ (i.e. $S\ddot{o}P$) este adevărată, deoarece se poate obține, prin derivări succesive, din SeP.

9. $(MaP \wedge SeM) \supset S\ddot{o}P$; GARDERÖNT

Demonstrarea validității acestui mod o facem pe baza validității modului CELARONT și a următoarei echivalențe a $\mathcal{L}_p$: $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(\neg r \wedge q) \supset \neg p]$, unde membrul stâng al echivalenței formalizează modul CELARONT. Avem, așadar, $[(MeP \wedge SaM) \supset SoP] \equiv [(\neg SoP \wedge SaM) \supset \neg MeP]$. Iar membrul drept este echivalent cu $(SaP \wedge SaM) \supset MiP$. Însă premisa minoră, SaM, este echivalentă cu contrapusa ei totală $\overline{M}a\overline{S}$. Și deci avem $(SaP \wedge \overline{M}a\overline{S}) \supset MiP$, echivalent $(SaP \wedge \overline{M}eS) \supset Mo\overline{P}$. De unde, prin substituțiile S/M și $\overline{M}/S$ obținem $(MaP \wedge SeM) \supset \overline{S}o\overline{P}$, adică $(MaP \wedge SeM) \supset S\ddot{o}P$.

10. $(MeP \wedge SeM) \supset S\ddot{i}P$; HELENIJ

Acest mod poate fi obținut din GARDERÖNT prin substituția $P/\overline{P}$.

11. $(MiP \wedge SeM) \supset S\ddot{o}P$; LIBERÖ

Modul LIBERÖ se obține din FERIO astfel: convertim ambele premise, le schimbăm reciproc locul, înlocuim concluzia SoP a lui FERIO cu contrapusa ei totală $\overline{P}o\overline{S}$ și executăm substituțiile: S/P, P/S.

12. $(MoP \wedge SeM) \supset S\ddot{i}P$; NOVERIJ

Acest mod se obține din modul precedent, LIBERÖ, prin substituția $P/\overline{P}$.

Constatăm așadar că dacă avem în vedere și moduri silogistice în care apar termeni negați, atunci numărul acestora crește. Mai exact, am constatat că numai în figura I, la cele 6 moduri valide cu termeni pozitivi, se mai adaugă încă 6 moduri valide, în care concluziile au termeni negați. În total, așadar, am obținut deja, doar în figura I, 12 moduri valide. Apoi, validitatea unui mod se conservă dacă în locul propozițiilor care-l compun vom pune inversele

---

[36] A se remarca deosebirea dintre o *propoziție cu termeni negați* și *negația unei propoziții*. $\overline{S}i\overline{P}$, de exemplu, este o particular afirmativă cu termeni negați, pe când negația unei propoziții particulare afirmative este o propoziție universal negativă.

[37] Albert Menne, *Logik und Existenz*, Meisenheim, 1954; comp. și A. Menne, *Einführung in die Logik*, 5. Aufl, Francke Verlag, Tübingen u. Basel, 1993.

lor. Procedând astfel obținem încă 12 moduri valide [38]; în total 24. La acestea se mai adaugă 12 moduri valide în care o premisă este inversa premisei inițiale și încă 12 moduri valide în care cealaltă premisă este inversa premisei inițiale. Așadar, numărul total al modurilor valide din figura I este 48. Toate aceste moduri pot fi derivate, așa cum am procedat mai sus, din următoarele 8: BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO, GARDERÖNT, HELENIJ, LIBERÖ, NOVERIJ.

Cu toate că numărul modurilor valide este destul de mare, anumite combinații de premise nu dau moduri valide: ao, eo, ia, oa [39] și inversele lor.

Figura a II-a

În silogistica cu termeni pozitivi, în figura a II-a, am găsit 6 moduri valide: CESARE, FESTINO, CAMESTRES, BAROCO, CESARO și CAMESTROP. Așa cum am arătat în paragraful precedent, validitatea acestor moduri poate fi demonstrată prin reducerea directă sau indirectă la un mod valid din figura I. Să vedem acum celelalte 6 moduri valide, care au *concluzia cu termeni negați*, și cum pot fi ele deduse.

1. $(PeM \wedge SaM) \supset S\ddot{o}P$; CESARÖ

Validitatea acestui mod rezultă din validitatea modului CESARE, deoarece concluzia SeP admite inversa $\overline{S}o\overline{P}$ (exercițiu).

2. $(PaM \wedge SeM) \supset S\ddot{o}P$; CAMESTRÖP (similar)

3. $(PeM \wedge SeM) \supset S\ddot{\imath}P$; HESELIJ

Acest mod se obține din HELENIJ (fig I) prin conversiunea premisei majore.

4. $(PiM \wedge SeM) \supset S\ddot{o}P$; LISTERÖ

Se obține din LIBERÖ (fig. I) prin conversiunea premisei majore.

5. $(PaM \wedge SaM) \supset S\ddot{\imath}P$; GASANIJN

Demonstrarea validității acestui mod o putem face reducându-l la un mod valid din fig. I. Mai exact, GASANIJN se reduce la HELENIJ în felul următor: obvertim premisele, convertim premisa majoră și substituim $\overline{M}/M$.

6. $(PoM \wedge SaM) \supset$ SöP; MOSALÖN

Acest mod poate fi redus la LIBERÖ (fig. 1), astfel: prin contrapoziție premisa majoră, PoM, devine $\overline{M}iP$, iar SaM, prin obversiune, devine $Se\overline{M}$. Aplicăm apoi substituția $\overline{M}/M$.

Similar figurii I, numărul total al modurilor valide din figura a II-a este 48.

Figura a III-a

În silogistica cu termeni pozitivi, în figura a III-a, am descoperit 6 moduri valide: DARAPTI, DISAMIS, DATISI, FELAPTON, BOCARDO, FERISON. Acestor moduri li se adaugă altele 6, în care *concluzia are termenii negați*.

1. $(MaP \wedge MeS) \supset S\ddot{o}P$; GALESTÖ
2. $(MeP \wedge MeS) \supset S\ddot{\imath}P$; HELESTIJ
3. $(MiP \wedge MeS) \supset S\ddot{o}P$; LIRESÖ
4. $(MoP \wedge MeS) \supset S\ddot{\imath}P$; NOVESTIJ
5. $(MaP \wedge MoS) \supset S\ddot{o}P$; DALOSNÖ
6. $(MeP \wedge MoS) \supset S\ddot{\imath}P$; DENOSIJ

---

[38] BÄRBÄRÄ, CËLÄRËNT etc.

[39] DAvOn jEdOch nIemAls fOlgt wAs.

Justificarea validității lor o putem face, ca mai sus, deducând aceste moduri din moduri anterior demonstrate sau reducându-le la moduri anterior demonstrate (exercițiu).

Şi în acestă figură silogistică vom avea, în total, 48 de moduri.

Figura a IV-a

Cele 6 moduri valide din silogistica cu termeni pozitivi erau: BRAMANTIP, CAMENES, DIMARIS, FESAPO, FRESISON şi CAMENOP. Acestora li se adaugă următoarele 6 moduri valide, în care *concluzia are termenii negați.*

1. $(PaM \wedge MaS) \supset S\ddot{\imath}P$; BRAMANTIJP
2. $(PaM \wedge MeS) \supset S\ddot{o}P$; CAMENÖP
3. $(PaM \wedge MaS) \supset S\ddot{a}P$; BAMALÄS
4. $(PeM \wedge MeS) \supset S\ddot{\imath}P$; HESESIJ
5. $(PiM \wedge MeS) \supset S\ddot{o}P$; LISTESÖ
6. $(PeM \wedge MoS) \supset S\ddot{\imath}P$; DESTOSNIJA

Similar celorlalte figuri, în figura a IV-a vom găsi 48 de moduri silogistice valide. (Verificarea validității lor: exercițiu).

În total, în cele 4 figuri silogistice vom avea aşadar $4 \times 48 = 192$ moduri valide.

Remarcă 1. După cum s-a putut constata, dacă luăm în considerare cele 192 de moduri valide (şi nu doar pe cele 24 din silogistica cu termeni pozitivi), atunci regulile specifice fiecărei figuri, menționate în paragraful anterior, nu sunt valabile pentru toate cele 48 de moduri din figura respectivă.

Remarcă 2. Prin substituirea termenilor logici, prin aplicarea inferențelor imediate şi prin considerarea inverselor propozițiilor, putem proceda deductiv, reducând (sau deducând) unele moduri la (din) altele. Am luat mai sus, ca punct de plecare, doar modul valid BARBARA (fig. I). Justificarea validității unui mod arbitrar este însă greoaie, dat fiind faptul că există 192 de moduri valide. Şi mai dificilă ar fi operarea cu cuvinte mnemotehnice. De aceea e mult mai indicat să considerăm câteva moduri valide şi, corespunzător, să indicăm regulile de derivare ale tuturor celorlalte moduri. Pentru aceasta vom proceda în felul următor.

1. Asumăm ca valide următoarele moduri din figura I: BARBARA, DARII, GARDERÖNT şi MIJLADIJ. Acest din urmă mod este: $(M\ddot{\imath}P \wedge SaM) \supset S\ddot{\imath}P$.

Alegerea acestor moduri a avut în vedere *cantitatea* propozițiilor care compun un mod valid. Avem astfel, următoarele 4 situații:

a) Dacă modul a cărui validitate vrem să o demonstrăm are atât premisele cât şi concluzia propoziții universale, atunci îl reducem la unul dintre cele patru moduri care conține doar propoziții universale, adică la BARBARA.

b) Dacă modul de demonstrat are premise universale şi concluzia particulară, atunci îl reducem la GARDERÖNT.

c) Dacă premisa majoră este universală iar cea minoră este particulară, atunci concluzia este particulară şi deci vom reduce acest mod la DARII.

d) Dacă premisa majoră este particulară iar cea minoră este universală, concluzia va fi particulară şi acest mod va fi redus la MIJLADIJ.

2. Menționăm regulile derivării modurilor silogistice, asumată fiind validitatea celor 4 moduri de mai sus:

R1. Orice mod silogistic valid se poate reduce la un mod valid din figura I prin conversiunea premiselor *e, ë, i, ï* şi prin contrapunerea premiselor *a, ä, o, ö*.

R2. Orice mod silogistic de figura I rămâne valid dacă predicatul premisei majore şi predicatul concluziei sau subiectul premisei minore şi subiectul concluziei sunt termeni logici negaţi simultan. (Ambele operaţii pot fi executate în acelaşi timp).

R3. (*regula inversiunii*). Orice mod silogistic rămâne valid dacă toate cele trei propoziţii care-l compun sunt înlocuite prin inversele lor.

R4. Orice mod silogistic cu concluzie *a* sau *ä* rămâne valid dacă în locul oricărei concluzii se trec propoziţii *i* sau *ï*. Similar, dacă concluzia unui mod valid este *e* sau *ë*, acesta rămâne valid dacă în locul lui *e* sau *ë* se trece oricare din propoziţiile *o, ö.*

Exemplu.

Vrem să verificăm validitatea următorului silogism: *Unii non S nu sunt non P, pentru că toţi S sunt non M iar toţi M sunt P.*

Redat schematic, acesta este următorul mod: $(MaP \wedge Sa\overline{M}) \supset \overline{S}o\overline{P}$. Cum premisele sunt universale iar concluzia este particulară, vom reduce acest mod la GARDERÖNT. Pentru aceasta este sufcient să obvertim premisa minoră şi obţinem $(MaP \wedge SeM) \supset \overline{S}o\overline{P}$ (*SöP*), adică GARDERÖNT.

Exerciţii

1. Argumentaţi validitatea următoarelor moduri:

$$\frac{\begin{array}{c} Pa\overline{M} \\ \overline{M}a\overline{S} \end{array}}{\overline{P}o\overline{S}}\;;\quad \frac{\begin{array}{c} \overline{P}a\overline{M} \\ Me\overline{S} \end{array}}{So\overline{P}}\;;\quad \frac{\begin{array}{c} Po\overline{M} \\ \overline{S}a\overline{M} \end{array}}{SiP}\;;\quad \frac{\begin{array}{c} Mo\overline{P} \\ Me\overline{S} \end{array}}{So\overline{P}}\;;\quad \frac{\begin{array}{c} \overline{M}a\overline{P} \\ Ma\overline{S} \end{array}}{SoP}\;;\quad \frac{\begin{array}{c} \overline{M}a\overline{P} \\ \overline{M}o\overline{S} \end{array}}{\overline{P}iS}$$

2. Care din următoarele perechi de premise pot construi moduri valide?

$$\begin{array}{cccc} \overline{M}e\overline{P} & MoP & PiM & MaP \\ SoM & SaM & SaM & \overline{S}aM \end{array}$$

3. Construiţi un mod valid pe baza următoarelor premise:
Nici un S nu este M.
Nici un M nu este P.

1.3.2.5. Silogistică modernă (Modelul predicativ Brentano)

Silogistica tradiţională, aşa cum a fost ea prezentată în paragrafele anterioare, este teoria silogismului, fundamentată de Aristotel şi perfecţionată conceptual de-a lungul timpului. O dată cu dezvoltarea aparatului formal al logicii simbolice s-a creat însă posibilitatea reinterpretării silogisticii tradiţionale, utilizând concepte noi. Altfel spus, s-a deschis posibilitatea elaborării unor *modele* ale silogisticii clasice, adică a unor teorii moderne care formalizează / axiomatizează silogistica clasică. În acest paragraf ne vom opri doar la expunerea şi analiza *modelului predicativ Brentano*.

1.3.2.5.1. Interpretarea Brentano a propoziţiilor categorice

Modelul predicativ Brentano (sau interpretarea Brentano a propoziţiilor categorice) introduce o „denivelare" în clasificarea acestor propoziţii, pe care clasificarea tradiţională nu o include. Pentru o redare formală adecvată a acestei „denivelări" va trebui, mai întâi, să introducem un aparat conceptual, fie el şi rudimentar, al logicii predicatelor. Pentru aceasta,

vom adăuga simbolurilor logicii propoziționale, utilizate în paragrafele anterioare, două categorii de simboluri, *simboluri pentru cuantificatori*: „$\forall$" (cuantificatorul universal: orice, toți, fiecare) și „$\exists$" (cuantificatorul existențial: există, cel puțin unul, unii) și *simboluri pentru variabile individuale*: x, y, z. Cu aceste simboluri putem reda extensiunea unui predicat, P, în raport cu o clasă de elemente. Adică putem spune dacă P se referă la întreaga clasă sau doar la o parte a ei. Exemple:

a) Orice x are proprietatea P: $\forall xP(x)$.

b) Nici un x n-are proprietatea P: $\neg\exists xP(x)$.

c) Unii x au proprietatea P: $\exists xP(x)$.

d) Unii x n-au proprietatea P: $\exists x\neg P(x)$.

Expresiile simbolice din dreapta le vom citi astfel: $\forall xP(x)$ = „pentru orice x $P(x)$", $\neg\exists xP(x)$ = „nu există x $P(x)$", $\exists xP(x)$ = „există x $P(x)$" iar $\exists x\neg P(x)$ = „există x non $P(x)$". x se numește *variabilă* individuală, valorile ei *posibile* sunt elementele unei clase specificate.

Firește, între cuantificatorii „$\forall$" și „$\exists$" există anumite corespondențe care permit *transformarea* unuia în celălalt. Aceste relații sunt perfect intuitive și le redăm mai jos:

1. $\forall xP(x) \equiv \neg\exists x\neg P(x)$
2. $\exists xP(x) \equiv \neg\forall x\neg P(x)$
3. $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x)$
4. $\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$,

unde „$\equiv$" exprimă *echivalența*.

Cu ajutorul acestui restrâns aparat formal putem acum reda simbolic cele patru tipuri de propoziții categorice. „Denivelarea" introdusă prin interpretarea Brentano a propozițiilor categorice rezidă în următorul fapt: propozițiile universale sunt redate *implicativ* (i.e. ipotetic), pe când cele particulare sunt redate *conjunctiv*. Adică:

SaP: Toți S sunt P: $\forall x(S(x) \supset P(x))$: $\neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

SeP: Nici un S nu este P: $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$: $\neg\exists x(S(x) \wedge P(x))$

SiP: Unii S sunt P: $\exists x(S(x) \wedge P(x))$

SoP: Unii S nu sunt P: $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

Așadar, o propoziție universal afirmativă, de exemplu, devine, în interpretarea Brentano: „Pentru orice x: dacă x este S, atunci x este P", echivalent, „Pentru orice x: $S(x)$ implică $P(x)$". În timp ce o propoziție particular afirmativă, *SiP*, devine: „Există x care sunt S și P" etc. Fie și numai din această prezentare rezultă, intuitiv, diferența dintre propozițiile universale și cele particulare: cele universale sunt enunțuri de *nonexistență*, pe când cele particulare sunt enunțuri de *existență*. Cele universale, vom spune, n-au încărcătură existențială, pe când cele particulare au încărcătură existențială. Această diferență poate fi mai bine redată simbolic dacă transformăm, echivalent, expresiile simbolice care redau propozițiile universale, înlocuind cuantificatorul „$\forall x$" cu „$\exists x$", astfel: $\forall x(S(x) \supset P(x)) \equiv \neg\exists x\neg(S(x) \supset P(x))$ (prin echivalența 1 de mai sus). Avem apoi $\neg\exists x\neg(S(x) \supset P(x)) \equiv \neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$[40]. Procedând similar, pentru propozițiile universal negative vom avea $\forall x(S(x) \supset \neg P(x)) \equiv \neg\exists x(S(x) \wedge P(x))$. Acestea sunt redate prin expresiile simbolice din dreapta enumerării de mai sus[41]. Caracterul de „nonexistență" al propozițiilor universale iese acum clar în evidență: propozițiile universale au formă *negativă* (pe când cele existențiale au formă *afirmativă*).

[40] Cf. 2.1.3.

[41] Firește, și propozițiile particulare pot fi redate utilizând cuantificatorul universal și negația (exercițiu).

Remarcă. Modelul Brentano este adesea inventariat sub sigla „modelul Boole-Brentano", dată fiind asemănarea cu interpretarea Boole a propozițiilor categorice. În esență aceasta este interpretarea Brentano, de mai sus, cu mențiunea că termenii logici *S* și *P* desemnează întotdeauna clasele corespunzătoare. Adică sunt considerați strict extensional:

SaP: Toți S sunt P: Nu există S care sunt non P: $S\overline{P} = \emptyset$.

SeP: Nici un S nu este P: Nu există S care sunt P: $SP = \emptyset$.

SiP: Unii S sunt P: Există S care sunt P: $SP \neq \emptyset$.

SoP: Unii S nu sunt P: Există S care sunt non P: $S\overline{P} \neq \emptyset$.

Şi în această redare, booleană, propozițiile universale au formă negativă. Expresia $S\overline{P} = \emptyset$, de exemplu, înseamnă: clasa *S* și clasa complementară lui *P* (adică $\overline{P}$) n-au elemente comune (i.e. intersecția lor este mulțimea vidă) etc.

„Denivelarea" existențială, introdusă de interpretarea Brentano a propozițiilor categorice, își pune incontestabil amprenta asupra validității inferențelor. Însă pentru *a decide* asupra unei formule care redă simbolic o inferență dacă este o formulă validă sau nu avem mai întâi nevoie de un *procedeu de decizie*. Pentru fragmentul de logică a predicatelor de care ne ocupăm aici[42], *procedeul formelor normale,* se recomandă ca un elegant procedeu de decizie.

1.3.2.5.2. Procedeul formelor normale în logica predicatelor monadice

Formele normale în logică sunt de o mare diversitate. Aici ne interesează doar două tipuri: *formele normale conjunctive* și *formele normale disjunctive.* Să le considerăm pe rând.

1. Formele normale conjunctive

Definiția 1. O formulă α *este în forma normală conjunctivă (abreviat* α_c*) dacă are forma unei conjuncții* $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$ $(n \geq 1)$*, în care nu apar cuantificatori negați iar într-un conjunct arbitrar cuantificatorul existențial apare cel mult o dată.*

Orice formulă a logicii predicatelor monadice poate fi transformată într-o formulă echivalentă ei, dar care satisface cerințele menționate în definiție[43]. Mai întâi vom transforma o implicație, folosind disjuncția și negația, pe baza următoarei echivalențe: $(\alpha \supset \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$, unde α și β sunt formule care conțin cuantificatori. Apoi, dacă o expresie cuantificată apare negată vom utiliza echivalențele 1-4 din 1.3.2.5.1., în așa fel încât o negație să fie situată întotdeauna *după* cuantificator. În fine, dacă obținem mai multe expresii cuantificate *existențial* iar între ele se află operatorul $\vee$, toate aceste expresii pot fi aduse sub același cuantificator existențial, dată fiind distributivitatea cuantificatorului existențial în raport cu disjuncția: $[\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)] \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

Întrucât în aceste transformări variabilele individuale n-au nici un rol, le vom elimina din formule.

O dată adus la forma normală conjunctivă, un conjunct C_i $(i = 1,\ldots,n)$ poate avea doar una din următoarele forme:

1a. $\exists\alpha$

---

[42] Acest fragment este *logica predicatelor monadice,* adică logica acelor formule în care orice simbol predicativ, *S, M, P,* este secondat de o *singură* variabilă individuală, adică: *S(x), M(y), P(z).* Acestea din urmă sunt predicate monadice, spre deosebire de cele diadice *P(x,y), Q(x,z),* triadice *P(x,y,z), Q(y,y,z)* etc. Spre deosebire de alte niveluri ale construcției logicii, logica predicatelor monadice este *decidabilă.* Adică, dată fiind orice formulă exprimată în simbolismul acestei logici, putem spune, de fiecare dată, dacă este o formulă validă sau nu.

[43] Pentru detalii tehnice, comp. 2.1.4.4.

1b. $\forall\alpha_1 \vee \forall\alpha_2 \vee ... \vee \forall\alpha_k \quad (k \geq 1)$

1c. $\exists\alpha \vee \forall\beta_1 \vee ... \vee \forall\beta_m \quad (m \geq 1)$,

unde α şi β sunt formule construite din predicate dar care nu conţin cuantificatori.

Cum decidem cu ajutorul formelor normale conjunctive?

Evident, *formula α, pe care vrem s-o testăm, este validă dacă şi numai dacă forma ei normală conjunctivă este validă. Iar o conjuncţie este validă dacă şi numai dacă fiecare conjunct al ei este valid.* Iar pentru a testa validitatea conjuncţiilor stabilim un izomorfism între cele trei categorii de formule 1a – 1c şi formule ale logicii propoziţiilor, pe baza următoarelor reguli:

R1a. $\exists\alpha$ este validă ddacă α^* este validă.

R1b. $\forall\alpha_1 \vee \forall\alpha_2 \vee ... \vee \forall\alpha_k$ este validă ddacă cel puţin o formulă α_i^* $(i = 1,...,k)$ este validă.

R1c. $\exists\alpha \vee \forall\beta_1 \vee ... \vee \forall\beta_m$ este validă ddacă una din disjuncţiile $\alpha^* \vee \beta_j^*$ $(j = 1,...,m)$ este validă, unde α^*, α_i^*, $\alpha^* \vee \beta_j^*$ sunt formule ale logicii propoziţiilor, izomorfe formulelor corespunzătoare din logica predicatelor monadice.

Aşadar, verificarea validităţii formulei α se reduce la verificarea validităţii formulei corespunzătoare ei din logica propoziţiilor.

Exemplul 1. Fie modul DISAMIS (fig. a III-a). Este acesta un mod valid? Vom răspunde la întrebare aplicând procedeul formelor normale (conjunctive).

MiP

MaS în formă implicativă $(MiP \wedge MaS) \supset SiP$

SiP

Redăm acum acest mod, pe baza interpretării Brentano a propoziţiilor care-l compun. Obţinem astfel:

$\alpha : [\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \forall x(M(x) \supset S(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$

Întrucât variabilei x nu-i asignăm nici un fel de valori, o eliminăm.

$[\exists(M \wedge P) \wedge \forall(M \supset S)] \supset \exists(S \wedge P)$

Pentru a aduce această formulă la forma normală conjunctivă transformăm implicaţia utilizând disjuncţia şi negaţia, astfel:

$\neg[\exists(M \wedge P) \wedge \forall(M \supset S)] \vee \exists(S \wedge P)$

Transformăm acum negaţia din faţa cuantificatorilor (din primii doi disjuncţi), aplicând echivalenţele 4 şi 3:

$\forall\neg(M \wedge P) \vee \exists\neg(M \supset S) \vee \exists(S \wedge P)$

Cum ultimii doi disjuncţi sunt cuantificaţi existenţial, îi putem aduce sub acelaşi cuantificator şi obţinem forma normală conjunctivă.

$\alpha_c : \forall\neg(M \wedge P) \vee \exists[\neg(M \supset S) \vee (S \wedge P)]$

După cum se vede, forma normală conjunctivă a formulei care exprimă modul DISAMIS are un singur conjunct, iar acesta este de forma 1c (cu $m = 1$) (comutând disjuncţii). Şi deci, în acord cu algoritmul de mai sus, formula care exprimă DISAMIS este validă ddacă formula din logica propoziţiilor, izomorfă acestui conjunct, este o formulă validă. Tot ceea ce trebuie să facem acum este să verificăm dacă formula obţinută din ultima formulă de mai sus, eliminând simbolurile cuantificatorilor şi transformând majusculele în minuscule, este o formulă validă a logicii propoziţiilor, adică

$\neg(m \wedge p) \vee \neg(m \supset s) \vee (s \wedge p)$

Pentru verificarea validității acestei formule avem la îndemână mai multe procedee [44]. Vom aplica procedeul matriceal.

m	p	s	$m\wedge p$	$\neg(m\wedge p)$	$m\supset s$	$\neg(m\supset s)$	$s\wedge p$	formula
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1

Întrucât coloana finală a matricei conține o serie omogenă de valori de „1", rezultă că formula este *validă*. Şi deci şi formula corespunzătoare din logica predicatelor monadice (adică formula care exprimă modul DISAMIS) este o formulă *validă*.

Exemplul 2. Fie următorul mod silogistic: $(MoP\wedge SaM)\supset SoP$. Este acesta un mod valid?

În modelul Brentano acest mod devine:

$\alpha: [\exists x(M(x)\wedge\neg P(x))\wedge\forall x(S(x)\supset M(x))]\supset\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$

$[\exists(M\wedge\neg P)\wedge\forall(S\supset M)]\supset\exists(S\wedge\neg P)$

$\neg[\exists(M\wedge\neg P)\wedge\forall(S\supset M)]\vee\exists(S\wedge\neg P)$

$\neg\exists(M\wedge\neg P)\vee\neg\forall(S\supset M)\vee\exists(S\wedge\neg P)$

$\forall\neg(M\wedge\neg P)\vee\exists\neg(S\supset M)\vee\exists(S\wedge\neg P)$

$\forall\neg(M\wedge\neg P)\vee\exists[\neg(S\supset M)\vee(S\wedge\neg P)]$

$\neg(m\wedge\neg p)\vee\neg(s\supset m)\vee(s\wedge\neg p)$

Dacă facem matricea acestei formule (exercițiu), vom constata că există o situație în care formula este *falsă*; respectiv pentru $m=1$, $p=0$, $s=0$. Aşadar, formula este *nevalidă* şi deci nici formula α nu este validă şi astfel modul respectiv nu este un mod valid.

2. Formele normale disjunctive

Dacă cu ajutorul formelor normale conjunctive putem testa validitatea unei formule, cu ajutorul formelor normale disjunctive testăm nesatisfiabilitatea (inconsistența) unei formule. O formulă este nesatisfiabilă ddacă nu este niciodată adevărată.

Definiția 2. O formulă α este în forma normală disjunctivă (abreviat α_d) dacă are forma unei disjuncții $D_1\vee\ldots\vee D_m$ ($m\geq 1$), în care nu apar cuantificatori negați iar într-un disjunct arbitrar cuantificatorul universal apare cel mult o dată.

Orice formulă a logicii predicatelor monadice poate fi transformată într-o formulă echivalentă ei şi care satisface cerințele definiției 2. Pentru aceasta procedăm ca la formele normale disjunctive, cu mențiunea că dacă avem mai multe expresii cuantificate universal şi care sunt legate prin conjuncție, toate aceste expresii pot fi aduse sub acelaşi cuantificator universal, dată fiind distributivitatea acestui cuantificator în raport cu conjuncția:

$(\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x))\equiv\forall x(P(x)\wedge Q(x))$

[44] Comp. 2.1.4.

Aşa cum $\wedge$ şi $\vee$ sunt operatori *duali* (şi $\forall$ şi $\exists$ sunt operatori *duali*), tot astfel şi cele două procedee de testare (a validităţii şi a nesatisfiabilităţii) sunt tot *duale*. Pe baza acestei proprietăţi putem spune că o dată adusă formula la forma ei normală disjunctivă, un disjunct D_j ($j = 1,...,m$) poate avea doar una din următoarele forme:

2a. $\forall\alpha$

2b. $\exists\alpha_1 \wedge \exists\alpha_2 \wedge ... \wedge \exists\alpha_n \quad (n \geq 1)$

2c. $\forall\alpha \wedge \exists\beta_1 \wedge ... \wedge \exists\beta_p \quad (p \geq 1)$

Cu ajutorul formelor normale disjunctive decidem în felul următor: *formula α este nesatisfiabilă ddacă forma ei normală disjunctivă este nesatisfiabilă ddacă fiecare disjunct este nesatisfiabil.* Corespunzător, cele trei reguli cu privire la izomorfismul dintre disjuncţii formei normale disjunctive şi formulele corespunzătoare din logica propoziţiilor sunt:

R2a. $\forall\alpha$ este nesatisfiabilă ddacă α^* este nesatisfiabilă.

R2b. $\exists\alpha_1 \wedge \exists\alpha_2 \wedge ... \wedge \exists\alpha_n$ este nesatisfiabilă ddacă cel puţin o formulă α_k^* ($k = 1,...,n$) este nesatisfiabilă.

R2c. $\forall\alpha \wedge \exists\beta_1 \wedge ... \wedge \exists\beta_p$ este nesatisfiabilă ddacă una dintre conjuncţiile $\alpha^* \wedge \beta_i^*$ ($i = 1,..., p$) este nesatisfiabilă,

unde α^*, α_k^*, $\alpha^* \wedge \beta_i^*$ sunt formule ale logicii propoziţiilor, izomorfe formulelor corespunzătoare din logica predicatelor monadice.

Şi deci, *verificarea nesatisfiabilităţii formulei α se reduce a verificarea nesatisfiabilităţii formulei corespunzătoare ei din logica propoziţiilor.*

Exemplu. Fie următoarea formulă: $\neg[(PeM \wedge MiS) \supset SoP]$

Să testăm acum nesatisfiabilitatea acestei formule cu ajutorul formelor normale disjunctive. Formula este echivalentă cu $PeM \wedge MiS \wedge \neg SoP$[45]. În interpretarea Brentano aceasta devine:

$\alpha: \forall x(P(x) \supset \neg M(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge S(x)) \wedge \neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

$\forall(P \supset \neg M) \wedge \exists(M \wedge S) \wedge \neg\exists(S \wedge \neg P)$

$\forall(P \supset \neg M) \wedge \exists(M \wedge S) \wedge \forall\neg(S \wedge \neg P)$

$[\forall(P \supset \neg M) \wedge \forall\neg(S \wedge \neg P)] \wedge \exists(M \wedge S)$

$\alpha_d : \forall[(P \supset \neg M) \wedge \neg(S \wedge \neg P)] \wedge \exists(M \wedge S)$

$(p \supset \neg m) \wedge \neg(s \wedge \neg p) \wedge (m \wedge s)$

p	m	s	$\neg m$	$p \supset \neg m$	$\neg p$	$s \wedge \neg p$	$\neg(s \wedge \neg p)$	$m \wedge s$	formula
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Cum coloana finală conţine o serie omogenă de valori de „0", rezultă că formula este *nesatisfiabilă*. Şi deci şi formula α este nesatisfiabilă.

---

[45] $\neg SoP$ indică faptul că propoziţia SoP este cea negată, nu termenul S.

Remarcă. Din nesatisfiabilitatea formulei $\neg[(PeM \wedge MiS) \supset SoP]$ conchidem asupra validității negației ei: $(PeM \wedge MiS) \supset SoP$. Într-adevăr, acesta este un mod valid al figurii a IV-a (FRESISON). Așadar, validitatea unui mod silogistic poate fi testată și cu ajutorul formelor normale disjunctive: *testând nesatisfiabilitatea negației formulei care-l exprimă.*

1.3.2.5.3. Modelul Brentano și tema validității

Să vedem acum în ce fel interpretarea Brentano a propozițiilor categorice alterează conceptul tradițional al validității inferențelor.

a) Inferențe imediate

Putem constata, înainte de toate, că anumite raporturi dintre propozițiile categorice, redate de pătratul lui Boethius, se păstrează, pe când altele nu.

Raportul de contradicție rămâne valabil:

1. $SaP \equiv \neg SoP : \forall x(S(x) \supset P(x)) \equiv \neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$
2. $\neg SaP \equiv SoP : \neg\forall x(S(x) \supset P(x)) \equiv \exists x \neg(S(x) \supset P(x)) \equiv \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$
3. $SeP \equiv \neg SiP : \forall x(S(x) \supset \neg P(x)) \equiv \neg\exists x \neg(S(x) \supset \neg P(x)) \equiv \neg\exists x(S(x) \wedge P(x))$
4. $\neg SeP \equiv SiP$ (similar).

Celelalte relații logice sunt suprimate. Raportul de subalternare, de exemplu, este exprimat prin: $\forall x(S(x) \supset P(x)) \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$, echivalent: $\neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$.

Verificăm acum, cu ajutorul formelor normale conjunctive, dacă această formulă este validă sau nu. Obținem $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x(S(x) \wedge P(x))$, adică $\exists(S \wedge \neg P) \vee \exists(S \wedge P)$, respectiv $\exists[(S \wedge \neg P) \vee (S \wedge P)]$. Și deci trebuie să vedem dacă formula $(s \wedge \neg p) \vee (s \wedge p)$ este validă. Această formulă este echivalentă cu $s \wedge (\neg p \vee p)$, echivalent s. Însă s nu este o formulă validă, căci este o variabilă propozițională care poate fi adevărată sau falsă. Și deci implicația care redă raportul de subalternare nu este validă. Nevaliditatea acestei inferențe are ca sursă faptul că dintr-o propoziție de nonexistență (i.e. universală) se conchide asupra unei propoziții de existență (i.e. particulară). Respectiv, nevaliditatea ei rezidă în faptul că S poate fi o *clasă vidă.* Dacă introducem explicit condiția *nevidității* lui S, sub forma $\exists x S(x)$, atunci validitatea inferenței se restabilește:

$[\neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \exists x S(x)] \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$

$[\neg\exists(S \wedge \neg P) \wedge \exists S] \supset \exists(S \wedge P)$

$\neg[\neg\exists(S \wedge \neg P) \wedge \exists S] \vee \exists(S \wedge P)$

$\exists(S \wedge \neg P) \vee \neg\exists S \vee \exists(S \wedge P)$

$\exists[(S \wedge \neg P) \vee (S \wedge P)] \vee \forall \neg S$

$(s \wedge \neg p) \vee (s \wedge p) \vee \neg s$

$[s \wedge (\neg p \vee p)] \vee \neg s$

$s \vee \neg s$

La fel putem arăta că nici formulele care exprimă contrarietatea și subcontrarietatea nu mai sunt formule valide (exercițiu).

Considerațiile de mai sus ne arată următorul fapt: *rămân valabile acele inferențe imediate care exprimă relații de echivalență; sunt nevalide, în schimb, toate inferențele implicative.*

Exemplu

$SaP \xrightarrow{o} Se\overline{P} \xrightarrow{c} \overline{P}eS \xrightarrow{o} \overline{P}a\overline{S} \xrightarrow{c} \overline{S}i\overline{P} \xrightarrow{o} \overline{S}oP$

În acest şir deductiv toate propoziţiile universale obţinute din *SaP*, adică $Se\overline{P}$, $\overline{P}eS$ şi $\overline{P}a\overline{S}$, sunt echivalente cu *SaP*. Motiv pentru care şi formulele care exprimă aceste transformări sunt formule valide. La fel putem spune despre particularele $\overline{S}i\overline{P}$ şi $\overline{S}oP$. În schimb, formula care exprimă trecerea de la universal la particular ($\overline{P}a\overline{S} \xrightarrow{c} \overline{S}i\overline{P}$) nu este o formulă validă. Să arătăm acest lucru.

$$SaP \xrightarrow{o} Se\overline{P}\,;\ \forall x(S(x) \supset P(x)) \equiv \forall x(S(x) \supset \neg\neg P(x))$$

$$SaP \xrightarrow{c_c} \overline{P}eS\,;\forall x(S(x) \supset P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \supset \neg S(x)),$$

căci $(S(x) \supset P(x)) \equiv (\neg P(x) \supset \neg S(x))$

$$\overline{S}i\overline{P} \xrightarrow{o} \overline{S}oP\,;\ \exists x(\neg S(x) \wedge \neg P(x)) \equiv \exists x(\neg S(x) \wedge \neg P(x)) \text{ etc.}$$

$\overline{P}a\overline{S} \supset \overline{S}i\overline{P}\,;\ \ \forall x(\neg P(x) \supset \neg S(x)) \supset \exists x(\neg S(x) \wedge \neg P(x))$ (arătaţi că această formulă este nevalidă; ce termen logic trebuie să fie nevid?).

b) Inferenţe mediate

Şi aici problema validităţii se nuanţează. Dacă în silogistica tradiţională (cu termeni pozitivi), de exemplu, am decupat 24 de moduri valide, de data aceasta (i.e. în modelul Brentano) anumite moduri sunt nevalide. Şi anume, toate acele moduri în care din premise universale (deci fără încărcătură existenţială) se obţin concluzii particulare (cu încărcătură existenţială).

Aceste moduri sunt: BARBARI şi CELARONT (fig. I), CESARO şi CAMESTROP (fig. a II-a); DARAPTI şi FELAPTON (fig. a III-a), BRAMANTIP, CAMENOP şi FESAPO (fig. a IV-a). Toate celelalte 15 moduri sunt, în modelul *BRENTANO*, moduri valide. Iar cu ajutorul formelor normale putem decide asupra validităţii lor (exerciţiu).

1.3.2.5.4. Completitudinea deductivă a modelului Brentano

Nu toate modelele silogisticii clasice pot fi situate pe acelaşi plan. Unele se caracterizează prin completitudine în raport cu „obiectul" modelat, adică sunt modele care validează toate cele 24 de moduri considerate valide de silogistica clasică. Un astfel de model este cel elaborat de J. Lukasiewicz. Modelul Brentano, de mai sus, nu validează decât 15 moduri ale silogisticii clasice, cele care nu derivează concluzii particulare din propoziţii universale. Aşadar, *doar* în raport cu aceste moduri modelul Brentano este complet. Să vedem, în cele ce urmează, *în ce fel cele 15 moduri valide (şi doar acestea) pot fi deduse în acest model.*

O metodă elegantă de demonstrare a completitudinii acestui model este *metoda antilogismului*. Această metodă funcţionează, simultan, *ca procedeu de decizie în modelul predicativ Brentano.*

Descrierea acestei metode reclamă conceptele: *triadă silogistică* şi *antilogism.*

Definiţia 1. Triada silogistică este orice triplet de propoziţii care pot constitui premisele şi concluzia unui mod silogistic (valid sau nevalid).

Pentru a alcătui un silogism aceste propoziţii trebuie să îndeplinească trei condiţii:

1. Să fie propoziţii de tipul A, E, I, O.
2. Să conţină în total strict trei termeni.
3. Fiecare termen să apară strict de două ori în exact două propoziţii distincte.

Definiţia 2. Antilogismul unui mod silogistic este triada silogistică formată din premisele modului respectiv şi din negaţia concluziei sale.

Următoarea echivalență metalingvistică fundamentală corelează conceptele de *silogism valid, antilogism* și *triadă silogistică*.

Teorema 1. Un mod silogistic este valid ddacă antilogismul său este o triadă silogistică nesatisfiabilă.

Demonstrație. Fie $(p_1 \wedge p_2) \supset p_3$ o expresie care redă un mod silogistic valid, unde p_1 și p_2 sunt premisele iar p_3 concluzia modului considerat. Rezultă că negația acestei expresii redă o formulă nesatisfiabilă. Dar negația acestei expresii, adică

$$\neg[(p_1 \wedge p_2) \supset p_3] \equiv \neg[\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3] \equiv [p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3]$$

este tocmai antilogismul expresiei de mai sus și constituie o triadă silogistică nesatisfiabilă.

Teorema 2. Orice triadă silogistică nesatisfiabilă generează strict trei moduri silogistice valide.

Demonstrație. Din *Teorema 1* deducem că din orice triadă silogistică nesatisfiabilă putem obține un mod valid, conectând *implicativ* conjuncția premiselor cu *negația* concluziei. Însă fiecare dintre cele trei propoziții, p_1 - p_3, poate fi pusă drept concluzie a unui silogism. Luând cele două premise și negația propoziției-concluzie din triada nesatisfiabilă respectivă obținem, succesiv, doar cele trei moduri valide.

Așadar, metoda antilogismului *transferă problema privitoare la validitatea unui mod silogistic în problema privitoare la condițiile care determină nesatisfiabilitatea unei triade silogistice.*

Teorema 3. Modelul predicativ Brentano admite strict 5 triade silogistice nesatisfiabile (echivalent, 15 moduri silogistice valide).

Demonstrație. Vom deosebi mai întâi cele patru *tipuri* de triade silogistice, apoi, în cadrul unui tip anume, vom decupa cele 5 triade silogistice nesatisfiabile. În funcție de alcătuirea lor din propoziții *cantitativ* diferite, deosebim:

1. $\forall\alpha \wedge \forall\beta \wedge \forall\gamma$ (toate universale)
2. $\exists\alpha \wedge \exists\beta \wedge \exists\gamma$ (toate particulare)
3. $\exists\alpha \wedge \exists\beta \wedge \forall\gamma$ (două particulare și una universală)
4. $\exists\alpha \wedge \forall\beta \wedge \forall\gamma$ (o particulară și două universale)

Să le considerăm pe rând.

Tipul 1 nu poate genera triade silogistice nesatisfiabile. Explicația este următoarea. Cum cuantificatorul universal este distributiv în raport cu conjuncția, din 1 obținem, $\forall(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$, iar aceasta este o formulă nesatisfiabilă ddacă $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)^*$, echivalent $\alpha^* \wedge \beta^* \wedge \gamma^*$, este o formulă nesatisfiabilă (prin R2a, 1.3.2.5.2). Însă o asemenea formulă nu poate fi nesatisfiabilă, deoarece avem doar propoziții universale, al căror corespondent (izomorf) în $\mathcal{L}_p$ este o implicație între două variabile propoziționale distincte. Matricea acestei conjuncții va conține așadar $2^3 = 8$ linii. Cum numărul de valori de 0 pentru *fiecare* din aceste implicații, corespunzător celor 8 linii, este 2, vom avea în total *maxim* $3 \times 2 = 6$ valori de 0. Așadar, *în cel puțin două linii* matricea va conține valori de 1, și deci formula nu poate fi nesatisfiabilă.

Exemplu

Să presupunem că cele 3 propoziții universale sunt: $\forall x(M(x) \supset \neg P(x))$, $\forall x(M(x) \supset S(x))$ și $\forall x(S(x) \supset P(x))$.

Vom avea $\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \forall x(M(x) \supset S(x)) \wedge \forall x(S(x) \supset P(x))$, echivalent $\forall x[(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge (M(x) \supset S(x)) \wedge (S(x) \supset P(x))]$, respectiv

$\forall[(M \supset \neg P) \wedge (M \supset S) \wedge (S \supset P)]$. Prin R2a această formulă este nesatisfiabilă ddacă formula $\mathcal{L}_p$: $(m \supset \neg p) \wedge (m \supset s) \wedge (s \supset p)$ este nesatisfiabilă.

m	p	s	$\neg p$	$m \supset \neg p$	$m \supset s$	$s \supset p$	$\wedge$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Pentru acest exemplu, în care propozițiile triadei sunt universale (una negativă și două afirmative), matricea formulei $\alpha^* \wedge \beta^* \wedge \gamma^*$ conține 5 de 0 și 3 de 1, deci formula nu este nesatisfiabilă. Pentru alte combinații de simboluri, *m, p, s*, constitutive propozițiilor universale (în care simbolul din consecventul implicației apare negat sau nenegat), numărul valorilor de adevăr de 1 este, firește, diferit, însă *nu* poate fi mai mic decât 2.

În mod similar putem argumenta că nici triadele de tipul 2 nu pot fi nesatisfiabile. O astfel de triadă ar fi nesatisfiabilă ddacă cel puțin una din formulele $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ar fi nesatisfiabilă (prin R2b, 1.3.2.5.2), însă acest lucru nu se întâmplă, deoarece fiecare formulă este o *conjuncție* de variabile propoziționale distincte (fiind formula din $\mathcal{L}_p$ izomorfă formulei corespunzătoare cuantificate *existențial*), iar o asemenea conjuncție nu poate fi nesatisfiabilă (de ce?).

La fel putem argumenta (prin R2c) că nici triadele de tipul 3 nu pot fi nesatisfiabile. Vom restrânge așadar analiza la triadele de tipul 4, cele formate dintr-o propoziție particulară și două universale.

4. $\exists\alpha \wedge \forall\beta \wedge \forall\gamma$

Pentru a demonstra teorema 3 trecem la rescrierea formulei 4, utilizând doar cuantificatorul existențial. Primul conjunct, cuantificatorul existențial, ne arată că $\exists\alpha$ este o formulă care exprimă o propoziție particulară, *SiP* sau *SoP*. Al doilea și al treilea exprimă propoziții universale, *SaP* sau *SeP*. Cum aceste formule ale triadei exprimă propoziții diferite, α, β și γ vor conține termeni diferiți (dar care respectă condițiile cerute unei triade silogistice). De exemplu, o triadă de tipul 4 poate conține următoarele categorii de propoziții:

$\exists\alpha$ *SiP* ; $\exists(S \wedge P)$; particulară
SoP; $\exists(S \wedge \neg P)$; particulară
δ_1

($\mathcal{T}$) $\forall\beta$ *SaM*; $\neg\exists(S \wedge \neg M)$; universală
SeM; $\neg\exists(S \wedge M)$; universală
δ_2

$\forall\gamma$ *MaP*; $\neg\exists(M \wedge \neg P)$; universală
MeP; $\neg\exists(M \wedge P)$; universală
δ_3

Ordinea termenilor *S, M* şi *P* în aceste formule poate fi, fireşte, oricare alta. Să rescriem acum formula 4 în acord cu următoarea simbolizare convenabilă: fie δ_1 (i.e. α), δ_2 şi δ_3 formulele care succed simbolurilor $\exists$, $\neg\exists$, $\neg\exists$ din cele trei categorii de formule de mai sus. Obţinem astfel

5. $\exists\delta_1 \wedge \neg\exists\delta_2 \wedge \neg\exists\delta_3$

sau, echivalent $\exists\delta_1 \wedge \forall\neg\delta_2 \wedge \forall\neg\delta_3$. Cum cuantificatorul universal este distributiv faţă de conjuncţie, ultimii doi conjuncţi pot fi aduşi sub acelaşi cuantificator universal. Şi astfel obţinem, echivalent,

6. $\exists\delta_1 \wedge \forall(\neg\delta_2 \wedge \neg\delta_3)$.

Prin regula R2c, această formulă este nesatisfiabilă ddacă formula izomorfă ei din $\mathcal{L}_p$:

6* $\delta_1^* \wedge \neg\delta_2^* \wedge \neg\delta_3^*$

este nesatisfiabilă.

Însă din ($\mathcal{T}$) observăm că formulele δ_1, δ_2 şi δ_3 sunt conjuncţii a câte doi termeni, din care primul este nenegat iar al doilea negat sau nenegat. Corespunzător, formulele izomorfe lor din $\mathcal{L}_p$, δ_1^*, δ_2^*, δ_3^*, vor fi conjuncţii de variabile propoziţionale, din care prima este nenegată iar a doua negată sau nenegată. Aşadar, 6* are forma

7. $(v_1 \wedge v_2) \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg(v_5 \wedge v_6)$,

unde v_1 - v_6 sunt variabile propoziţionale. Din 7 obţinem forma normală disjunctivă a acestei expresii, prin coborârea negaţiei de pe operatori (ultimii doi conjuncţi) şi prin distribuirea operatorilor. Şi obţinem:

8. $(v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3 \wedge \neg v_5) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3 \wedge \neg v_6) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_4 \wedge \neg v_5) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_4 \wedge \neg v_6)$.

Pentru a determina *condiţiile* nesatisfiabilităţii unei triade silogistice procedăm în felul următor. Expresia 8 este un şir de disjuncţii, în care fiecare disjunct este un şir de conjuncţii. Pentru ca 8 să fie nesatisfiabilă este necesar ca fiecare disjunct să fie nesatisfiabil, echivalent fiecare disjunct trebuie să conţină cel puţin o variabilă împreună cu negaţia ei. Cum v_1 - v_6 desemnează variabile propoziţionale arbitrare, să încercăm acum, pe baza 7 şi 8, să determinăm *poziţia* lor posibilă în aceste formule şi caracteristica lor (i.e. de a fi negate sau nenegate), pentru ca disjunctul respectiv (oricare dintre cei patru din 8) să fie nesatisfiabil. Cum v_1 din 8 este o variabilă *nenegată*, fie aceasta *p*. Cealaltă variabilă, *distinctă* de *p* (deoarece *p* corespunde unui termen logic iar într-o triadă silogistică un termen logic apare exact de două ori însă în două propoziţii *distincte*), fie aceasta *q*, poate să apară negată sau nenegată. Cum *p* şi *q* apar într-un disjunct arbitrar din 8 (ca v_1 şi v_2), rezultă că cealaltă variabilă, fie ea *r*, trebuie să apară, negată sau nenegată, ca cea de-a treia componentă, respectiv a patra, într-un disjunct oarecare din 8. Aşadar, 8 va conţine un disjunct de forma $p \wedge (q/\neg q) \wedge \neg(r/\neg r) \wedge \neg(r/\neg r)$, unde *slash*-ul din parantezele rotunde indică alternativa: variabila respectivă poate să apară negată sau nenegată. Pentru ca un astfel de disjunct să fie nesatisfiabil trebuie ca variabila *r* să apară *negată* într-un membru al conjuncţiei şi *nenegată* în celălalt. Însă *r* apare ca variabilă propoziţională *comună* în δ_2^* şi δ_3^*, adică în expresiile care redau propoziţiile universale. Aşadar, pentru ca un astfel de disjunct să fie nesatisfiabil este necesar ca variabila *comună* acestor expresii să fie negată în una şi nenegată în cealaltă.

Raţionând similar, putem determina şi celelalte condiţii ale nesatisfiabilităţii unui disjunct arbitrar din 8. Adică, dacă *p* apare într-un disjunct ca mai sus, adică pe locul lui v_1, atunci această variabilă trebuie să mai apară exact o dată în δ_2^* sau δ_3^*. Să presupunem că apare, negată sau nenegată, în δ_2^*. În felul acesta 8 va avea un disjunct de forma:

$$p \wedge (q/\neg q) \wedge \neg(p/\neg p) \wedge \neg(r/\neg r).$$

Pentru ca un astfel de disjunct să fie nesatisfiabil trebuie ca al treilea conjunct să fie $\neg p$. Aşadar, în δ_2^* variabila p trebuie să apară nenegată, adică aşa cum apare în δ_1^*.

La fel putem spune despre variabila q. Cum q apare negată sau nenegată în δ_1^* (în care apare şi p), q nu poate să mai apară în δ_2^* (în care apare şi p) deoarece, în acest caz, δ_3^* ar conţine de două ori variabila r. Aşadar, q apare, negat sau nenegat, în δ_3^*. Vom avea, aşadar, în 8, un disjunct de forma:

$$p \wedge (q/\neg q) \wedge \neg(r/\neg r) \wedge \neg(q/\neg q),$$

care este nesatisfiabil numai dacă q din cel de-al patrulea conjunct este o negaţie a celui de-al doilea. Aşadar, în δ_3^* q trebuie să apară aşa cum apare în δ_1^* (deoarece ultimul conjunct are o negaţie în faţă).

Aşadar, decuparea condiţiilor de nesatisfiabilitate a unei triade silogistice s-a redus, echivalent, la decuparea condiţiilor de nesatisfiabilitate a unei formule a $\mathcal{L}_p$ (i.e. formula 6*), respectiv:

1*. Formula trebuie să exprime două propoziţii particulare şi una universală.

2*. Variabila comună expresiilor propoziţiilor universale, redate de $\neg\delta_2$ şi $\neg\delta_3$, să apară negată în una şi nenegată în cealaltă.

3*. Celelalte două variabile din expresiile propoziţiilor universale trebuie să apară aşa cum apar ele (negate sau nenegate) în expresia care redă propoziţia particulară.

Şi deci condiţiile necesare şi suficiente ale nesatisfiabilităţi unei *triade silogistice* sunt:

1. Triada silogistică trebuie să conţină două propoziţii particulare şi una universală.
2. Termenul comun propoziţiilor universale trebuie să apară negat în una şi nenegat în cealaltă.
3. Ceilalţi (doi) termeni din propoziţiile universale trebuie să apară aşa cum apar ei (negaţi sau nenegaţi) în propoziţia particulară.

Redăm mai jos toţi tripleţii de formule ale $\mathcal{L}_p$ care satisfac condiţiile 1*-3* (i.e. care, în conjuncţia lor, constituie o formulă nesatisfiabilă de genul 6*) (coloana din stânga). În dreapta vom trece, corespunzător, toate triadele silogistice nesatisfiabile obţinute din fiecare triplet prin substituţiile variabilelor propoziţionale p, q şi r cu termenii logici S, M şi P şi prin prefixarea primei expresii astfel obţinute cu $\exists$ iar a celorlalte două cu $\neg\exists$.

1.	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge \neg r$;	$\exists(S \wedge M)$	$\neg\exists(S \wedge P)$	$\neg\exists(M \wedge \neg P)$
2.	$p \wedge q$	$r \wedge p$	$q \wedge \neg r$;	$\exists(S \wedge M)$	$\neg\exists(P \wedge S)$	$\neg\exists(M \wedge \neg P)$
3.	$p \wedge q$	$p \wedge \neg r$	$q \wedge r$;	$\exists(S \wedge M)$	$\neg\exists(S \wedge \neg P)$	$\neg\exists(M \wedge P)$
4.	$p \wedge q$	$p \wedge \neg r$	$r \wedge q$;	$\exists(S \wedge M)$	$\neg\exists(S \wedge \neg P)$	$\neg\exists(P \wedge M)$
5.	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg r$	$r \wedge \neg q$;	$\exists(S \wedge \neg M)$	$\neg\exists(S \wedge \neg P)$	$\neg\exists(P \wedge \neg M)$

Fiecare din cele cinci grupe de formule cuantificate constituie o triadă silogistică nesatisfiabilă. Aşadar, din fiecare grupă putem obţine trei moduri silogistice valide luând oricare două formule ca premise şi negaţia celei de-a treia drept concluzie. Să luăm ca exemplu triada 4. Vom avea:

a)
$$\frac{\exists(S \wedge M) \quad \neg\exists(S \wedge \neg P)}{\exists(P \wedge M)} \; ; \quad \frac{SiM \quad SaP}{PiM} \qquad \frac{MiP \quad MaS}{SiP} \qquad \begin{matrix} S/M \\ M/P \\ P/S \end{matrix} \quad \text{(DISAMIS, III)}$$

Din triada 4 am luat primele două propoziții ca premise iar negația celei de-a treia am pus-o concluzie. Am reconstituit propozițiile corespunzătoare din silogistica tradițională și am obținut modul DISAMIS din figura a III-a.

Prin substituțiile menționate în dreapta am adus acest mod la forma lui standard.

Să luăm acum ca premise prima și a treia propoziție iar negația celei de-a doua o punem în concluzie.

b)
$$\begin{array}{c} \exists(S \wedge M) \\ \neg\exists(P \wedge M) \\ \hline \exists(S \wedge \neg P) \end{array} \qquad \begin{array}{c} SiM \\ PeM \\ \hline SoP \end{array} \rightleftarrows \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \qquad \text{(FESTINO, II)}$$

În fine,

c)
$$\begin{array}{c} \neg\exists(S \wedge \neg P) \\ \neg\exists(P \wedge M) \\ \hline \neg\exists(S \wedge M) \end{array} ; \quad \begin{array}{c} SaP \\ PeM \\ \hline SeM \end{array} \rightleftarrows \begin{array}{c} PeM \\ SaP \\ \hline SeM \end{array} ; \quad \begin{array}{c} MeP \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \quad \begin{array}{c} P/M \\ M/P \\ \\ \end{array} ; \text{(CELARENT, I)}$$

Procedând în acest fel, din fiecare triadă silogistică vom obține 3 moduri silogistice valide. Și deci vom obține, în total, cele 15 moduri pe care modelul Brentano le validează (exercițiu).

În fine, e ușor de văzut că triadele de mai sus formează două clase, una care conține triadele de forma IAE (primele 4 grupe), iar cealaltă triada OAA (ultima grupă).

Așa cum am văzut în 1.3.2.5.3., modelul Brentano nu validează acele moduri care derivează concluzii particulare (cu import existențial) din premise universale (fără import existențial). Adică din premise care nu exclud posibilitatea ca vreun termen logic să denote o clasă vidă. Așa cum validitatea unei inferențe (implicaționale) imediate a putut fi restabilită prin introducerea condiției de neviditate a unui termen logic, tot astfel și în cazul inferențelor mediate validitatea poate fi restabilită pe această cale. Așadar, pentru validarea celor 9 moduri nevalidate de modelul Brentano va trebui *să introducem explicit premisele existențiale* necesare acestei validări. Obținem astfel o *extensie* a modelului Brentano prezentat în paragraful 1.3.2.5.1. În acest model, cu *introducerea condiției nevidității lui S*, adăugată premiselor modurilor BARBARA, CELARENT, CESARE, CAMESTRES și CAMENES, și modurile lor subalterne sunt validate. CAMESTROP, de exemplu, devine: $[\forall x(P(x) \supset M(x)) \wedge \forall x(S(x) \supset \neg M(x)) \wedge \exists x S(x)] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$. (Arătați cu ajutorul formelor normale că acesta este un mod valid).

Apoi, cu condiția nevidității lui P modul BRAMANTIP devine mod valid, iar cu condiția nevidității lui M sunt validate modurile DARAPTI, FELAPTON și FESAPO. Conjugate, toate aceste condiții formează $\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M$.

Completitudinea deductivă a modelului Brentano extins se poate demonstra prin *metoda extinsă a antilogismului*. Pe această cale se poate demonstra existența a 8 triade silogistice nesatisfiabile și deci existențe a 24 de moduri silogistice valide.

Fie acum p_1, p_2, p_3 propozițiile unui antilogism. Atunci, ca mai sus, unul dintre silogismele valide va fi $(p_1 \wedge p_2) \supset \neg p_3$. În modelul extins introducem condițiile conjugate de mai sus, adică ($\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M$) $\supset [(p_1 \wedge p_2) \supset \neg p_3]$.

Validitatea formulei pe care o exprimă este echivalentă cu nesatisfiabilitatea negației ei. Negată, expresia de mai sus devine: $\neg\{(\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M) \supset [(p_1 \wedge p_2) \supset \neg p_3]\}$, echivalent $\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$.

Ca mai sus, având în vedere *cantitatea* propozițiilor, putem avea 4 tipuri diferite de triade silogistice. Cele 15 moduri silogistice validate de modelul Brentano (extins) au putut fi obținute din cele 5 triade de tipul 4. Se poate arăta că și de data aceasta triadele de tipurile 2 și 3 nu pot fi nesatisfiabile. Doar triadele de tipul 1, respectiv cele care conțin doar propoziții universale, suplimentate cu condiția existenței (reuniunea celor trei condiții de neviditate), pot fi, sub anumite condiții, nesatisfiabile.

Condițiile de nesatisfiabilitate ale expresiei $\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M \wedge \forall\alpha \wedge \forall\beta \wedge \forall\gamma$ sunt următoarele:

1. Triada silogistică trebuie să conțină două propoziții universal afirmative și una universal negativă.
2. Cele două predicate ale propozițiilor universal afirmative (ambele negate în transcripție existențială) să fie diferite.

Aceste condiții sunt satisfăcute doar de următoarele triade:

6. $\neg\exists(S \wedge \neg P)$ $\quad\neg\exists(P \wedge \neg M)$ $\quad\neg\exists(S \wedge M)$
7. $\neg\exists(P \wedge \neg S)$ $\quad\neg\exists(P \wedge \neg M)$ $\quad\neg\exists(S \wedge M)$
8. $\neg\exists(P \wedge \neg S)$ $\quad\neg\exists(M \wedge \neg P)$ $\quad\neg\exists(S \wedge M)$

Cu condiția menționată, $\exists S \wedge \exists P \wedge \exists M$, din cele 3 triade nesatisfiabile obținem, corespunzător, 9 moduri valide.

Din triada 7, de exemplu, obținem succesiv:

	PaS	*PaM*	*MaP*	*P/M*	
	PaM	*PaS*	*MaS*	*M/P*	
a)	———	———	———		(DARAPTI, III)
	SiM	*SiM*	*SiP*		

	PaS	*SeM*	*MeP*	*S/M*	
	SeM	*PaS*	*SaM*	*M/P*	
b)	———	———	———	*P/S*	(CELARONT, I)
	PoM	*PoM*	*SoP*		

	PaM	*SeM*	*PeM*	*S/P*	
	SeM	*PaM*	*SaM*	*P/S*	
c)	———	———	———		(CESARO, II)
	PoS	*PoS*	*SoP*		

Similar, din triadele nesatisfiabile 6 și 8 vom obține celelalte 6 moduri valide (exercițiu).

În concluzie, modelul Brentano extins este un model complet în raport cu cele 24 de moduri valide ale silogisticii tradiționale.

Metoda antilogismului (cea restrânsă la primele cinci triade și cea extinsă la următoarele trei) ne oferă totodată un *procedeu de decizie* pentru acest segment al logicii predicatelor monadice: *condiția necesară și suficientă a validității unui mod este ca antilogismul său să satisfacă condițiile de nesatisfiabilitate* (cele trei condiții pentru triadele nesatisfiabile din care se obțin cele 15 moduri valide ale modelului Brentano, sau cele 2

condiții ale celorlalte triade din care rezultă restul de 9 moduri, validate de modelul extins Brentano).

Modul FELAPTON (III), de exemplu, în modelul Brentano devine

$$\begin{array}{ll} MeP & \neg\exists(M \wedge P) \\ MaS & \neg\exists(M \wedge \neg S) \\ \hline SoP & \exists(S \wedge \neg P) \end{array}$$

Antilogismul său este $\neg\exists(M \wedge P)$ $\neg\exists(M \wedge \neg S)$ $\neg\exists(S \wedge \neg P)$.

Este ușor de văzut că antilogismul său îndeplinește cele două condiții de nesatisfiabilitate. Și deci este un mod valid.

Capitolul 2

Logica clasică a propozițiilor ($\mathcal{L}_p$)

Ceea ce numim astăzi „logica clasică a propozițiilor" ($\mathcal{L}_p$) reprezintă „numitorul comun" al unor perspective diferite de expunere formală a acestui compartiment al logicii simbolice. Capitolul de față analizează câteva din aceste moduri de explicitare ale $\mathcal{L}_p$: *Teoria funcțiilor de adevăr* (2.1), *Tablourile analitice* (2.2), *Axiomatica* (2.3), *Deducția naturală* (2.4), *Calculul secvenților* (2.5) și *Rezoluția* (2.6).

2.1. Teoria funcțiilor de adevăr

2.1.1. Sintaxa $\mathcal{L}_p$

Logica propozițiilor reprezintă partea cea mai simplă a logicii simbolice. Dacă în silogistica tradițională, așa cum am văzut în capitolul anterior, ne-am interesat și de structura internă a unei propoziții (i.e. structura subiect-predicat), în $\mathcal{L}_p$ această analiză rămâne în afara oricăror considerații. Descompunerea unei propoziții o vom face până la obținerea unor propoziții elementare și nimic mai mult. Dacă, de exemplu, descompunem propoziția (compusă!) „Studenții sunt preocupați de logică și vor obține rezultate bune" vom obține propozițiile elementare „Studenții sunt preocupați de logică" și „Studenții vor obține note bune", fără să mai avem în vedere structura internă a acestor propoziții elementare. Așadar, unitățile sintactice nedecompozabile ale $\mathcal{L}_p$ sunt propozițiile elementare. Din propoziții elementare, aidoma exemplului de mai sus, putem construi propoziții compuse de varii feluri. Date fiind propozițiile elementare „Clujul este un oraș transilvan" și „A venit toamna" putem obține „*Nu* a venit toamna", „Clujul este un oraș transilvan *sau* a venit toamna", „*Dacă* Clujul este un oraș transilvan, *atunci* a venit toamna" etc. Așadar, asupra propozițiilor putem *opera* în diverse moduri. În primul caz am *negat* propoziția dată, în al doilea am *conectat disjunctiv* cele două propoziții, iar în cel de-al treilea le-am *conectat implicativ* etc.

Logica *simbolică* a propozițiilor nu se interesează însă de conținutul propozițiilor (i.e. de ceea ce ele exprimă), ci de relațiile logice posibile dintre ele. Motiv pentru care recurge la o simbolizare corespunzătoare și, implicit, la un nou nivel de abstractizare. Pe scurt, limbajul logicii propozițiilor, $\mathcal{L}_p$ [1], conține următoarele categorii de simboluri (i.e. alfabetul):

1. Simboluri pentru variabile propoziționale: $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$
2. Simboluri pentru operatorii logici: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \ldots$
3. Simboluri pentru constante: 1 și 0.
4. Simboluri auxiliare:), (,], [, }, {.

---

[1] „$\mathcal{L}_p$" înseamnă logica simbolică a propozițiilor, așa cum este ea explicitată în limbajul expus.

Simbolurile p, q, r,... denotă aşadar propoziţii *arbitrare*; $\neg$ este operatorul unar al negaţiei; $\wedge, \vee, \supset$ sunt, corespunzător, operatorii *binari*: conjuncţie, disjuncţie, implicaţie[2]; 1 şi 0 denotă valorile logice „adevărat" şi „fals"[3].

Formulă a $\mathcal{L}_p$. Acest concept va fi definit pe baza unor reguli recursive, reguli care permit obţinerea de noi formule din cele deja construite. Prin $\alpha, \beta, \gamma, ..., \alpha_1, \alpha_2...$ înţelegem, în cele ce urmează, formule arbitrare ale $\mathcal{L}_p$.

Definiţia 1. *a) Orice variabilă propoziţională este o formulă a* $\mathcal{L}_p$.

b) Dacă α *este o formulă a* $\mathcal{L}_p$, *atunci* $\neg\alpha$ *este o formulă a* $\mathcal{L}_p$.

c) Dacă α *şi* β *sunt formule ale* $\mathcal{L}_p$, *atunci* $\alpha \circ \beta$ *este o formulă a* $\mathcal{L}_p$ *(unde „* $\circ$ *" denotă oricare din următorii 10 operatori binari:* $\wedge, \vee, \supset, \subset, \equiv, /, \downarrow, +, \not\subset$, $\#$[4]).

Prin Γ, Δ, Λ,... vom înţelege mulţimi de formule ale $\mathcal{L}_p$.

Definiţia 2. Gradul unei formule este numărul ocurenţelor operatorilor logici din formulă, i.e.:

a) Orice variabilă propoziţională are gradul zero.

b) Dacă α *are gradul n, atunci* $\neg\alpha$ *are gradul* $n+1$.

c) Dacă α *şi* β *au gradele n, respectiv m, atunci* $\alpha \circ \beta$ *are gradul* $n+m+1$.

2.1.2. Semantica $\mathcal{L}_p$

2.1.2.1. Funcţii de adevăr

Pentru a decupa semnificaţia integrală a unui operator logic nu este suficient nicidecum să ne rezumăm la exemple din limbajul natural. Va trebui ca înţelesul lor să fie complet explicitat prin definiţii semantice. Aceste definiţii arată, în fiecare caz în parte, modul în care valoarea logică a propoziţiei compuse (i.e. a propoziţiei care conţine operatorul respectiv) depinde strict de valorile logice ale propoziţiilor care-o compun. Să dăm câteva exemple. Fie propoziţia „Stiloul este albastru". Considerăm că propoziţia este adevărată. Dacă negăm această propoziţie, atunci vom obţine propoziţia compusă „Nu este adevărat că stiloul este albastru" sau „Stiloul nu este albastru", simbolic $\neg p$, şi care este o propoziţie falsă. Invers, dacă p era falsă, atunci $\neg p$ este adevărată. Corelăm aceste valori logice ale propoziţiei compuse, $\neg p$, cu valorile logice ale componentei ei, p, într-un tabel sau *matrice* şi obţinem:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Aici p este argumentul funcţiei negaţie.

Această matrice reprezintă definiţia *semantică* a negaţiei.

La fel putem proceda considerând p: „2 + 2 = 4" şi q: „Tabla este neagră". Dând valori logice lui p şi q, în toate combinaţiile posibile, putem construi definiţii pentru toţi operatorii binari ai $\mathcal{L}_p$. Să menţionăm câţiva:

---

[2] O expunere în detaliu a operatorilor binari o facem în 2.1.2.

[3] Singurele cu care operăm, logica clasică fiind o logică bivalentă.

[4] Din motive tipografice simbolul nonimplicaţiei a putut fi redat doar prin #.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p şi *q* sunt argumentele funcţiilor corespunzătoare.

Cunoscând matricea unui operator, putem construi, corespunzător, definiţia acestuia. Conjuncţia, de exemplu, este funcţia de adevăr care ia valoarea logică adevărat atunci când ambele argumente sunt adevărate. Disjuncţia este funcţia de adevăr care ia valoarea logică adevărat dacă cel puţin un argument este adevărat. Argumentele implicaţiei ($\supset$) se numesc p = antecedent şi q = consecvent. Din matricea corespunzătoare rezultă că implicaţia este falsă doar dacă antecedentul este adevărat şi consecventul fals. În fine, echivalenţa ($\equiv$) ia valoarea logică adevărat doar dacă argumentele *p, q* au aceeaşi valoare logică. Trebuie să remarcăm însă următorul fapt: ceea ce intră în discuţie în stabilirea valorii de adevăr a propoziţiei compuse (i.e. în definirea funcţiei/operatorului) este *strict* valoarea logică a propoziţiilor componente şi nimic altceva. În caz contrar, propoziţia implicativă, construită cu *p* şi *q*, de mai sus, ar fi o propoziţie deloc uzuală în înţelegerea curentă, de genul: „Dacă 2 + 2 = 4, atunci tabla este neagră”. Aşadar, orice consideraţie cu privire la sensul propoziţiilor este eliminată. Acesta este motivul pentru care aceste funcţii se numesc *funcţii de adevăr*.

Definiţia 1. Funcţia de adevăr este o funcţie de la mulţimea valorilor logice ale propoziţiilor componente la valoarea logică a propoziţiei compuse. (simbolic: $f_A : A(p_1,\dots,p_n) \rightarrow A_\varphi(p_1,\dots,p_n)$, unde φ este un operator logic).

Numărul funcţiilor care pot fi construite în logica bivalentă depinde de numărul variabilelor propoziţionale, *n*, şi se calculează după relaţia simplă $\mathrm{Nr}\varphi = 2^{(2^n)}$.

Pentru *n* = 1, numărul funcţiilor este patru, adică:

p	$\varphi_1(p)$	$\varphi_2(p)$	$\varphi_3(p)$	$\varphi_4(p)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Tabelul de adevăr de mai sus are cinci coloane şi două linii. Prima coloană conţine asignările făcute variabilei propoziţionale *p*, iar celelalte patru reprezintă funcţiile *unare* corespunzătoare, adică: *verum* (*p*), *p*, $\neg p$ şi *falsum* (*p*).

Definiţia 2. Prin interpretarea unei variabile propoziţionale se înţelege asignarea (atribuirea) unei valori de adevăr variabilei respective.

Aşa cum am menţionat, dacă cunoaştem tabelul de adevăr al unei funcţii, atunci cunoaştem semnificaţia funcţiei, respectiv îi putem construi definiţia. Din cele patru funcţii de mai sus, $\varphi_3(p)$ este tocmai *negaţia*. Negaţia este aşadar funcţia de adevăr (unară!) care ia valoarea logică adevărat dacă *p* este falsă; fals în caz contrar. La fel putem construi definiţii şi pentru celelalte funcţii unare.

Pentru $n = 2$, $\mathrm{Nr}\varphi = 2^{\left(2^2\right)} = 16$. Cele 16 funcţii *binare* distincte sunt redate de ceea ce se numeşte *Tabelul lui Wittgenstein* [5].

p	q	$\varphi_1(p,q)$ [6]	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		$\mathcal{T}$	$\vee$	$\subset$	p	$\supset$	q	$\equiv$	$\wedge$	/	+	$\neg q$	#	$\neg p$	$\not\subset$	$\downarrow$	C

$$L_1 = \frac{\mathrm{Nr}\varphi}{2} = 8 \;;\; L_2 = \frac{\mathrm{Nr}\varphi}{2^2} = 4 \;;\; L_3 = \frac{\mathrm{Nr}\varphi}{2^3} = 2 \;;\; L_4 = \frac{\mathrm{Nr}\varphi}{2^4} = 1$$

Tabelul conţine 18 coloane şi 4 linii. Primele două coloane reprezintă toate categoriile de asignări făcute variabilelor p şi q, iar celelalte funcţiile binare corespunzătoare. Completarea liniilor o facem după următorul algoritm simplu: în linia întâi (L_1) vom scrie alternativ valori *omogene* al căror număr este numărul total al funcţiilor (16) împărţit la 2, pentru linia a doua vom împărţi acest număr la 2^2, apoi la 2^3 pentru linia a treia şi, în fine, la 2^4 pentru linia a patra. Cele 16 funcţii binare sunt, corespunzător: tautologia ($\mathcal{T}$), disjuncţia neexclusivă ($\vee$), implicaţia conversă ($\subset$), prependenţa (p), implicaţia materială ($\supset$), postpendenţa (q), echivalenţa ($\equiv$), conjuncţia ($\wedge$), incompatibilitatea (/), disjuncţia exclusivă ($+$), postnonpendenţa ($\neg q$), non-implicaţia (#), prenonpendenţa ($\neg p$), nonimplicaţia conversă ($\not\subset$), rejecţia ($\downarrow$) şi contradicţia (C).

Din construcţia tabelului se poate observa că funcţiile $\varphi_9 - \varphi_{16}$ se pot obţine, corespunzător, din negarea valorilor funcţiilor $\varphi_8 - \varphi_1$, motiv pentru care incompatibilitatea de mai sus se mai numeşte şi anticonjuncţie, disjuncţia exclusivă – antiechivalenţă, rejecţia – antidisjuncţie etc.

Tot în construcţia tabelului observăm că φ_1 este întotdeauna adevărată, φ_{16} este întotdeauna falsă, iar celelalte funcţii conţin în matricea lor valori de adevăr neomogene. Motiv pentru care putem opera următoarea clasificare a funcţiilor de adevăr: *valide* (tautologii, adevăruri logice), *nesatisfiabile* (contradicţii, falsităţi logice) şi *satisfiabile* (realizabile), terminologie pe care o vom aplica cu referire la orice formulă a $\mathcal{L}_p$ (aşa cum vom arăta mai jos).

2.1.2.2. Dualitatea

Definiţie. Doi operatori logici[7] *se numesc duali dacă matricea unuia se obţine din matricea celuilalt înlocuind reciproc valorile logice 1 şi 0 în toate ocurenţele lor.*

Exemplu. Dacă în matricea operatorului $\equiv$ executăm aceste înlocuiri obţinem matricea operatorului $+$.

[5] Comp. L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, 5.101.

[6] Din motive tipografice pentru celelalte funcţii vom omite argumentele.

[7] Corespunzător, funcţii de adevăr, în cele ce urmează vom considera cele două expresii interschimbabile.

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$p + q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dacă şi în celelalte cazuri procedăm similar, vom găsi următoarele perechi de operatori duali: $\mathcal{T}$ - $\mathcal{C}$, $\vee - \wedge$, $\supset - \not\subset$, $\subset - \#$, $/ - \downarrow$ (exerciţiu).

Ceilalţi, $p, q, \neg p$ şi $\neg q$, constituie gama operatorilor autoduali. Operatorul unar $\neg$ este de asemenea autodual (de ce?).

2.1.2.3. Procedeul matriceal ca procedeu de decizie în $\mathcal{L}_p$

Definiţia 1. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ se numeşte validă (simbolic: $\models \alpha$) dacă pentru orice interpretare a variabilelor sale α ia valoarea logică adevărat.

Definiţia 2. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ se numeşte nesatisfiabilă dacă pentru orice interpretare a variabilelor sale α ia valoarea logică fals.

Definiţia 3. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ se numeşte satisfiabilă dacă există două interpretări ale variabilelor ei în care α ia valori logice opuse.

Remarcă. În sens *larg* satisfiabilitatea nu exclude validitatea, α fiind satisfiabilă dacă există (cel puţin) o interpretare în care α este adevărată.

Pentru a constata validitatea unei formule (valide!) procedeul matriceal este unul foarte practic, atunci când numărul variabilelor formulei nu este prea mare (mai mare de 3).

Să luăm un exemplu:

$\alpha^{8}(p,q,r):[(p/_1 q)\supset_3^{2}\neg r]\wedge_6(q\vee_5^{4}\neg p)$

Numărul liniilor matricei este 2^n, unde n reprezintă numărul variabilelor propoziţionale. Numărul coloanelor este dat de numărul operatorilor logici ai formulei plus numărul variabilelor propoziţionale. Vom construi aşadar o matrice (tabel de adevăr) cu 8 linii şi 9 coloane. Pentru a facilita construcţia matricei, putem nota operatorii logici în ordinea executării operaţiilor.

p	q	r	$/_1$	$\neg_2$	$\supset_3$	$\neg_4$	$\vee_5$	$\wedge_6$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1

[8] Menţionarea variabilelor, după simbolul „α", nu este necesară.

Completarea interpretărilor variabilelor o facem şi în acest caz după algoritmul mai sus aplicat (în cazul Tabelului lui Wittgenstein), numai că aici avem, corespunzător, coloane, nu linii.

Coloana ultimei operații menționate, $\wedge_6$, reprezintă valorile logice ale formulei α, pentru toate cele 8 interpretări ale variabilelor sale. Aşa cum ne arată matricea, avem o formulă satisfiabilă / realizabilă.

Să mai luăm un exemplu. Fie $\beta : [(p \wedge \neg r)/q] \supset [(\neg p \downarrow \neg q) \supset p]$.

Facem, corespunzător, matricea, fără a mai numerota operatorii logici.

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$(p \wedge \neg r)/q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \downarrow \neg q$	$(\neg p \downarrow \neg q) \supset p$	β
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1

Cum coloana finală a matricei formulei β conține o serie omogenă de valori de 1, rezultă că β este o formulă validă.

Formule valide remarcabile ale $\mathcal{L}_p$

Prezentăm mai jos câteva tautologii remarcabile ale $\mathcal{L}_p$, cu referire la operatorii menționați în frontul fiecărei grupe $(\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv)$. În dreptul fiecărei formule vom specifica denumirea uzuală a tautologiei respective în $\mathcal{L}_p$.

$(\neg)$ 1. $\neg..\neg^{2k} p \equiv p$; $k = 0,1,2,...$; 1 şi 2 Eliminarea negațiilor multiple

2. $\neg..\neg^{2k+1} p \equiv \neg p$; $k = 0,1,2,...$

$(\wedge)$ 3. $(p \wedge p) \equiv p$; idempotența conjuncției

4. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$; comutativitatea conjuncției

5. $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$; asociativitatea conjuncției

6. $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$; distributivitatea conjuncției (în raport cu disjuncția)

7. $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$; 7 – 9 absorbția conjuncției

8. $[p \wedge (p \wedge q)] \equiv (p \wedge q)$

9. $[p \wedge (q \vee \neg q)] \equiv p$

10. $(p \wedge q) \supset p$; 10 – 13 atenuarea conjuncției

11. $(p \wedge q) \supset q$

12. $(p \wedge q) \supset (p \vee q)$

13. $(p \wedge q) \supset (p \supset q)$

14. $(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$; 14 şi 15 legile lui De Morgan

15. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

16. $\neg(p \wedge \neg p)$; principiul noncontradicției

(∨) 17. $(p \vee p) \equiv p$; idempotența disjuncției

18. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$; comutativiatea disjuncției

19. $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$; asociativitatea disjuncției

20. $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$; distributivitatea disjuncției (în raport cu conjuncția)

21. $[p \vee (p \vee q)] \equiv (p \vee q)$; 21 – 23 absorbția disjuncției

22. $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$

23. $[p \vee (q \wedge \neg q)] \equiv p$

24. $p \supset (p \vee q)$; 24 și 25 introducerea disjuncției

25. $q \supset (p \vee q)$

26. $(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$; 26 și 27 legile lui De Morgan

27. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

28. $p \vee \neg p$; principiul terțului exclus

(⊃) 29. $p \supset p$; reflexivitatea implicației

30. $[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$; tranzitivitatea implicației

31. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [(p \wedge q) \supset r]$; legea importației / exportației

32. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [q \supset (p \supset r)]$; permutarea premiselor

33. $[p \supset (p \supset q)] \equiv (p \supset q)$; absorbția implicației

34. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$; autodistributivitatea implicației

35. $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$; 35 – 37 legi ale contrapoziției

36. $(\neg p \supset q) \equiv (\neg q \supset p)$

37. $(p \supset \neg q) \equiv (q \supset \neg p)$

38. $p \supset (q \supset p)$; 38 și 39 paradoxurile implicației

39. $\neg p \supset (p \supset q)$

40. $p \supset (\neg p \supset q)$; *exfalso quodlibet*

41. $(p \supset q) \supset [(p \wedge r) \supset q]$; 41 – 44 atenuarea implicației

42. $(p \supset q) \supset [(r \supset p) \supset (r \supset q)]$

43. $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

44. $(p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$

45. $[p \wedge (p \supset q)] \supset q$; *modus ponens*

46. $p \supset [(p \supset q) \supset q]$; *modus ponendo ponens*

47. $p \supset [(q \supset \neg p) \supset \neg q]$; 47 și 48 *modus tollendo tollens*

48. $[(p \supset q) \wedge \neg q] \supset \neg p$

49. $[(p \supset q) \wedge (\neg p \supset q)] \supset q$; dilema constructivă

50. $(p \supset \neg p) \supset \neg p$; 50 – 52 *reductio ad absurdum*

51. $(\neg p \supset p) \supset p$

52. $[(p \supset q) \wedge (p \supset \neg q)] \supset \neg p$

53. $[(p \supset q) \supset p] \supset p$; legea lui Peirce

($\equiv$) 54. $p \equiv p$; reflexivitatea echivalenței

55. $(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$; simetria echivalenței

56. $[(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)] \supset (p \equiv r)$; tranzitivitatea echivalenței

57. $[p \equiv (q \equiv r)] \equiv [(p \equiv q) \equiv r]$; asociativitatea echivalenței

58. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$; 58 şi 59 contrapoziția echivalenței

59. $(\neg p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$

60. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$; 60 şi 61 atenuarea echivalenței

61. $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$

62. $\neg (p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv q)$; respingerea echivalenței

63. $(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$; condițiile de adevăr ale echivalenței

2.1.2.4. Relația de consecință semantică

Pentru explicitarea înțelesului acestui concept să dăm mai întâi un exemplu. Fie următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$: $\alpha: (p \equiv q) \downarrow (p \wedge q)$, $\beta: (p \wedge q) \supset \neg r$ şi $\gamma: p \vee q$. Să prezentăm în tabelul de mai jos matricea celor trei formule.

p	q	r	$p \equiv q$	$p \wedge q$	α	$\neg r$	β	γ
1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0

Pe baza acestei matrice putem observa că de ori câte ori formulele α şi β sunt *simultan* adevărate şi formula γ este adevărată (conversa nefiind valabilă). În acest caz vom spune că formula γ este o *consecință semantică* a formulelor α şi β. Mai putem constata că de ori câte ori α este adevărată şi β este adevărată (reciproca nefiind nici în acest caz valabilă). Şi în acest caz vom spune că β este consecință semantică a lui α.

Definiție. Fie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ formule ale $\mathcal{L}_p$. β este o consecință semantică a formulelor $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (simbolic $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$) dacă pentru orice interpretare a variabilelor propoziționale care apar în $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$, formula β este adevărată de ori câte ori $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sunt simultan adevărate ($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sunt premisele iar β este consecința lor semantică).

Exerciții

1. Se dau următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$: $\alpha_1 : (p \equiv q) \supset (p \supset q)$, $\alpha_2 : (p \wedge q) \supset (p \supset q)$, $\alpha_3 : (p \vee q) \supset (p \wedge q)$, $\alpha_4 : (p \supset q) \supset [(p \wedge r) \supset q]$. Stabiliți cazurile în care relația de consecință semantică are loc.
2. Ce putem spune despre relația $\alpha \models \beta$ dacă β este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$? Dar dacă β este o formulă nesatisfiabilă?
3. Construiți o demonstrație pentru următoarele enunțuri:
   a) Dacă $\models \alpha$ și $\models \alpha \supset \beta$, atunci $\models \beta$.
   b) Dacă $\models \alpha$ și $\models \alpha \equiv \beta$, atunci $\models \beta$.
4. Argumentați că următorul condițional are loc:
   Pentru $n \geq 1$: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$ ddacă $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models \beta$.

2.1.2.5. Scheme deductive cu operatori ai $\mathcal{L}_p$

Din cele 16 funcții de adevăr binare, 10 pot figura în scheme deductive valide. Celelalte șase (p, q, $\neg p$, $\neg q$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$), numite și funcții *degenerate*, nu exprimă propriu-zis corelații logice între argumentele lor, motiv pentru care nu pot construi scheme deductive valide. Să considerăm în continuare câteva exemple de scheme valide.

Cu ajutorul implicației materiale putem construi următoarele scheme:

$$\frac{p \supset q \qquad p}{q} \quad \text{modus ponens} \qquad\qquad \frac{p \supset q \qquad \neg q}{\neg p} \quad \text{modus tollens}$$

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Verificarea validității lor o putem face fie construind o formulă implicativă de genul premise $\supset$ concluzie, pe care-o verificăm cu ajutorul procedeului matriceal, adică $[(p \supset q) \wedge p] \supset q$, fie o justificăm pe baza matricei (i.e. definiției semantice a) implicației. În acest din urmă caz, alegem din matrice liniile care stipulează condițiile din premisele schemei, adică $p = 1$ și $(p \supset q) = 1$, respectiv doar prima linie. Pentru concluzie ne rămâne o singură alegere, $q = 1$. La fel putem justifica și *modus tollens*.

În schimb, următoarele scheme sunt nevalide (de ce?):

$$\frac{p \supset q \qquad \neg p}{q} \qquad\qquad \frac{p \supset q \qquad q}{p}$$

Cu *incompatibilitatea* putem construi alte scheme deductive:

$$\frac{p / q \qquad p}{\neg q} \quad \text{sau} \quad \frac{p / q \qquad q}{\neg p}$$

Exerciții

1. Se dau următoarele definiții:

Def. 1. O formulă a $\mathcal{L}_p$ este *satisfiabilă* dacă există două interpretări distincte ale variabilelor sale astfel încât formula ia, corespunzător, valori logice distincte.

Def. 2. O formulă a $\mathcal{L}_p$ este *satisfiabilă* dacă există cel puțin o interpretare în care formula este adevărată.

Def. 3. O formulă a $\mathcal{L}_p$ este *satisfiabilă* dacă formula nu este nesatisfiabilă.

Ce raporturi logice putem stabili între cele trei definiții?

2. Unele funcții din tabelul lui Wittgenstein exprimă *raporturi de condiționare* ($\supset, \subset, \equiv, \wedge, \downarrow$ și $\mathcal{T}$), altele exprimă *raporturi de opoziție* (negațiile funcțiilor precedente) iar altele exprimă *raporturi mixte* (p, q, $\neg p$ și $\neg q$).

a) Arătați că funcțiile p, q, $\neg p$ și $\neg q$ exprimă raporturi mixte (i.e. pot fi redate, fiecare, ca o conjuncție dintre o funcție care exprimă un raport de condiționare și una care exprimă un raport de opoziție).

b) Verificați, prin transformări sintactice adecvate, că relațiile respective au loc.

3. Construiți toate schemele valide în care figurează operatori binari ai $\mathcal{L}_p$. Argumentați validitatea lor.

4. Formulați concluzia, în termenii incompatibilității, pe baza următoarelor premise:

$(p/q)/[(p/p)/(q/q)]$

q/q

5. Construiți două scheme deductive valide, una în care una dintre premise este $\neg p \supset q$, iar cealaltă în care una din premise este $p \supset \neg q$.

6. Formulați concluzia, în termenii rejecției, pe baza următoarelor premise:

$(p \wedge q) \downarrow (p \wedge q)$

$(p/p)/(p/p)$

7. Explicitați simbolic ideea excluderii covalenței propozițiilor.

8. Să se determine, în termenii rejecției, cea de-a doua premisă împreună cu care expresia de mai jos poate constitui o schemă deductivă validă. Formulați concluzia.

$(p/p)/(q/q)$

9. Constituie următoarea combinație de premise o schemă deductivă validă? De ce?

p/p

$p/(q/q)$

10. Ce concluzie se poate formula, în termenii rejecției, pe baza următoarelor premise:

$[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

$(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)$

11. Construiți o schemă deductivă validă în care premisele sunt

$(p \supset q) \supset \neg(q \supset p)$

p/p

2.1.3. Transformări echiveridice în $\mathcal{L}_p$

2.1.3.1. Conceptul echiveridicității

Vom ilustra mai întâi ideea de echiveridicitate, pe baza câtorva exemple simple.

a) Fie următoarele două formule ale $\mathcal{L}_p$:

$\alpha: p \wedge (q \vee r)$; $\beta: (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Să vedem în ce relație logică se află ele, comparând matricele:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\alpha \equiv \beta$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Vom constata că valorile din coloana finală (respectiv valorile acestor funcții de adevăr pentru asignările corespunzătoare) sunt identice. Vom spune că α și β sunt formule *echiveridice.*

b) Fie acum formulele $\alpha: p \supset q$ și $\beta: \neg p \vee q$. Similar,

p	q	$p \supset q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\alpha \equiv \beta$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Și în acest caz este valabilă constatarea de mai sus.

c) În fine, considerăm formulele: $\alpha: [(p / q) + \neg r] \supset [(p \wedge \neg q) \supset \neg q]$ și $\beta: \neg(s \vee \neg s) \supset [(p \downarrow q) \wedge \neg t]$.

Fără să facem matricele corespunzătoare putem constata că ambele formule sunt valide: prima este o implicație cu consecventul adevărat iar a doua o implicație cu antecedentul fals. Și în acest caz cele două formule sunt echiveridice.

Să construim acum o definiție pentru conceptul echiveridicității. Fie $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ toate variabilele care apar într-o formulă α, fie $q_1, \ldots, q_m$ $(m \geq 1)$ toate variabilele care apar într-o formulă β.

Definiție. Formulele α și β se numesc echiveridice (sau semantic echivalente) dacă pentru orice interpretare dată variabilelor $p_1, \ldots, q_m$ ele iau aceeași valoare logică (simbolic α eq β).

Remarcă 1. Pentru a fi echiveridice formulele nu trebuie să conțină neaparat aceiași operatori logici (comp. exemplul b) sau aceleași variabile (sintactic sau numeric) (comp. exemplul c).

Remarcă 2. Echiveridicitatea nu trebuie confundată cu operatorul echivalență, „$\equiv$“, din Tabelul lui Wittgenstein. Aceasta este un operator binar al limbajului obiect care, pus între

două formule, α şi β, formează o nouă formulă mai complexă $\alpha \equiv \beta$ a limbajului obiect. „Eq" este, în schimb, un operator binar al metalimbajului care, pus între simbolurile α şi β, generează expresia „α *eq* β", în care α şi β sunt termenii relației „eq" şi nu formule ca atare (α înseamnă „formula α", iar β „formula β"). Fireşte, aşa cum am constatat din exemplele de mai sus, între „eq" şi „$\equiv$" există următoarea relație:

α eq β ddacă $\alpha \equiv \beta$ este o formulă validă (i.e. $\vDash \alpha \equiv \beta$).

Aşadar, două formule α şi β ale $\mathcal{L}_p$ sunt echiveridice ddacă ele sunt logic echivalente, adică pentru orice interpretare a variabilelor lor ele iau aceeaşi valoare logică şi deci $\vDash \alpha \equiv \beta$.

Echiveridicitatea are următoarele proprietăți:

1. *Refl*: α eq α.
2. *Sym*: Dacă α eq β, atunci β eq α.
3. *Trans*: Dacă α eq β şi β eq γ atunci α eq γ.

2.1.3.2. Operatori fundamentali, operatori derivați

Definiția 1. Un operator logic introdus cu ajutorul unei definiții semantice (matrice) se numeşte operator fundamental (la fel putem spune, corespunzător, despre o funcție de adevăr).

Definiția 2. Un operator logic introdus cu ajutorul unei definiții sintactice se numeşte operator derivat (respectiv o funcție de adevăr derivată).

Exemple: $p \supset q =_{df} \neg p \vee q$; $p / q =_{df} \neg p \vee \neg q$ etc.

Fie, în cele ce urmează, o mulțime $M = \{O_1, ..., O_n\}$, $n \geq 1$, de operatori fundamentali.

Definiția 3. Un operator O_i se numeşte funcțional independent de ceilalți operatori din mulțimea M dacă el nu se poate defini sintactic prin ceilalți operatori.

Definiția 4. O mulțime de operatori fundamentali $M = \{O_1, ..., O_n\}$, $n \geq 1$, se numeşte independentă dacă fiecare operator este funcțional independent de ceilalți operatori.

Exemple

1. Fie $M = \{\neg, \vee, \wedge\}$. M nu formează o mulțime independentă, deoarece $\wedge$ se poate defini sintactic prin $\neg$ şi $\vee$:

$p \wedge q =_{df} \neg(\neg p \vee \neg q)$

Similar, $\vee$ se poate defini prin $\wedge$ şi $\neg$.

2. $M = \{\neg, \wedge\}$ este independentă.

Argument. Trebuie să arătăm că operatorul $\wedge$ nu poate fi definit doar cu operatorul $\neg$ şi invers. Din variabile şi din negație putem construi doar formule de forma $p, \neg p, \neg\neg p, \neg ... \neg p$ etc. Aceste formule sunt fie echiveridice cu p, fie cu $\neg p$, pe baza formulelor 1 şi 2 din 2.1.2.3.

Cu ajutorul negației se pot construi aşadar numai acele funcții binare care sunt echiveridice fie cu p, fie cu q, fie cu $\neg p$, fie cu $\neg q$, adică:

p	q	$\varphi_1(p,q)$	$\varphi_2(p,q)$	$\varphi_3(p,q)$	$\varphi_4(p,q)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Întrucât nici una din aceste funcții nu este echiveridică cu conjuncția, conchidem că operatorul $\wedge$ nu poate fi definit doar prin intermediul negației. Similar, $\neg$ nu poate fi definită doar cu ajutorul $\wedge$. Cu ajutorul $\wedge$ nu pot fi construite decât formule de forma $p \wedge p, p \wedge ... \wedge p$, toate fiind echiveridice cu p.

2.1.3.3. Completitudine funcțională

Definiție. O mulțime M de operatori fundamentali se numește funcțional completă dacă orice alt operator al $\mathcal{L}_p$ se poate defini prin operatorii mulțimii M.

Vom da în continuare câteva exemple de mulțimi funcțional complete de operatori logici: $M_1 = \{\neg, \wedge\}$, $M_2 = \{\neg, \vee\}$, $M_3 = \{\neg, \supset\}$, $M_4 = \{/\}$ și $M_5 = \{\downarrow\}$. Vom considera în cele ce urmează doar următorii operatori din tabelul lui Wittgenstein: $\wedge, \vee, \supset, \equiv, +, /, \downarrow$.

$M_1 = \{\neg, \wedge\}$ este funcțional completă

$p \vee q$ eq $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \supset q$ eq $\neg(p \wedge \neg q)$

$p \equiv q$ eq $\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$

$p + q$ eq $\neg[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)]$

p / q eq $\neg(p \wedge q)$

$p \downarrow q$ eq $\neg p \wedge \neg q$

$M_2 = \{\neg, \vee\}$ este funcțional completă

$p \wedge q$ eq $\neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \supset q$ eq $\neg p \vee q$

$p \equiv q$ eq $[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)]$ eq $\neg\,(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$

$p + q$ eq $\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$

p / q eq $\neg p \vee \neg q$

$p \downarrow q$ eq $\neg(p \vee q)$

$M_3 = \{\neg, \supset\}$ este funcțional completă

$p \wedge q$ eq $\neg(p \supset \neg q)$

$p \vee q$ eq $\neg p \supset q$

$p \equiv q$ eq $[(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$ eq $\neg[(p \supset q) \supset \neg(q \supset p)]$

$p + q$ eq $[(p \supset q) \supset \neg(q \supset p)]$

p / q eq $p \supset \neg q$

$p \downarrow q$ eq $\neg(\neg p \supset q)$

$M_4 = \{/\}$ este funcțional completă

$\neg p$ eq p/p

$p \wedge q$ eq $\neg(p/q)$ eq $(p/q)/(p/q)$

$p \vee q$ eq $(p/p)/(q/q)$

$p \supset q$ eq $\neg p \vee q$ eq $p/(q/q)$

$p \equiv q$ eq $(p/q)/[(p/p)/(q/q)]$

$p \equiv q$ eq $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ eq $\neg[(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))]$ eq $\neg[(p/q) \wedge (\neg p / \neg q)]$ eq $(p/q)/(\neg p / \neg q)$ eq $(p/q)/[(p/p)/(q/q)]$.

$p + q$ eq $[p/(q/q)]/[q/(p/p)]$

$p + q$ eq $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ eq $\neg[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)]$ eq $\neg(p \wedge \neg q) / \neg(\neg p \wedge q)$ eq $(p/\neg q)/(\neg p / q)$ eq $[p/(q/q)]/[(p/p)/q]$

$p \downarrow q$ eq $[(p/p)/(q/q)]/[(p/p)/(q/q)]$

$p \downarrow q$ eq $\neg(p \vee q)$ eq $\neg p \wedge \neg q$ eq $\neg\neg(\neg p \wedge \neg q)$ eq $\neg(\neg p / \neg q)$ eq $\neg[(p / p)/(q / q)]$ eq $[(p / p)/(q / q)]/[(p / p)/(q / q)]$

$M_5 = \{\downarrow\}$ este funcțional completă

$\neg p$ eq $p \downarrow p$

$p \wedge q$ eq $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q$ eq $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$p \supset q$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

$p \equiv q$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]$

$p \equiv q$ eq $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$ eq $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ eq $\neg(\neg p \downarrow q) \wedge \neg(\neg q \downarrow p)$ eq $\neg[(\neg p \downarrow q) \vee (\neg q \downarrow p)]$ eq $(\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg q \downarrow p)$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]$

$p + q$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow (p \downarrow q)$

$p + q$ eq $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$ eq $\neg\neg[\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)]$ eq $\neg\neg[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)]$ eq $\neg[\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)]$ eq $\neg[(\neg p \downarrow \neg q) \vee (p \downarrow q)]$ eq $(\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (p \downarrow q)$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow (p \downarrow q)$

p / q eq $\neg(p \wedge q)$ eq $\neg p \vee \neg q$ eq $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ eq $\neg(\neg p \downarrow \neg q)$ eq $(\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (\neg p \downarrow \neg q)$ eq $[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]$.

După cum am arătat mai sus, operatorii / şi $\downarrow$ pot reda, fiecare, orice alt operator al $\mathcal{L}_p$. Mai mult, demonstrăm următorul rezultat.

Teoremă. Operatorii / şi $\downarrow$ sunt singurii operatori binari care pot constitui, fiecare, mulțimi funcțional complete de operatori fundamentali.

Demonstrație. Presupunem că $\circ$ este un operator binar, altul decât / şi $\downarrow$, prin intermediul căruia orice alt operator poate fi definit. Fie *p* şi *q* două variabile propoziționale. Dacă pentru $p = 1$ şi $q = 1$ vom avea $p \circ q = 1$, atunci orice formulă construită din *p*, *q* şi operatorul $\circ$ ar lua întotdeauna valoarea logică 1 dacă variabilele propoziționale *p* şi *q* ar lua valoarea logică 1. În acest caz negația n-ar putea fi definită cu ajutorul acestui operator. Similar, dacă pentru $p = 0$ şi $q = 0$ vom avea $p \circ q = 0$, atunci orice formulă construită numai din variabilele *p* şi *q* şi operatorul $\circ$ ar fi întotdeauna falsă, dacă ambele variabile iau valoarea logică fals. Nici în acest caz negația n-ar putea fi definită utilizând doar operatorul $\circ$. De aici rezultă că pentru a putea reda negația matricea operatorului $\circ$ trebuie să aibe următoarea formă:

p	q	$p \circ q$
1	1	0
1	0	
0	1	
0	0	1

Dacă în ocurențele rămase (liniile 2 şi 3) vom pune 1, 1 respectiv 0, 0, atunci vom obține matricele operatorilor / şi $\downarrow$. În schimb, dacă vom pune celelalte posibilități de

combinare ale valorilor logice, respectiv 0, 1 sau 1, 0, vom obţine, corespunzător, $\neg p$ şi $\neg q$, adică $p \circ q$ eq $\neg p$ şi $p \circ q$ eq $\neg q$. În aceste din urmă cazuri ar însemna că operatorul binar $\circ$ poate fi definit doar cu ajutorul negaţiei. Am văzut însă mai sus că negaţia nu poate forma, singură, o mulţime funcţional completă de operatori fundamentali (conjuncţia n-a putut fi definită doar cu ajutorul negaţiei!).

2.1.3.4. Demonstraţii de completitudine funcţională

În paragraful precedent am văzut că anumite mulţimi de operatori pot „traduce" echiveridic orice alt operator. Ele au fost numite mulţimi funcţional complete. De data aceasta vom demonstra câteva rezultate cu privire la completitudinea funcţională.

Teorema 1. $M = \{\neg, \wedge\}$ *este funcţional completă. (Echivalent: orice funcţie de adevăr a* $\mathcal{L}_p$ *poate fi generată de o expresie care conţine strict operatorii negaţie şi conjuncţie).*

Demonstraţie. Fie $\alpha(p_1,..., p_n)$ o funcţie n-ară de adevăr. După cum ştim, matricea unei asemenea funcţii va conţine 2^n linii, corespunzătoare celor 2^n interpretări diferite ale variabilelor sale. Numerotăm aceste interpretări de la 1 la 2^n. Fie acum o funcţie f_{ik} definită astfel:

$$f_{ik} = p_k, \text{ dacă } p_k = 1$$

$$f_{ik} = \neg p_k, \text{ dacă } p_k = 0,$$

unde i enumeră interpretările ($i = 1,...,2^n$), iar k enumeră variabilele funcţiei ($k = 1,...,n$). Din construcţia acestei funcţii rezultă că, în interpretarea i, f_{ik} este adevărată.

Construim acum o funcţie g_i, corespunzătoare unei interpretări i, astfel:

$$g_i = f_{i1} \wedge ... \wedge f_{in}$$

Din definiţia funcţiei f_{ik} şi din definiţia semantică a conjuncţiei rezultă că funcţia g_i este adevărată în interpretarea i. Însă g_i este totodată falsă în orice altă interpretare, diferită de interpretarea aleasă, i. Acest lucru rezultă din faptul că într-o interpretare j, diferită de i, cel puţin o funcţie f_{ik} are un argument care diferă de valoarea de adevăr pe care p_k o ia în interpretarea i; adică funcţia f_{ik} ia valoarea logică fals şi cu aceasta întreaga conjuncţie $f_{i1} \wedge ... \wedge f_{in}$ devine falsă.

După cum funcţia $\alpha(p_1,..., p_n)$ este sau nu o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ vom avea, corespunzător, următoarele două cazuri:

1. $\alpha(p_1,..., p_n)$ ia valoarea logică adevărat pentru toate cele 2^n interpretări, adică este o formulă validă. În acest caz $\alpha(p_1,..., p_n)$ poate fi scrisă, echivalent / echiveridic în forma: $\neg(p_1 \wedge \neg p_1) \wedge \neg(p_2 \wedge \neg p_2) \wedge ... \wedge \neg(p_n \wedge \neg p_n)$. Şi astfel, funcţia $\alpha(p_1,..., p_n)$ a fost definită utilizând doar $\neg$ şi $\wedge$.

2. $\alpha(p_1,..., p_n)$ nu este o formulă validă. În acest caz fie $i_1,..., i_m$ cele m interpretări în care $\alpha(p_1,..., p_n)$ ia valoarea logică *fals*. Construim acum o funcţie de adevăr h astfel:

$$h = \neg g_{i_1} \wedge ... \wedge \neg g_{i_m}$$

Funcţia h va fi falsă doar dacă cel puţin un conjunct este fals, echivalent, doar dacă cel puţin o funcţie g_{i_r} ($r = 1,...,m$) este adevărată. Echivalent, funcţia h va fi falsă într-o interpretare i_r în care şi $\alpha(p_1,..., p_n)$ este falsă, motiv pentru care vom pune $\alpha(p_1,..., p_n) = h$. Şi deci şi în acest caz funcţia $\alpha(p_1,..., p_n)$ a fost definită doar pe baza $\neg$ şi $\wedge$.

Să revenim acum cu explicații și exemple la teorema de mai sus.

Să presupunem că funcția de adevăr (i.e. formula) considerată este $\alpha(p,q)=(p_1 \equiv p_2)$ a cărei matrice este:

	p_1	p_2	$p_1 \equiv p_2$
i_1	1	1	1
i_2	1	0	0
i_3	0	1	0
i_4	0	0	1

$i = 1,\dots,4$

$k = 1,2$ $\qquad f_{ik} = p_k$, dacă $p_k = 1$

$\qquad\qquad f_{ik} = \neg p_k$, dacă $p_k = 0$

Avem, așadar, pentru linia întâi: $f_{11} = p_1$, $f_{12} = p_2$; pentru linia a doua: $f_{21} = p_1$, $f_{22} = \neg p_2$, pentru linia a treia: $f_{31} = \neg p_1$, $f_{32} = p_2$; pentru linia a patra: $f_{41} = \neg p_1$, $f_{42} = \neg p_2$. Iar acum funcția $g_i = f_{i1} \wedge \dots \wedge f_{in}$:

$i=1$: $g_1 = f_{11} \wedge f_{12} = p_1 \wedge p_2 = 1 \wedge 1 = 1$

$i=2$: $g_2 = f_{21} \wedge f_{22} = p_1 \wedge \neg p_2 = 1 \wedge 1 = 1$

$i=3$: $g_3 = f_{31} \wedge f_{32} = \neg p_1 \wedge p_2 = 1 \wedge 1 = 1$

$i=4$: $g_4 = f_{41} \wedge f_{42} = \neg p_1 \wedge \neg p_2 = 1 \wedge 1 = 1$

Așadar, funcția g_i este adevărată în interpretarea i. Să arătăm că g_i este falsă în *orice altă* interpretare. Să luăm funcția g_2 citită în interpretarea 1. În acest caz, $g_2 = p_1 \wedge \neg p_2 = 1 \wedge 0 = 0$ (deoarece în interpretarea 1 $p_2 = 1$ și deci $\neg p_2 = 0$). După cum rezultă din acest exemplu, funcția g_i este *falsă* în orice altă interpretare, deoarece cel puțin un conjunct al funcției g_i este fals (deoarece există cel puțin un k astfel că p_k ia valoarea logică *opusă* valorii ei din interpretarea i) și astfel întreaga conjuncție este falsă.

Pentru cele două cazuri mai sus menționate:

1. $\alpha(p_1,\dots,p_n)$ este validă. Fie $\alpha(p_1,p_2)=(p_1 \supset p_2)\supset(\neg p_2 \supset \neg p_1)$ eq $\neg(\neg p_1 \vee p_2)\vee(p_2 \vee \neg p_1)$ eq $(p_1 \wedge \neg p_2)\vee(p_2 \vee \neg p_1)$ eq $(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1)\wedge(\neg p_2 \vee p_2 \vee \neg p_1)$ eq $(p_1 \vee \neg p_1)\wedge(p_2 \vee \neg p_2)$ eq $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)\wedge \neg(p_2 \wedge \neg p_2)$. Și deci $\alpha(p_1,p_2)$ a fost definită doar prin intermediul $\neg$ și $\wedge$.

2. $\alpha(p_1,\dots,p_n)$ nu este validă. Fie $\alpha(p_1,p_2,p_3): \neg[(p_1 \equiv p_2)\wedge p_3]$.

	p_1	p_2	p_3	$p_1 \equiv p_2$	$(p_1 \equiv p_2)\wedge p_3$	$\neg[(p_1 \equiv p_2)\wedge p_3]$
i_1	1	1	1	1	1	0
	1	1	0	1	0	1
	1	0	1	0	0	1
	1	0	0	0	0	1
	0	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	0	1
i_2	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	1	0	1

Cele două interpretări în care α este falsă sunt prima şi a şaptea; le renumerotăm i_1 şi i_2. Construim acum funcţia $h = \neg g_{i_1} \wedge ... \wedge \neg g_{i_m}$, adică

$h = \neg g_{i_1} \wedge \neg g_{i_2} = \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) = \alpha(p_1, p_2, p_3)$. Să arătăm acum, prin transformări sintactice, că $\alpha(p_1, p_2, p_3)$ poate fi redată în expresia de mai sus, care conţine doar operatorii $\neg$ şi $\wedge$.

$\alpha(p_1, p_2, p_3) = \neg[(p_1 \equiv p_2) \wedge p_3]$ eq $\neg\{[(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)] \wedge p_3\}$ eq $\neg[(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)]$ eq $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$.

În cazul funcţiei $\alpha(p_1, p_2) = (p \equiv q)$ procedăm similar.

Adică $h = \neg g_{i_1} \wedge \neg g_{i_2} = \neg(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_2)$ eq $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$ eq $(p_1 \supset p_2) \wedge (p_2 \supset p_1)$ eq $p_1 \equiv p_2$.

Teorema 1 exprimă un rezultat fundamental cu privire la completitudinea funcţională a mulţimilor de operatori. Fiindcă conjuncţia poate fi definită utilizând $\neg$ şi $\vee$ sau $\neg$ şi $\supset$ (i.e. $(p \wedge q) =_{df} \neg(\neg p \vee \neg q) =_{df} \neg(p \supset \neg q)$, rezultă că $M = \{\neg, \vee\}$ şi $M = \{\neg, \supset\}$ formează, de asemenea, mulţimi funcţional complete de operatori. Mai mult, definiţiile $\neg p =_{df} p / p$ şi $p \wedge q =_{df} \neg(p / q)$ ne arată că $M = \{/\}$ formează o astfel de mulţime funcţional completă. Iar definiţiile $\neg p =_{df} p \downarrow p$ şi $p \vee q =_{df} \neg(p \downarrow q)$ ne arată că şi $\neg$ şi $\vee$ pot fi reduse la $\downarrow$. Şi fiindcă $M = \{\neg, \vee\}$ este o mulţime funcţional completă de operatori, rezultă că şi $M = \{\downarrow\}$ formează o astfel de mulţime.

Cum $M = \{\neg, \wedge\}$ şi $M = \{\neg, \vee\}$ sunt mulţimi funcţional complete, conchidem că $M = \{\neg, \wedge, \vee\}$ este funcţional completă. Deşi acest lucru rezultă cu claritate din cele de mai sus, vom demonstra acest fapt într-o teoremă al cărei rezultat este paralel celui conţinut în *Teorema 1*.

Teorema 2. $M = \{\neg, \wedge, \vee\}$ este funcţional completă. (Echivalent: orice funcţie de adevăr a $\mathcal{L}_p$ poate fi generată de o expresie care conţine strict operatorii negaţie, conjuncţie şi disjuncţie).

Demonstraţie. Vom considera din nou funcţiile f_{ik} şi g_i, aşa cum au fost definite în Teorema 1. După cum funcţia $\alpha(p_1, ..., p_n)$ este sau nu o formulă *nesatisfiabilă* vom avea, din nou, două cazuri:

1. $\alpha(p_1, ..., p_n)$ este o formulă nesatisfiabilă. În acest caz $\alpha(p_1, ..., p_n)$ poate fi scrisă echivalent / echiveridic în forma: $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee ... \vee (p_n \wedge \neg p_n)$.

Exemplu. $\alpha(p_1, ..., p_n)$: $\neg\{[(p_1 \supset p_2) \wedge (p_2 \supset p_3)] \supset (p_1 \supset p_3)\}$

$\neg\{[(p_1 \supset p_2) \wedge (p_2 \supset p_3)] \supset (p_1 \supset p_3)\}$ eq $\neg\{\neg[(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3)] \vee (\neg p_1 \vee p_3)\}$ eq $[(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3)] \wedge \neg(\neg p_1 \vee p_3)$ eq $[(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3)] \wedge p_1 \wedge \neg p_3$ eq $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_1 \wedge \neg p_3)$ eq $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_3 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_3)$ eq $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_3)$.

2. $\alpha(p_1, ..., p_n)$ este o formulă satisfiabilă (în sens larg). În acest caz, din cele 2^n interpretări vom alege, de data aceasta, acele interpretări (i.e. linii) în care $\alpha(p_1, ..., p_n)$ ia valoarea logică *adevărat*. Fie $i_1, ..., i_l$ toate aceste interpretări. Construim acum o funcţie

$h^* = g_{i_1} \vee \ldots \vee g_{i_l}$

şi punem, simplu, $\alpha(p_1,\ldots,p_n) = h^*$.

Exemplu. $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$: $\neg[(p_1 \equiv p_2) \wedge p_3]$, adică formula luată la exemplul Th1, cazul 2. În acest caz $\alpha(p_1,\ldots,p_n) = h^* =$ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee$ $\vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$. Putem verifica acest lucru, obţinând acelaşi rezultat prin transformări sintactice corecte ale formulei $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$.

$\neg[(p_1 \equiv p_2) \wedge p_3]$ eq $\neg\{[(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)] \wedge p_3\}$ eq $[\neg(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)] \vee \neg p_3$ eq $[(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)] \vee \neg p_3$ eq $(\neg p_1 \wedge p_1) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_2 \wedge p_1) \vee (\neg p_2 \wedge p_2) \vee \neg p_3$ eq $(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_3$.

Pentru a ajunge la rezultatul căutat va trebui ca în fiecare disjunct să introducem variabilele care lipsesc. În exemplul nostru, în primi doi disjuncţi lipseşte variabila p_3 iar în ultimul lipsesc variabilele p_1 şi p_2. Dacă D este disjunctul considerat, atunci introducerea unei variabile p_i se face după următoarea relaţie:

D eq $D \wedge (p_i \vee \neg p_i)$ eq $(D \wedge p_i) \vee (D \wedge \neg p_i)$.

Faptul că această relaţie are loc este uşor de remarcat. Căci $p_i \vee \neg p_i$ ia întotdeauna valoarea logică adevărat, iar adăugarea unui argument adevărat unei conjuncţii (D fiind o *conjuncţie* de variabile propoziţionale negate sau nenegate) nu-i alterează valoarea de adevăr.

Pe baza acestei relaţii avem:

$\neg p_1 \wedge p_2$ eq $(\neg p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_3)$ eq $(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$

$p_1 \wedge \neg p_2$ eq $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$

$\neg p_3$ eq $(\neg p_3 \wedge p_1) \vee (\neg p_3 \wedge \neg p_1)$ eq

eq $(\neg p_3 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_3 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_3 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$

În fine $\alpha(p_1,\ldots,p_n) = (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee$ $\vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$, de unde, prin reordonarea disjuncţilor (pe baza comutativităţii), după ce am eliminat disjuncţii care se repetă, obţinem rezultatul dorit.

Exerciţii

1. Se dă următorul şir de valori de adevăr, care reprezintă valorile unei funcţii de adevăr binare $\alpha(p_1, p_2)$, în asignarea standard: 1100.

a) Să se determine, pe baza *Th* 1 şi *Th* 2 de mai sus, două expresii, una care conţine strict operatorii $\neg$ şi $\wedge$ iar cealaltă operatorii $\neg$, $\wedge$ şi $\vee$ şi care pot genera funcţia dată.

b) Să se demonstreze, prin transformări sintactice corecte, echiveridicitatea $\alpha(p_1, p_2)$ eq p_1, în ambele cazuri.

Soluţie. $\alpha(p_1, p_2)$ este prependenţa, adică

p_1	p_2	$\alpha(p_1, p_2)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

a) În acord cu *Th* 1, $\alpha(p_1, p_2) = h = \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$, iar în acord cu Th 2, $\alpha(p_1, p_2) = h^* = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$.

b) $\neg(\neg p_1 \wedge p_2) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ eq $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$ eq $p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_2)$ eq p_1.
Similar pentru cealaltă expresie.

2. Aceleaşi cerinţe ca la exerciţiu 1 pentru funcţiile $\neg p$, q şi $\neg q$.

3. Se dau următoarele funcţii de adevăr:

α_1[9]: $[(p / q) \supset \neg r] \downarrow (p \wedge r)$

$\alpha_2 : [(p + q) \supset r] / [(p \downarrow \neg q) \vee r]$

$\alpha_3 : [(p / q) \supset r] \vee (p \wedge r)$

$\alpha_4 : [(p \supset q) \wedge (p \supset r)] \supset (p \vee r)$

$\alpha_5 : (p \wedge q) \supset [(p + q) \wedge (\neg p \vee q)]$

a) Construiţi matricele acestor funcţii de adevăr.

b) Determinaţi, în fiecare caz, două expresii, una care conţine strict operatorii $\neg$ şi $\wedge$ iar cealaltă operatorii $\neg$, $\wedge$ şi $\vee$ şi care pot genera funcţia dată.

c) Verificaţi acest fapt prin transformări sintactice adecvate.

d) Pentru α_1 construiţi o expresie echiveridică în care operatorul „$\downarrow$" nu mai apare; pentru α_2, una în care „$+$" şi „$\supset$" nu mai apar; pentru α_3, o expresie care nu conţine „$\vee$" iar pentru α_4 şi α_5 construiţi expresiile echiveridice corespunzătoare care nu conţin „$\supset$".

2.1.4. Procedee de decizie în $\mathcal{L}_p$

Aşa cum am văzut în paragraful 2.1.2.1, formulele $\mathcal{L}_p$ pot fi formule întotdeauna adevărate (valide), uneori adevărate (satisfiabile) sau niciodată adevărate (nesatisfiabile). În practică este necesar ca, de fiecare dată, să putem spune cărei clase îi aparţine o formulă oarecare a $\mathcal{L}_p$. Înainte de toate ne interesează să putem decide dacă o formulă a $\mathcal{L}_p$ este validă sau nu.

Definiţie. A decide în $\mathcal{L}_p$ înseamnă a găsi un procedeu efectiv prin care, într-un număr finit de paşi, să se poată stabili dacă o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_p$ este validă sau nu.

Aşa cum vom vedea mai jos, prin aplicarea oricăruia din procedeele descrise vom putea stabili, în cazul în care formula este nevalidă, dacă formula respectivă este satisfiabilă sau nu.

2.1.4.1. Procedeul matriceal

Procedeul matriceal este cel descris în paragraful 2.1.2.3. Decizia cu ajutorul acestui procedeu o facem în acord cu definiţiile 1 – 3 ale acelui paragraf. Să mai considerăm un exemplu simplu.

Fie $\alpha : [(p / \neg q) \supset r] \supset [(p \downarrow \neg r) \wedge q]$

În acord cu algoritmul prezentat în 2.1.2.3 matricea formulei α este:

[9] În cele ce urmează vom omite menţionarea argumentelor după simbolul „α", iar pentru variabile vom utiliza simbolurile $p, q, \ldots$, în loc de $p_1, p_2, \ldots$ În toate cazurile simbolurile „ : " şi „$=$", puse după numele $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ al formulelor, au acelaşi înţeles: „este".

p	q	r	$\neg q$	$p/\neg q$	$(p/\neg q)\supset r$	$\neg r$	$p\downarrow\neg r$	$(p\downarrow\neg r)\wedge q$	α
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

În acord cu definiția 3 formula α este satisfiabilă (realizabilă), deoarece coloana finală, care redă valorile logice ale formulei α, pentru toate cele 8 interpretări ale variabilelor ei, conține valori *neomogene* de adevăr.

2.1.4.2. Reductio test

Indiscutabil, procedeul matriceal devine inconvenabil atunci când numărul variabilelor propoziționale crește. De aceea, pentru verificarea validității unei formule a $\mathcal{L}_p$, putem proceda prin reducere la absurd, în următorul fel. Presupunem că formula dată, α, este nevalidă. Există, așadar, o interpretare a variabilelor ei care falsifică formula α. Dacă în încercarea de a găsi o astfel de interpretare ajungem la o contradicție, atunci formula nu poate fi falsificată și deci este o formulă validă. În caz contrar, α este nevalidă. Acest procedeu se numește *reductio test*.

Exemplu.

$\alpha : (p\supset q)\supset [(r\vee p)\supset (r\vee q)]$

Presupunem că α poate fi falsificată. Aceasta înseamnă că $(p\supset q)=1$, $(r\vee p)=1$ și $(r\vee q)=0$. Din falsitatea formulei $r\vee q$ deducem $r=0$ și $q=0$. Cum $(r\vee p)=1$ iar $r=0$, rezultă că $p=1$. Dacă transferăm aceste valori logice în antecedentul implicației, $p\supset q$, rezultă că implicația $p\supset q$ este adevărată (în acord cu presupunerea făcută) atunci când $p=1$ și $q=0$. Contradicție! Și deci α nu poate fi falsificată, echivalent α este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Exerciții. Decideți cu ajutorul *reductio test* asupra următoarelor formule:

$\alpha_1 : [(p\supset q)\wedge (q\supset r)]\supset (p\supset r)$

$\alpha_2 : [(p/q)\wedge r]\vee (p\wedge\neg r)$

$\alpha_3 : (p+q)\wedge\neg q\wedge r$

$\alpha_4 : [(p\wedge q)\supset r]\supset (p\supset r)$

2.1.4.3. Procedeul Quine

Este un procedeu de decizie mai elegant decât cel matriceal, mai ales atunci când numărul variabilelor propoziționale este mare.

Procedeul Quine[10] se bazează pe *asignarea succesivă* de valori de adevăr variabilelor formulei considerate și pe aplicarea regulilor de adevăr ale operatorilor logici din formulă. De regulă, pentru a simplifica cât mai mult formula care trebuie evaluată se alege mai întâi

[10] Cf. W.v.O. Quine, *Methods of Logic*, Holt, Rinehort and Winston, Inc., 1972.

variabila care apare cel mai frecvent şi i se atribuie, alternativ, valorile logice 1, respectiv 0. Dacă în felul acesta nu se ajunge la o valoare de adevăr determinată, procedeul continuă cu variabila următoare, până când se obţin *doar* valori de adevăr. Decizia o vom face similar procedeului matriceal, adică pe baza definiţiilor 1 – 3 din 2.1.2.3.

Formularea regulilor de adevăr ale operatorilor logici o facem pe baza matricei operatorului respectiv. Fiecare operator este explicitat prin două reguli, una pentru cazul în care un argument este adevărat iar cealaltă pentru cazul în care un argument este fals. Prin aplicarea unei reguli asupra formulei care-l conţine, formula se reduce fie la o valoare de adevăr, fie la celălalt argument negat sau nenegat.

Regulile de adevăr ale operatorilor logici.

$\wedge$: $(\alpha \wedge \beta)$. R_1. Dacă într-o conjuncţie un argument este *adevărat*, atunci valoarea logică a conjuncţiei se reduce la valoarea celuilalt argument.

R_2. Dacă într-o conjuncţie un argument este *fals*, atunci valoarea logică a conjuncţiei se reduce la fals.

$\vee$: $(\alpha \vee \beta)$ (Exerciţiu)

$\supset$: $(\alpha \supset \beta)$ R_1. Dacă într-o implicaţie un argument este *adevărat*, atunci valoarea logică a implicaţiei se reduce la valoarea consecventului.

R_2. Dacă într-o implicaţie un argument este *fals*, atunci valoarea logică a implicaţiei se reduce la valoarea *negată* a antecedentului.

Formularea acestor reguli pentru implicaţie o facem cu uşurinţă comparând, în matricea implicaţiei, valorile funcţiei cu valorile argumentelor ei. Pentru R_1, de exemplu, luăm cazurile (i.e. liniile) în care (cel puţin) un argument este adevărat, adică primele trei linii. Observăm că valorile funcţiei, pentru primele trei categorii de asignări, coincid cu valorile consecventului. Pentru R_2 procedăm similar: luăm liniile în care (cel puţin) un argument este fals, adică liniile 2, 3 şi 4, şi observăm că valorile funcţiei coincid cu valorile *negate* ale antecedentului. La fel procedăm şi în stabilirea regulilor operatorilor $\subset, \not\subset$ şi # (Exerciţiu).

$\equiv$: $(\alpha \equiv \beta)$ R_1. Dacă într-o echivalenţă un argument este *adevărat*, atunci valoarea logică a echivalenţei se reduce la valoarea celuilalt argument.

R_2. Dacă într-o echivalenţă un argument este *fals*, atunci valoarea logică a echivalenţei se reduce la valoarea *negată* a celuilalt argument.

$+$: $(\alpha + \beta)$ (Exerciţiu)

$/$: (α / β) R_1. Dacă într-o incompatibilitate un argument este adevărat, atunci valoarea logică a incompatibilităţii se reduce la valoarea *negată* a celuilalt argument.

R_2. Dacă într-o incompatibilitate un argument este fals, atunci valoarea logică a incompatibilităţii se reduce la adevărat (de ce?)

$\downarrow$: $(\alpha \downarrow \beta)$ (Exerciţiu)

Remarcă. Cele şase funcţii din tabelul lui Wittgenstein $(p, q, \neg p, \neg q, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ rămân în afara consideraţiilor, deoarece ele nu corelează în vreun fel valorile logice ale argumentelor lor.

Exemplu. Fie $\alpha: [(p \wedge q) \supset r] \supset (p / \neg q)$.

$$p=1$$
$$[(1\wedge q)\supset r]\supset(1/\neg q)$$
$$(q\supset r)\supset q$$

$$q=1$$
$$(1\supset r)\supset 1$$
$$r\supset 1$$
$$1$$

$$q=0$$
$$(0\supset r)\supset 0$$
$$1\supset 0$$
$$0$$

$$p=0$$
$$[(0\wedge q)\supset r]\supset(0/\neg q)$$
$$(0\supset r)\supset 1$$
$$1\supset 1$$
$$1$$

Exerciții. Decideți cu ajutorul procedeului Quine asupra următoarelor formule ale $\mathcal{L}_p$:

$\alpha_1 : (p\supset q)\supset[(q\supset r)\supset(p\supset r)]$

$\alpha_2 : [(p\supset q)\supset(q\supset r)]\supset(p\supset r)$

$\alpha_3 : [(p/q)\supset\neg q]+[(\neg p/s)\vee t]$

$\alpha_4 : [(p\downarrow q)\vee r]\wedge[(t\equiv p)\wedge\neg q]$

$\alpha_5 : [(p\supset q)\wedge(p\supset\neg q)]\supset\neg p$

$\alpha_6 : [(p/q)\supset(r/\neg r)]\supset(s\wedge\neg s)$

$\alpha_7 : [(p\equiv q)\wedge(r\equiv s)]\supset[(p\wedge r)\equiv(q\wedge s)]$

Remarcă. Arătați că formula din α_7 rămâne o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ dacă operatorul „$\wedge$" din consecventul implicației este înlocuit cu oricare din următorii operatori binari ai $\mathcal{L}_p$: $\vee,\supset,\subset,\equiv,+,/,\downarrow,\not\subset,\#$.

2.1.4.4. Formele normale în $\mathcal{L}_p$

Definiția 1. Formele normale în $\mathcal{L}_p$ sunt expresii a căror structură sintactică ne permite să decidem asupra unei formule a $\mathcal{L}_p$.

Aşadar, atunci când decidem cu ajutorul formelor normale nu mai asignăm valori de adevăr variabilelor propoziționale, ci construim nişte expresii, logic echivalente formulei asupra căreia vrem să decidem, şi decidem doar pe baza configurațiilor de simboluri. În toate transformările sintactice efectuate dimensiunea semantică e una implicită.

În logică, în general, formele normale sunt de o mare varietate. Lucrarea de față tratează doar cazul în care în aceste construcții apar doar operatorii $\neg,\wedge,\vee$, numiți *operatori booleeni* (motiv pentru care ele se mai numesc şi forme normale booleene).

Formele normale booleene se constituie în două clase distincte, după cum operatorul principal (cel care dă numele expresiei) este conjuncția sau disjuncția.

Definiția 2. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în forma normală conjunctivă (abreviat: α_c) dacă are forma unei conjuncții $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n$ $(n\geq 1)$, în care fiecare conjunct α_i $(i=1,\ldots,n)$ are forma unei disjuncții $\beta_{i_1}\vee\ldots\vee\beta_{i_m}$ $(m\geq 1)$, ai cărei membri sunt variabile propoziționale nenegate sau negate o singură dată.

Teorema 1. Orice formulă a $\mathcal{L}_p$ admite o formă normală conjunctivă logic echivalentă (i. e. $\vDash\alpha\equiv\alpha_c$).

Demonstrație. Demonstrația acestei teoreme o vom face, simplu, indicând *algoritmul* aducerii unei formule date la forma normală conjunctivă. Algoritmul are următorii paşi:

1. Se înlocuiesc toate subformulele care conțin alți operatori decât operatorii $\neg,\wedge,\vee$ cu expresii echivalente care conțin doar aceşti operatori. În felul acesta obținem o formulă, echivalentă formulei date, dar care conține numai operatori booleeni. De exemplu, dacă α

este formula $[(p \supset q) \wedge \neg r] \vee (q / \neg q)$, atunci avem, corespunzător, subformulele $p \supset q$ şi $q / \neg q$ care trebuie transformate echivalent în $\neg p \vee q$ şi $\neg(q \wedge \neg q)$. Şi obţinem astfel formula $\alpha_1 : [(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee \neg(q \wedge \neg q)$, echivalentă formulei α; aşadar $\models \alpha \equiv \alpha_1$.

2. Se înlocuiesc toate subformulele în care negaţia neagă o expresie care conţine un operator binar, cu expresii echivalente în care negaţia neagă numai variabile propoziţionale.

În α_1, $\neg(q \wedge \neg q)$ devine $\neg q \vee \neg\neg q$, şi deci α_1 devine, echivalent, $\alpha_2 : [(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee (\neg q \vee \neg\neg q)$. Şi deci $\models \alpha_1 \equiv \alpha_2$.

3. Se înlocuiesc toate subformulele de forma $\neg\neg p_i$, unde p_i este o variabilă propoziţională, cu p_i. Fireşte, dacă avem mai multe negaţii, eliminarea lor se face astfel încât ceea ce păstrăm este o variabilă propoziţională nenegată sau negată o singură dată (cf. formulelor 1 şi 2, § 2.1.2.3). Şi obţinem astfel $\alpha_3 : [(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee (\neg q \vee q)$, astfel că $\models \alpha_2 \equiv \alpha_3$.

4. Se înlocuiesc succesiv toate acele subformule de forma $\gamma_1 \vee (\gamma_2 \wedge \gamma_3)$ cu expresiile echivalente corespunzătoare, de forma $(\gamma_1 \vee \gamma_2) \wedge (\gamma_1 \vee \gamma_3)$. Şi în felul acesta din α_3 obţinem formula echivalentă ei: $\alpha_c : (\neg p \vee q \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee q)$, şi care este, în acord cu Def. 2, forma normală conjunctivă a formulei iniţiale α. Şi astfel, $\models \alpha_3 \equiv \alpha_c$. De unde, pe baza tranzitivităţii echivalenţei, obţinem $\models \alpha \equiv \alpha_c$.

Remarcă. În aceste transformări echiveridice adesea aplicarea algoritmului nu este obligatorie, deoarece se pot executa simultan mai mulţi paşi ai algoritmului.

Teorema următoare ne spune cum stabilim cu ajutorul formelor normale conjunctive dacă o formulă a $\mathcal{L}_p$ este validă sau nu.

Teorema 2. O formulă a $\mathcal{L}_p$, aflată în forma normală conjunctivă, este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ ddacă fiecare conjunct conţine cel puţin o variabilă propoziţională atât negată cât şi nenegată.

Demonstraţie. Dacă formula α este validă, atunci ea este adevărată în orice interpretare a variabilelor sale. Cum $\models \alpha \equiv \alpha_c$ şi $\models \alpha$, rezultă că α_c este o formulă validă, fapt evident deoarece fiecare conjunct conţine formula validă $p_i \vee \neg p_i$. Reciproc, dacă fiecare conjunct al formulei α_c are forma $p_1 \vee ... \vee p_i \vee \neg p_i \vee ... \vee p_m$, atunci, pe baza matricei operatorului $\vee$ conchidem că un astfel de conjunct este întotdeauna adevărat (i.e. valid), deoarece conţine disjuncţia validă $p_i \vee \neg p_i$. Şi astfel, indiferent de asignările făcute celorlalte variabile propoziţionale din conjunct, el este unul valid. Şi astfel α_c este o formulă validă. Însă α este echivalentă cu α_c. Şi deci α este o formulă validă.

Dacă, dimpotrivă, α_c nu are forma menţionată de teoremă, adică cel puţin un conjunct nu conţine o variabilă propoziţională atât negată cât şi nenegată, atunci α este nevalidă (argumentaţi).

Definiţia 3. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în forma normală conjunctivă perfectă (abreviat: α_c^{π}) dacă este în forma normală conjunctivă şi fiecare conjunct conţine toate variabilele propoziţionale ale formulei, negate sau nenegate.

Teorema 3. Orice formulă a $\mathcal{L}_p$ admite o formă normală conjunctivă perfectă logic echivalentă (i.e. $\models \alpha \equiv \alpha_c^{\pi}$).

Demonstrație. Vom proceda ca mai sus, la Th. 1, indicând algoritmul aducerii unei formule date la forma normală conjunctivă perfectă. Potrivit teoremei 1, formula α admite forma normală conjunctivă α_c. Dacă unul dintre conjuncți, α_i nu conține variabila propozițională p_k, atunci această variabilă se introduce în conjunctul α_i pe baza următoarei transformări echivalente: $\alpha_i \equiv [\alpha_i \vee (p_k \wedge \neg p_k)] \equiv [(\alpha_i \vee p_k) \wedge (\alpha_i \vee \neg p_k)]$. Pe baza acestor echivalențe putem introduce, în fiecare conjunct, toate variabilele formulei α. Forma normală conjunctivă perfectă astfel obținută este echivalentă cu α_c și deci cu α (prin tranzitivitatea „$\equiv$"). Așadar, o formulă α a $\mathcal{L}_p$ este validă ddacă forma ei normală conjunctivă perfectă este validă.

În formula α_c, din exemplul de mai sus, în primul conjunct lipsește r iar în al doilea q. Introducem aceste variabile, corespunzător, în modul mai sus indicat.

Primul conjunct, $\neg p \vee q \vee \neg q \vee q$, devine, echivalent, $(\neg p \vee q \vee \neg q \vee q) \vee (r \wedge \neg r)$, respectiv $(\neg p \vee q \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg q \vee q \vee \neg r)$. Al doilea, $\neg r \vee \neg q \vee q$, devine $(\neg r \vee \neg q \vee q) \vee (p \wedge \neg p)$, adică $(\neg r \vee \neg q \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee q \vee \neg p)$. Și astfel,

$\alpha_c^x : (\neg p \vee q \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg q \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee q \vee \neg p)$.

Definiția 4. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în forma normală disjunctivă (abreviat: α_d) dacă are forma unei disjuncții $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ $(n \geq 1)$, în care fiecare disjunct α_i $(i = 1,\ldots,n)$ are forma unei conjuncții $\beta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \beta_{i_m}$ ($m \geq 1$), ai cărei membri sunt variabile propoziționale nenegate sau negate o singură dată.

Teorema 4. Orice formulă a $\mathcal{L}_p$ admite o formă normală disjunctivă logic echivalentă (i.e. $\models \alpha \equiv \alpha_d$).

Demonstrație. Similar teoremei 1, vom indica algoritmul aducerii unei formule date la forma normală disjunctivă. Primii 3 pași sunt cei menționați la teorema 1.

Pasul 4. Se înlocuiesc succesiv toate acele subformule de forma $\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \vee \gamma_3)$ cu expresiile echivalente corespunzătoare, de forma $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \vee (\gamma_1 \wedge \gamma_3)$. În felul acesta obținem forma normală disjunctivă, α_d, a formulei α, astfel că $\models \alpha \equiv \alpha_d$.

Din formula din exemplul precedent (din pasul 3) $[(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee (\neg q \vee q)$ obținem astfel, în pasul 4, $\alpha_d : (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg q \vee q$.

Dacă prin intermediul formelor normale conjunctive putem decide dacă o formulă este validă sau nu, cu ajutorul formelor normale disjunctive putem testa *nesatisfiabilitatea* formulei în cauză.

Teorema 5. O formulă a $\mathcal{L}_p$, aflată în forma normală disjunctivă, este o formulă nesatisfiabilă a $\mathcal{L}_p$ ddacă fiecare disjunct conține cel puțin o variabilă propozițională atât negată cât și nenegată.

Demonstrație. Dacă formula α este nesatisfiabilă, atunci α ia valoarea logică fals pentru orice interpretare a variabilelor sale. Cum $\models \alpha \equiv \alpha_d$, rezultă că și α_d este nesatisfiabilă. Însă cum α_d este o disjuncție de conjuncți, rezultă că fiecare disjunct este nesatisfiabil, fapt evident din construcția lui sintactică, deoarece este o conjuncție care conține conjuncția nesatisfiabilă $p_i \wedge \neg p_i$. Reciproc (similar).

Dacă, dimpotrivă, α_d nu are forma menţionată de teoremă, adică cel puţin un disjunct nu conţine o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei, atunci formula nu este nesatisfiabilă (de ce?).

Exemplu. $\alpha: [\neg(p \supset q) \supset \neg q] \supset [(q / r) \wedge (q \wedge r)]$

Aducem formula α la forma normală disjunctivă.

1. $\{\neg[\neg\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q] \vee [\neg(q \wedge r) \wedge (q \wedge r)]\} \equiv \neg(\neg p \vee q \vee \neg q) \vee [\neg(q \wedge r) \wedge (q \wedge r)]$
2. $(\neg\neg p \wedge \neg q \wedge \neg\neg q) \vee [(\neg q \vee \neg r) \wedge (q \wedge r)]$
3. $(p \wedge \neg q \wedge q) \vee [(\neg q \vee \neg r) \wedge (q \wedge r)]$
4. $[(p \wedge \neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge q \wedge r) \vee (\neg r \wedge q \wedge r)] \equiv \alpha_d$

Aşadar, formula α este nesatisfiabilă.

Remarcă 1. Dacă o formulă α a $\mathcal{L}_p$ nu satisface nici teorema 2 şi nici teorema 5, atunci α este o formulă satisfiabilă.

Definiţia 5. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în forma normală disjunctivă perfectă (abreviat: α_d^x) dacă este în forma normală disjunctivă şi fiecare disjunct conţine toate variabilele propoziţionale ale formulei, negate sau nenegate.

Teorema 6. Orice formulă a $\mathcal{L}_p$ admite o formă normală disjunctivă perfectă logic echivalentă (i.e. $\models \alpha \equiv \alpha_d^x$).

Demonstraţie. Vom proceda similar demonstraţiei teoremei 3 indicând algoritmul construcţiei formulei α_d^x. Potrivit teoremei 4, orice formulă a $\mathcal{L}_p$ admite o formă normală disjunctivă logic echivalentă. Dacă, o dată construită α_d, unul dintre disjuncţi, α_i, nu conţine o variabilă propoziţională p_j, atunci vom introduce această variabilă în disjunctul respectiv, pe baza următoarelor echivalenţe: $\alpha_i \equiv [\alpha_i \wedge (p_j \vee \neg p_j)] \equiv [(\alpha_i \wedge p_j) \vee (\alpha_i \wedge \neg p_j)]$. În felul acesta putem introduce, în fiecare disjunct, variabilele care apar în formula α, obţinând astfel α_d^x astfel încât $\models \alpha \equiv \alpha_d^x$.

În exemplul de mai sus, fiecare dintre cei trei disjuncţi are o variabilă lipsă. În primul disjunct, de exemplu, putem introduce variabila r astfel:

$$(p \wedge \neg q \wedge q) \equiv [(p \wedge \neg q \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)] \equiv [(p \wedge \neg q \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge q \wedge \neg r)].$$

Similar procedăm cu ceilalţi disjuncţi şi, în final, construim α_d^x (exerciţiu).

În fine, încheiem acest paragraf cu câteva consideraţii privitoare la *relaţia dintre formele normale perfecte şi relaţia de consecinţă semantică.*

Pe baza formelor normale perfecte putem determina:

a) toate consecinţele semantice ale unei formule date
b) toate premisele unei formule date

În primul caz, construim mai întâi *forma normală conjunctivă perfectă,* α_c^x, a formulei date, α. Consecinţele semantice ale formulei α vor fi:

a) fiecare conjunct al α_c^x
b) fiecare conjuncţie de conjuncţi din α_c^x
c) formula ca atare, α_c^x.

În al doilea caz, construim mai întâi *forma normală disjunctivă perfectă,* α_d^x, a formulei date, α. Vor fi premise ale formulei:

a) fiecare disjunct al α_d^x

b) fiecare disjuncție de disjuncți din α_d^x

c) formula ca atare, α_d^x.

Remarcă 2. O dată construită matricea unei formule, formele normale perfecte pot fi, la rândul lor, construite direct de pe matrice. Fie, de exemplu, formula α din 2.1.4.1. Dacă din matricea acestei formule alegem acele linii în care α ia valoarea logică *adevărat*, atunci *forma normală disjunctivă perfectă* a formulei se obține legând conjunctiv variabilele fiecărei linii dintre cele alese (în raport cu valoarea logică a variabilei respective) și, apoi, conectând disjunctiv liniile. Pentru formula din 2.1.4.1. avem:

$$\alpha_d^x : (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Pentru construirea *formei normale conjunctive perfecte* procedăm după cum urmează. Alegem acele linii în care α ia valoarea logică *fals*, legăm disjunctiv variabilele propoziționale în *raport invers* cu valoarea lor logică, iar apoi conectăm conjunctiv aceste linii. Pentru formula din 2.1.4.1 avem:

$$\alpha_c^x : (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

Dacă aducem formula α la α_d^x și α_c^x vom obține, corespunzător, expresiile de mai sus (exercițiu).

Exerciții

a) Se dau următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$:

$\alpha_1 : (p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$

$\alpha_2 : [(p \wedge q) / r] \supset (p + r)$

$\alpha_3 : [(p \equiv q) \wedge r] \vee (r \downarrow \neg r)$

$\alpha_4 : (p \vee q) \supset (p \wedge q)$

$\alpha_5 : [(p + r) / \neg r] \supset p$

1. Decideți cu ajutorul procedeului matriceal asupra acestor formule.
2. Pe baza matricelor astfel obținute construiți formele normale perfecte ale lor.
3. Verificați rezultatul astfel obținut, cu ajutorul procedeului formelor normale.
4. Determinați toate consecințele și toate premisele fiecărei formule.

b) Ce corelație există între funcțiile h și h^* din 2.1.3.4 și formele normale perfecte?

2.1.5. Teoreme fundamentale ale $\mathcal{L}_p$

Să vedem, în fine, în acest paragraf, câteva teoreme importante ale $\mathcal{L}_p$, altele decât cele menționate în paragrafele anterioare.

Să luăm mai întâi un exemplu. Formula $\alpha : p \supset (q \supset p)$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ (verificați acest lucru). Dacă în această formulă în locul variabilei p, în cele două ocurențe ale sale, vom pune o formulă oarecare a $\mathcal{L}_p$, fie aceasta p/r, iar în locul variabilei q vom pune $q \wedge r$, atunci vom obține următoarea formulă a $\mathcal{L}_p$: $(p/r) \supset [(q \wedge r) \supset (p/r)]$. Cum formula α este o formulă validă și formula obținută din α, prin substituțiile menționate, este tot o formulă validă (exercițiu). Așadar, orice formulă *de forma* formulei α este o formulă validă. Iar acest lucru este valabil nu numai despre formula α de mai sus, ci despre *orice* formulă validă a $\mathcal{L}_p$ în care facem substituții.

Teorema substituției. Fie $\alpha(p_1,...,p_n)$ o formulă a $\mathcal{L}_p$ care conține variabilele propoziționale $p_1,...,p_n$. Fie $\alpha^*(p_1/\beta_1,...,p_n/\beta_n)$ formula obținută din $\alpha(p_1,...,p_n)$ prin substituția variabilelor $p_1,...,p_n$, în toate ocurențele lor, cu formule arbitrare $\beta_1,...,\beta_n$. Atunci

Dacă $\models \alpha$, atunci $\models \alpha^*$.

Demonstrație.

Dacă $\models \alpha$, atunci α ia valoarea logică adevărat pentru orice interpretare a variabilelor $p_1,...,p_n$; așadar, valoarea logică a formulei α este independentă de asignările făcute variabilelor ei. Însă, în α^*, în locul variabilelor $p_1,...,p_n$ intră formulele $\beta_1,...,\beta_n$ care, pentru orice interpretare a variabilelor pe care le conțin, iau *succesiv* valorile 1 și 0, adică valorile logice posibile ale celor *n* variabile propoziționale din α. Și deci și formula α^* este indiferentă la aceste valori logice ale formulelor $\beta_1,...,\beta_n$; așadar α^* este o formulă validă.

Remarci. 1. Conversa acestei teoreme nu este în general valabilă. Formula $(p \wedge q) \supset (p \supset q)$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Fie $\beta_1 : p \wedge q$ iar $\beta_2 : p \supset q$. Dacă în locul acestor formule punem, corespunzător, variabilele *r* și *s*, atunci, prin substituția făcută, obținem formula nevalidă $r \supset s$ a $\mathcal{L}_p$.

2. Enunțul teoremei substituției conține ideea substituției *simultane* a variabilelor propoziționale $p_1,...,p_n$ cu formule arbitrare $\beta_1,...,\beta_n$. Însă într-o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ putem alege orice număr de variabile în vederea substituirii lor, nu neaparat toate. În formula α de mai sus puteam să-l substituim pe *p* cu *p/r* și atât. *q* putea rămâne *q* (de altfel, în acest din urmă caz, puteam considera substituția redundantă a variabilei *q* cu ea însăși).

3. Prin substituție, dintr-o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ putem construi o infinitate de formule ale $\mathcal{L}_p$. Prin teorema substituției și aceste formule vor fi valide, fără a fi nevoie să le testăm validitatea.

Să luăm acum următorul exemplu. Fie $\alpha_\beta : [(p \supset q) \wedge (q / \neg r)] \supset (p \supset q)$, o formulă a $\mathcal{L}_p$ care conține subformula $\beta : p \supset q$. Fie $\alpha_\gamma : [(\neg p \vee q) \wedge (q / \neg r)] \supset (p \supset q)$ formula α_β de mai sus în care în locul subformulei β am pus formula $\gamma : \neg p \vee q$. Atunci, cum β este echivalentă cu γ, rezultă că $\alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$ (exercițiu). Acesta este înțelesul teoremei înlocuirii, pe care am utilizat-o în câteva rânduri în paragrafele anterioare [11], chiar dacă n-am menționat-o.

Teorema înlocuirii (echivalenților). Dacă β este o subformulă a lui α (simbolic α_β) iar α_γ se obține din înlocuirea a zero sau mai multe ocurențe ale subformulei β în α cu o formulă γ, atunci

Dacă $\models \beta \equiv \gamma$, atunci $\models \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

Demonstrație (inducție pe gradul formulei α).

În demonstrația acestei teoreme ne limităm la cazul în care în α înlocuim o singură ocurență a subformulei β cu formula γ. În felul acesta nu se restrânge nicidecum generalitatea teoremei, deoarece, evident, în cazul în care înlocuim zero ocurențe ale subformulei β cu γ, atunci α_γ este tocmai formula α, iar dacă vrem să înlocuim mai multe

[11] Comp. Formele normale în $\mathcal{L}_p$.

ocurențe ale lui β cu γ în formula α, atunci repetăm aplicarea teoremei în varianta pe care-o demonstrăm.

1. α nu conține nici un operator. α este așadar o variabilă propozițională, p, subformula β este tot p, iar α_γ este β. Cu ipoteza din enunțul teoremei (i.e. $\models \beta \equiv \gamma$), teorema înlocuirii are loc.

2. Presupunem că teorema are loc pentru orice formulă α al cărei grad este mai mic decât n $(n \geq 1)$ și arătăm, în pasul inductiv, că teorema are loc și pentru o formulă α al cărei grad este n.

În acord cu definiția conceptului de formulă, α are, în acest caz, una din următoarele forme: a) $\neg\delta$; b) $\delta \circ \varepsilon$, unde „$\circ$" denotă orice operator binar menționat în definiție.

În toate aceste cazuri gradul formulelor δ și ε este mai mic decât n și potrivit ipotezei inducției, teorema are loc pentru formulele δ și ε; așadar

Dacă $\models \beta \equiv \gamma$, atunci 1. $\models \delta_\beta \equiv \delta_\gamma$ și 2. $\models \varepsilon_\beta \equiv \varepsilon_\gamma$

În cazul a) α are forma $\neg\delta$. Și deci dacă $\models \beta \equiv \gamma$, atunci $\models \delta_\beta \equiv \delta_\gamma$ (prin ipoteza inducției). Însă $\models (\delta_\beta \equiv \delta_\gamma) \equiv (\neg\delta_\beta \equiv \neg\delta_\gamma)$. Și astfel, dacă $\models \beta \equiv \gamma$, atunci $\models \neg\delta_\beta \equiv \neg\delta_\gamma$, adică $\models \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

În cazul b) α are forma $\delta \circ \varepsilon$. Prin ipoteza inducției teorema are loc pentru δ și ε. Și astfel obținem $(\delta_\beta \circ \varepsilon_\beta) \equiv (\delta_\gamma \circ \varepsilon_\gamma)$ (prin *Remarcă* 2.1.4.3), unde $\delta_\beta \circ \varepsilon_\beta$ este $(\delta \circ \varepsilon)_\beta$, iar $\delta_\gamma \circ \varepsilon_\gamma$ este $(\delta \circ \varepsilon)_\gamma$.

Remarcă. Între substituție și înlocuire există următoarele deosebiri:

a) Operația substituției înseamnă substituția unei / unor *variabile propoziționale* cu formule arbitrare ale $\mathcal{L}_p$ (nu substituim formule arbitrare cu formule arbitrare!). În cazul înlocuirii, în cazul unei subformule din formula dată punem o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_p$ (sub asumpția echivalenței lor).

b) Substituția unei variabile propoziționale p cu o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_p$ trebuie realizată în *toate* ocurențele variabilei p; înlocuirea, în schimb, se poate realiza numeric arbitrar.

Teorema de normalitate. Pentru $n \geq 1$: $\alpha_1,...,\alpha_{n-1},\alpha_n \models \beta$ ddacă $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \models \alpha_n \supset \beta$.

Demonstrație (reductio ad absurdum)

a) Dacă $\alpha_1,...,\alpha_{n-1},\alpha_n \models \beta$ atunci $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \models \alpha_n \supset \beta$.

Presupunem 1. $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$ și 2 *non* $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \models \alpha_n \supset \beta$. Din 1 deducem că pentru orice interpretare a variabilelor propoziționale care apar în $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta$ are loc: 3. dacă $\alpha_1 \equiv ... \equiv \alpha_n = 1$, atunci $\beta = 1$ (prin definiție). Din 2 deducem că există o interpretare a variabilelor formulelor date astfel că 4. $\alpha_1 \equiv ... \equiv \alpha_{n-1} = 1$ și 5. $\alpha_n \supset \beta = 0$. Din 5 deducem 6. $\alpha_n = 1$ și 7. $\beta = 0$. Însă 7 contrazice 3, căci dacă $\alpha_n = 1$, atunci $\alpha_1 \equiv ... \equiv \alpha_n = 1$ și deci $\beta = 1$.

b) Dacă $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \models \alpha_n \supset \beta$, atunci $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$.

Presupunem 1. $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \models \alpha_n \supset \beta$ și 2. *non* $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$. Din 1 deducem că în orice interpretare a variabilelor din formulele date avem: 3. dacă $\alpha_1 \equiv ... \equiv \alpha_{n-1} = 1$ atunci $\alpha_n \supset \beta = 1$. Iar din 2 deducem că există o interpretare astfel că 4. $\alpha_1 \equiv ... \equiv \alpha_n = 1$ și 5. $\beta = 0$. Însă, sub asumpția adevărului formulelor $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$ (din 3) am dedus $\alpha_n \supset \beta = 1$. Cum $\alpha_n = 1$ (din 4) rezultă că $\beta = 1$, ceea ce contrazice 5.

Corolar. Pentru $n \geq 1$: $\alpha_1,...,\alpha_{n-1},\alpha_n \models \beta$ ddacă $\models \alpha_1 \supset (...\alpha_{n-1} \supset (\alpha_n \supset \beta)...)$.

Demonstrație (prin n aplicări succesive ale teoremei de normalitate). Semnificația acestui corolar rezidă în aceea că problema referitoare la consecințele semantice ale unei mulțimi de formule se reduce la problema *ce formule sunt valide*.

Teorema (*). Fie $\alpha(p_1,..., p_n)$ o formulă a $\mathcal{L}_p$, care conține variabilele propoziționale $p_1,..., p_n$ negate sau nenegate. Fie α^* formula care rezultă din α prin înlocuirea operatorilor formulei cu dualii corespunzători și a variabilelor propoziționale $p_1,..., p_n$ cu negațiile lor. Atunci, $\models \neg\alpha \equiv \alpha^*$ (echivalent: $\models \alpha \equiv \neg\alpha^*$).

Demonstrație.

Este suficient să demonstrăm teorema pentru cazul în care singurii operatori binari sunt $\wedge$ și $\vee$, căci utilizând $\neg$ orice formulă a $\mathcal{L}_p$ poate fi exprimată printr-o formulă care conține doar acești trei operatori (cf. Th. 2, 2.1.3.4). O dată adusă într-o asemenea formă, pe baza legilor lui De Morgan (15, 27)[12] negația unei formule care conține operatori binari se deplasează succesiv în interiorul formulei, permutând reciproc operatori binari ai formulei. Utilizând legile eliminării negațiilor multiple (1, 2) simplificăm formula astfel încât orice variabilă propozițională a formulei va fi negată cel mult o dată.

Exemplu.

Fie $\alpha: (p \equiv q) \downarrow \neg r$. Atunci $\alpha^* : (\neg p + \neg q) / \neg\neg r$.

Transformăm formula α într-o formulă echiveridică (și deci echivalentă) care conține doar operatorii $\wedge, \vee$ și $\neg$.

$\alpha: (p \equiv q) \downarrow \neg r$ eq $\neg\{[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee \neg r\}$ eq $\neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \wedge \neg\neg r$ eq $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg r$ eq $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg\neg r$ eq
eq $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge r$.

La fel procedăm cu α^*.

$\alpha^* : (\neg p + \neg q) / \neg\neg r$ eq $\neg\{[(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q)] \wedge \neg\neg r\}$ eq $\neg[(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q)] \vee \neg\neg\neg r$ eq $[\neg(\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg(\neg\neg p \wedge \neg q)] \vee \neg\neg\neg r$ eq $[(\neg\neg p \vee \neg\neg\neg q) \wedge (\neg\neg\neg p \vee \neg\neg q)] \vee \neg\neg\neg r$ eq $[(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg r$

Această din urmă formulă poate fi mai departe transformată echiveridic, astfel încât negând formula α, de mai sus, să obținem exact formula α^*. Așadar,
$[(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg r$ eq $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r$ eq $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$.

Acum, dacă negăm formula α obținem:
$\neg\alpha : \neg[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge r]$ eq
eq $\neg[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee \neg r$ eq $\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q) \vee \neg r$ eq
eq $(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$ eq $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$ eq α^*.

Teorema dualității.

Fie α, β formule ale $\mathcal{L}_p$ în care apar variabilele propoziționale $p_1,..., p_n$, negate sau nenegate. Fie α^δ și β^δ formulele care rezultă din α, respectiv β, înlocuind operatorii logici cu dualii corespunzători. Atunci:

[12] Cifrele indică formulele corespunzătoare din lista paragrafului 2.1.2.3.

1. *Dacă* $\models \alpha$, *atunci* $\models \neg\alpha^{\delta}$.

2. *Dacă* $\models \neg\alpha$, *atunci* $\models \alpha^{\delta}$.

3. *Dacă* $\models \alpha \supset \beta$, *atunci* $\models \beta^{\delta} \supset \alpha^{\delta}$.

4. *Dacă* $\models \alpha \equiv \beta$, *atunci* $\models \alpha^{\delta} \equiv \beta^{\delta}$.

Demonstrație. Pentru considerentele menționate în demonstrația teoremei precedente, vom considera că singurii operatori binari ai formulelor α, β sunt $\wedge$ și $\vee$.

1. Presupunem $\models \alpha$. Prin Teorema (*) și exercițiul 3b din 2.1.2.4 rezultă $\models \neg\alpha^{*}$. Însă dacă în această formulă validă, $\neg\alpha^{*}$, substituim simultan variabilele propoziționale $p_1,\ldots, p_n$ cu negațiile lor, atunci obținem formula $\neg\alpha^{**}$, de asemenea validă (prin teorema substituției). Iar dacă în această formulă eliminăm negațiile multiple, obținem formula validă $\neg\alpha^{\delta}$. Așadar, $\models \neg\alpha^{\delta}$.

Exemplu. Fie $\models \alpha : (p \wedge \neg q) \vee [(q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)]$; atunci

$\models \neg\alpha^{*} : \neg\{(\neg p \vee \neg\neg q) \wedge [(\neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg\neg p \wedge \neg r)]\}$; prin Th (*) și exerc. 3b (2.1.2.4).

$\models \neg\alpha^{**} : \neg\{(\neg\neg p \vee \neg\neg\neg q) \wedge [(\neg\neg q \vee \neg\neg\neg r) \wedge (\neg\neg\neg p \wedge \neg\neg r)]\}$; prin Th substituției

$\models \neg\alpha^{\delta} : \neg\{(p \vee \neg q) \wedge [(q \vee \neg r) \wedge (\neg p \wedge r)]\}$; prin eliminarea negațiilor multiple

(Verificarea validității formulei $\neg\alpha^{\delta}$: exercițiu).

2. (similar).

3. Presupunem antecedentul condiționalului $\models \alpha \supset \beta$. Și astfel $\models \neg\beta \supset \neg\alpha$ (prin contrapoziția implicației). Și deci $\models \beta^{*} \supset \alpha^{*}$ (căci dacă în formulele $\neg\beta$ și $\neg\alpha$ înlocuim operatorii cu dualii corespunzători și variabilele propoziționale cu negațiile lor, atunci obținem, prin Th (*), formulele echivalente $\neg\neg\beta^{*}$ și $\neg\neg\alpha^{*}$, adică β^{*} și α^{*}; de unde, prin exerc 3b, obținem $\models \beta^{*} \supset \alpha^{*}$). Și astfel $\models \beta^{**} \supset \alpha^{**}$ (prin Th. substituției) și deci $\models \beta^{\delta} \supset \alpha^{\delta}$ (eliminarea negațiilor multiple).

4. (similar).

Exerciții

1. Construiți, pe baza teoremei (*), α^{*} corespunzătoare următoarelor formule:

$\alpha_1 : [(p \not\subset q) / r] \wedge \neg r$

$\alpha_2 : [(p + q) \vee \neg r] \equiv (p \wedge q)$

$\alpha_3 : [(p \downarrow q) \vee r] \supset [(p \wedge q) / \neg r]$

$\alpha_4 : [(p \wedge q) \supset r] \not\subset \neg r$

2. Arătați că $\models \neg\alpha \equiv \alpha^{*}$ în fiecare caz în parte.

3. Fie $\alpha : [(p \wedge \neg q) \supset (r \vee \neg r)] / (p \wedge \neg p)$. Aplicați teorema dualității formulei α și arătați, cu ajutorul procedeului matriceal că relația condițională: dacă $\models \alpha$, atunci $\models \neg\alpha^{\delta}$ are loc.

2.2. Tablourile analitice în $\mathcal{L}_p$

2.2.1. Metoda tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$

2.2.1.1. Concepte

Tablourile analitice reprezintă o metodă elegantă de demonstrație în $\mathcal{L}_p$, adecvată implementării (ideii) demonstrării automate. Să vedem mai întâi, definițional, care sunt conceptele fundamentale ale acestei metode.

Definiția 1. Un arbore neordonat $\mathcal{T}$ este simultan:

a) *o mulțime M de elemente, numite puncte (noduri):* $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$

b) *o funcție v care asignează fiecărui punct x un întreg pozitiv $v(x)$, numit nivelul lui x.*

c) *o relație $R(x,y)$, definită pe M, cu semnificația „ x este predecesorul lui y " („ y este succesorul lui x "), cu următoarele proprietăți:*

c_1*) există un singur punct de nivelul 1 (origine/rădăcină)*

c_2*) orice alt punct în afară de origine are un singur predecesor.*

c_3*) pentru orice puncte x,y, dacă y este succesorul lui x, atunci* $v(y) = v(x)+1$.

Definiția 2. Un punct se numește final dacă n-are nici un succesor.

Definiția 3. Un punct se numește simplu dacă are strict un succesor.

Definiția 4. Un punct se numește joncțiune dacă are doi sau mai mulți succesori.

Definiția 5. Un drum este orice șir finit sau infinit numărabil de puncte, începând cu originea, astfel încât fiecare termen al șirului (exceptând ultimul, dacă există) este predecesorul celui care urmează.

Definiția 6. O ramură (drum maximal) este un drum al cărui termen ultim este un punct final sau este un drum infinit.

Definiția 7. Un arbore ordonat $\mathcal{T}$ este un arbore neordonat plus o funcție σ care asignează fiecărei joncțiuni x un șir $\sigma(x)$, format din toți succesorii lui x, dar care nu conține repetiții.

Definiția 8. Un arbore se numește finit generat dacă fiecare punct are un număr finit de succesori.

Definiția 9. Un arbore se numește finit dacă are finit de multe puncte; în caz contrar se numește infinit.

Definiția 10. Un arbore se numește diadic ordonat dacă orice joncțiune are cel mult doi succesori.

2.2.1.2. Formule ale $\mathcal{L}_p$

Definiția 1. Formulă. 1. *Orice variabilă propozițională este o formulă (elementară).*

2. *Dacă α este o formulă, atunci $\neg\alpha$ este o formulă.*

3. *Dacă α și β sunt formule, atunci $\alpha \circ \beta$ este o formulă (unde „o" denotă oricare dintre următorii operatori binari ai $\mathcal{L}_p$: $\wedge, \vee, \supset, /, \downarrow$ [13]).*

Definiția 2. Subformulă imediată a unei formule.

1. *Variabilele propoziționale n-au subformule imediate.*
2. *$\neg\alpha$ are ca subformulă imediată pe α.*

---

[13] Cum „ / " este anticonjuncție iar „$\downarrow$" este antidisjuncție, adesea analiza întreprinsă aici o vom limita la operatorii binari $\wedge, \vee$ și $\supset$. Această definiție este Def. 1 din 2.1.1., restrânsă la operatorii menționați.

3. $\alpha \circ \beta$ are ca subformule imediate pe α şi β.

Definiţia 3. Subformulă.

1. Dacă α este o subformulă imediată a lui β sau α este identică cu β, atunci α este o subformulă a lui β.

2. Dacă α este o subformulă a lui β şi β este o subformulă a lui γ, atunci α este o subformulă a lui γ.

2.2.1.3. Evaluări booleene. Interpretare. Mulţime saturată.

Definiţia 1. Fie Γ o mulţime arbitrară de formule ale $\mathcal{L}_p$. Printr-o evaluare a mulţimii Γ se înţelege o funcţie $Eval_\Gamma$ de la Γ la mulţimea valorilor logice $\{1,0\}$. Simbolic,

$$Eval_\Gamma : \Gamma \to \{1,0\}$$

Prin funcţia $Eval_\Gamma$, în fond, asignăm fiecărui element $\alpha \in \Gamma$ o valoare de adevăr determinată.

În cele ce urmează ne interesează doar acele evaluări în acord cu definiţiile semantice ale operatorilor logici, adică *evaluările booleene.*

Definiţia 2. O evaluare se numeşte booleană dacă satisface următoarele condiţii (pentru orice formule α, β ale $\mathcal{L}_p$):

1. $\neg\alpha$ este adevărată ddacă α este falsă.

2. $\alpha \wedge \beta$ este adevărată ddacă α este adevărată şi β este adevărată.

3. $\alpha \vee \beta$ este falsă ddacă α este falsă şi β este falsă.

4. $\alpha \supset \beta$ este falsă ddacă α este adevărată şi β este falsă.

Definiţia 3. Două evaluări concordă pe o formulă α dacă α este fie adevărată, fie falsă în ambele evaluări.

Definiţia 4. Două evaluări concordă pe o mulţime Γ de formule dacă ele concordă pe fiecare element al mulţimii Γ.

Definiţia 5. Fie $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, $Eval_{\Gamma_1}$ şi $Eval_{\Gamma_2}$ evaluările corespunzătoare ale mulţimilor Γ_1 şi Γ_2. $Eval_{\Gamma_2}$ este o extensie a lui $Eval_{\Gamma_1}$ dacă cele două evaluări concordă pe mulţimea Γ_1.

Definiţia 6. Prin interpretarea unei formule (respectiv mulţimi de formule) înţelegem asignarea de valori de adevăr tuturor variabilelor propoziţionale care apar în formulă (respectiv în mulţimea de formule). (Nr. interpretărilor $= 2^n$, $n =$ nr. variabilelor propoziţionale).

Remarcă. Orice interpretare a mulţimii Γ poate fi extinsă la exact o evaluare booleană a mulţimii Γ.

Definiţia 7. α este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ dacă α este adevărată în orice evaluare booleană (echivalent: în orice interpretare).

Definiţia 8. α este o formulă satisfiabilă dacă α este adevărată în cel puţin o evaluare booleană. Similar, o mulţime Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ este satisfiabilă dacă există cel puţin o evaluare booleană în care fiecare element al lui Γ este adevărat (echivalent, dacă orice formulă din Γ este satisfiabilă).

Definiţia 9. α este o formulă nesatisfiabilă dacă α este falsă în orice evaluare booleană.

Definiţia 10. Mulţime saturată (Γ_s). Fie Γ_s mulţimea tuturor formulelor adevărate într-o evaluare booleană $Eval$. Atunci, pentru orice formule α, β din Γ_s, Γ_s satisface următoarele condiţii:

1. *Din mulțimea* $\{\alpha, \neg\alpha\}$ *strict una din formule aparține lui* Γ_s. *[Echivalent* $\neg\alpha \in \Gamma_s$ *ddacă* $\alpha \notin \Gamma_s$*].*
2. $(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma_s$ *ddacă* $\alpha \in \Gamma_s$ și $\beta \in \Gamma_s$.
3. $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_s$ *ddacă* $\alpha \in \Gamma_s$ sau $\beta \in \Gamma_s$.
4. $(\alpha \supset \beta) \in \Gamma_s$ *ddacă* $\alpha \notin \Gamma_s$ sau $\beta \in \Gamma_s$.

2.2.1.4. *Metoda tablourilor analitice ca metodă de demonstrare a validității în* $\mathcal{L}_p$

Această metodă are ca sursă scrierile lui Gentzen[14]. Este dezvoltată în forma sistematică a *tablourilor semantice* prin Beth [15] și Hintikka[16]. Metoda tablourilor analitice este o variantă elegantă a metodei tablourilor semantice, dezvoltată de R. Smullyan[17].

Metoda rezidă în esență în construirea unor tablouri (semantice) prin aplicarea unor reguli, fundamentate de semnificațiile operatorilor logici menționați. Fiecare operator logic are două reguli, una pentru cazul în care formula care-l conține este adevărată, cealaltă pentru cazul în care aceasta este falsă. Redăm mai jos aceste reguli.

$$\neg_1 : \frac{\neg\alpha}{\neg\alpha}; \quad \neg_0 : \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}; \quad \vee_1 : \frac{\alpha \vee \beta}{\alpha / \beta}; \quad \vee_0 : \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\begin{matrix}\neg\alpha \\ \neg\beta\end{matrix}}$$

$$\wedge_1 : \frac{\alpha \wedge \beta}{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}}; \quad \wedge_0 : \frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha / \neg\beta}; \quad \supset_1 : \frac{\alpha \supset \beta}{\neg\alpha / \beta}; \quad \supset_0 : \frac{\neg(\alpha \supset \beta)}{\begin{matrix}\alpha \\ \neg\beta\end{matrix}}$$

$$/_1 : \frac{\alpha / \beta}{\neg\alpha / \neg\beta}; \quad /_0 : \frac{\neg(\alpha / \beta)}{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}}; \quad \downarrow_1 : \frac{\alpha \downarrow \beta}{\begin{matrix}\neg\alpha \\ \neg\beta\end{matrix}}; \quad \downarrow_0 : \frac{\neg(\alpha \downarrow \beta)}{\alpha / \beta}$$

Lectura acestor reguli este simplă. Să luăm câteva exemple. Coloana de formule din stânga reprezintă situațiile în care formula de la „numărător“ este adevărată (1), iar cea din dreapta, cazul în care ea este falsă (0). Din „numărător“ conchidem (i.e. inferăm) formula de la „numitor“. Regula $\frac{\neg\alpha}{\neg\alpha}$ o citim astfel: „Dacă $\neg\alpha$ este o formulă adevărată, atunci α este o formulă falsă“. Ca regulă de construcție a tabloului analitic fiind redundantă, vom renunța la ea. $\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$ înseamnă: „Dacă $\neg\alpha$ este falsă, atunci putem infera α“. Următoarea regulă, $\frac{\alpha \wedge \beta}{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}}$, înseamnă: „Din adevărul conjuncției putem conchide asupra adevărului argumentelor

[14] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift* 39/1935, 176-210, 405-431.
[15] E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, North Holland 1959.
[16] J.J.K. Hintikka, Form and content in quantification theory, *Acta Philosophica Fennica*, 8/1955, 7-55.
[17] R.M. Smullyan, *First-Order Logic*, Springer-Verlag 1968.

sale", motiv pentru care vom scrie cele două formule, α, β una *sub* cealaltă. Din falsitatea conjuncției, regula $\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha / \neg\beta}$, putem conchide că α este falsă sau β este falsă, *alternativă* desemnată de bara pusă între cele două formule.

Este uşor de văzut, toate aceste reguli se bazează pe definiţiile semantice ale operatorilor respectivi. La fel de uşor de sesizat este şi faptul că formulele *din care* inferăm pot fi grupate în două clase distincte, astfel:

1. Dacă adevărul formulei din care inferăm reclamă adevărul *ambelor* formule de la „numitor" (fapt simbolizat prin situarea celor două formule una sub cealaltă, în cazul operatorilor binari), atunci vom spune că formula respectivă este de *tip* $\boldsymbol{\alpha}$[18]. Aici includem: $\wedge_1, \vee_0, \supset_0, /_0, \downarrow_1$, la care adăugăm $\neg_0$.
2. Dacă adevărul formulei din care inferăm reclamă adevărul (neexclusiv) al unei formule de la „numitor" (fapt simbolizat de bara care desparte cele două formule de sub linie), atunci vom spune că formula este de *tip* $\boldsymbol{\beta}$. Aici includem: $\wedge_0, \vee_1, \supset_1, /_1, \downarrow_0$.

Rezumând cele spuse în 1 şi 2, avem:

1. O formulă $\boldsymbol{\alpha}$ este adevărată ddacă $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ sunt ambele adevărate ($\boldsymbol{\alpha}$ este formula din care inferăm, $\boldsymbol{\alpha_1}$ şi $\boldsymbol{\alpha_2}$ sunt formulele inferate).
2. O formulă $\boldsymbol{\beta}$ este adevărată ddacă cel puţin una din formulele $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$ este adevărată.

Formulele $\boldsymbol{\alpha}$ se mai numesc şi formule de *tip conjunctiv* (deoarece adevărul lor reclamă *simultaneitatea* adevărului formulelor deduse). Iar formulele $\boldsymbol{\beta}$ se mai numesc şi formule de *tip disjunctiv* (dată fiind alternativa conţinută în adevărul lor).

Cum operăm doar cu două categorii (clase) de formule, vom formula în cele ce urmează doar două reguli de deducţie, una cu referire la formulele de tip $\boldsymbol{\alpha}$ iar cealaltă la formulele de tip $\boldsymbol{\beta}$.

$$R_\alpha : \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2}\end{matrix}} \qquad R_\beta : \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta_1}/\boldsymbol{\beta_2}}$$

Aplicarea succesivă a acestor reguli este suficientă pentru construirea tabloului analitic al unei formule date (sau mulţimi de formule).

Definiţia 1. Tabloul analitic al unei formule α este un arbore diadic ordonat ale cărui puncte sunt formule.

Construcţia unui tablou analitic al lui α demarează cu formula α în origine, din care obţinem un şir de formule prin aplicarea R_α şi R_β. De exemplu, dacă originea (i.e. formula dată) este o formulă de tip $\boldsymbol{\alpha}$, atunci vom adăuga *succesiv* $\boldsymbol{\alpha_1}$ şi $\boldsymbol{\alpha_2}$. Iar dacă este o formulă $\boldsymbol{\beta}$, atunci vom adăuga *alternativ* $\boldsymbol{\beta_1}$ şi $\boldsymbol{\beta_2}$ (adică tabloul se despică în două ramuri distincte). Dacă originea este tabloul iniţial al lui α, prin aplicarea R_α şi R_β obţinem *extensiuni* succesive ale tabloului iniţial.

Definiţia 2. Fie $\mathcal{T}_1$ tabloul unei formule α. Un tablou analitic $\mathcal{T}_2$ este o extensie directă a lui $\mathcal{T}_1$ dacă $\mathcal{T}_2$ se obţine din $\mathcal{T}_1$ printr-o singură aplicare a R_α sau R_β, cu menţiunea că prin aplicarea regulii R_α adăugăm doar una din formulele $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}$.

[18] $\boldsymbol{\alpha}$ şi $\boldsymbol{\beta}$ culese bold denotă tipul corespunzător de formulă. Culese italic, ele sunt formule arbitrare ale $\mathcal{L}_p$.

Definiția 3. O ramură a unui tablou analitic se numește închisă dacă conține atât o formulă cât și negația ei.

Definiția 4. Un tablou analitic se numește închis dacă toate ramurile lui sunt închise.

Definiția 5. O demonstrație a validității unei formule α*, prin metoda tablourilor analitice, este un tablou închis pentru* $\neg\alpha$.

Exemple

1. α: 1. $[(p/q)\supset r]\vee(r\wedge s)$

2. $(p/q)\supset r$ 3. $r\wedge s$

8. r

9. s

4. $\neg(p/q)$ 5. r

6. p

7. q

Tabloul analitic de mai sus este tabloul analitic al formulei α. Variabilele propoziționale din fiecare ramură constituie categoriile de asignări pentru care α este adevărată (condiții suficiente):

a) $p=q=1$
b) $r=1$
c) $r=s=1$

2. $\beta:[(p\supset q)\wedge(q\supset r)]\supset(p\supset r)$

1. $\neg\{[(p\supset q)\wedge(q\supset r)]\supset(p\supset r)\}$
2. $(p\supset q)\wedge(q\supset r)$; 1, R_α
3. $\neg(p\supset r)$; 1, R_α
4. $p\supset q$; 2, R_α
5. $q\supset r$; 2, R_α
6. p ; 3, R_α
7. $\neg r$; 3, R_α

8. $\neg p$; 4, R_β 9. q ; 4, R_β

10. $\neg q$;5, R_β 11. r ; 5, R_β 12. $\neg q$;5, R_β 13. r ; 5, R_β

* * * *

Explicație. Am construit tabloul analitic pentru $\neg\beta$. Pașii construcției tabloului analitic sunt numerotați în stânga fiecărei formule (1-13). Grupul de simboluri din dreapta reprezintă formula din care formula respectivă a fost dedusă și tipul de regulă (R_α sau R_β) utilizat. Cum formula 1 (i.e. originea), adică $\neg\beta$, este o formulă de tip α, în 2 și 3 am trecut, corespunzător, α_1 și α_2. Ceea ce am aplicat aici este regula cu privire la *falsitatea* unei implicații ($\supset_0$). Formula 2 este o conjuncție, motiv pentru care în 4 și 5 am scris α_1 și α_2. Formula 3 este, din nou, o implicație negată, adică o formulă de tip α, motiv pentru care, în 6 și 7, am scris p și $\neg r$ (în acord cu $\supset_0$). Formula 4, în schimb, este de tip β, alternativele conținute în această formulă vor constitui cele două ramuri, 8 și 9. Similar, formula 5 este o formulă de tip β, alternativele ei se vor adăuga *ambelor* ramuri, 8 și 9. După cum constatăm, cele patru ramuri ale tabloului semantic al formulei $\neg\beta$ sunt închise (fapt marcat prin *) și deci formula β este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ (cf. *Def. 5*).

Remarcă 1. Tabloul analitic pentru $\neg\beta$ putea să arate și altfel. Puteam, de exemplu, în pasul 6 să aplicăm R_β asupra formulei 4 sau asupra formulei 5. În acest caz din formula α, din 3, obțineam, prin R_α α_1 și α_2, formule pe care le adăugam *tuturor* ramurilor deja obținute. Aceasta înseamnă că regulile R_α și R_β *nu* sunt deterministe: ele ne spun ce *putem* face, nu ce trebuie să facem. *Noi* suntem cei care decidem asupra cărei formule aplicăm o regulă sau alta. Cu toate acestea, uneori demonstrațiile pot fi mai scurte. Iar aceasta se întâmplă dacă „descompunem" mai întâi formulele tip α, prin aplicarea R_α, iar mai apoi pe cele de tip β.

3. $\gamma: [p \supset (q \supset r)] \supset \{(p \vee s) \supset [(q \supset r) \vee s]\}$

1. $\neg\gamma$
2. $p \supset (q \supset r)$
3. $\neg\{(p \vee s) \supset [(q \supset r) \vee s]\}$
4. $p \vee s$
5. $\neg[(q \supset r) \vee s]$
6. $\neg(q \supset r)$
7. $\neg s$
8. q
9. $\neg r$

10. $\neg p$ 11. $(q \supset r)$

12. p 13. s 14. $\neg q$ 15. r

*   *

16. p 17. s 18. p 19. s

*   *   *   *

În tabloul analitic al formulei $\neg\gamma$ de mai sus formulele 8 şi 9 puteau fi omise din construcţia tabloului. Explicaţia este următoarea: formula 11 reprezintă *negaţia* formulei 6. Aşadar, această ramură se închide cu această formulă, fără a mai fi necesară dezvoltarea tabloului analitic până la obţinerea unor formule elementare sau negaţii ale lor. În acest caz nici formulele 8 şi 9 nu mai erau necesare (pentru că sunt formule obţinute din formula 6). La fel, formulele 14-19 puteau fi omise, deoarece cu formula 11 ramura din dreapta a tabloului se închide deja şi deci orice adăugare ulterioară de formule oricăror ramuri care conţin deja formulele 6 şi 11 sunt ramuri închise.

Remarcă 2. Cum operăm cu două clase de formule, $\boldsymbol{\alpha}$ şi $\boldsymbol{\beta}$, conceptul „mulţime saturată" se poate redefini astfel:

I. *Definiţie.* O mulţime Γ_s de formule ale $\mathcal{L}_p$ se numeşte *saturată* dacă satisface următoarele condiţii:

1. Pentru orice formulă α, strict una din formulele α, $\neg\alpha$ aparţine lui Γ_s.
2. $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma_s$ ddacă $\boldsymbol{\alpha_1} \in \Gamma_s$ şi $\boldsymbol{\alpha_2} \in \Gamma_s$.
3. $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_s$ ddacă $\boldsymbol{\beta_1} \in \Gamma_s$ sau $\boldsymbol{\beta_2} \in \Gamma_s$.

II. *Exerciţiu.* Să se demonstreze că într-o mulţime saturată, date fiind condiţiile 1 şi 2, condiţia 3 devine superfluă (adică poate fi dedusă); aşa cum date fiind condiţiile 1 şi 3, condiţia 2 devine superfluă.

Remarcă 3. Cum o formulă *validă* este adevărată în orice evaluare booleană, rezultă că o astfel de formulă aparţine *oricărei* mulţimi saturate.

Simbolic: $\alpha_{valid} \in \cap\Gamma_s^i$ (i.e. dacă α este validă, atunci aparţine tuturor mulţimilor saturate).

Similar, o formulă *satisfiabilă* este una care aparţine cel puţin unei mulţimi saturate.

Simbolic: $\alpha_{satisf} \in \cup\Gamma_s^i$ (i.e. α este satisfiabilă dacă este elementul vreunei mulţimi saturate).

Observaţie: Dacă *Eval* este o evaluare booleană, iar Γ este mulţimea tuturor formulelor adevărate în evaluarea respectivă, atunci Γ este o mulţime saturată. Aşadar, următoarea echivalenţă are loc:

Eval Γ_s ***echiv*** Γ_s este saturată.

Exerciţii

Care din următoarele formule sunt formule valide ale $\mathcal{L}_p$? Arătaţi acest lucru cu ajutorul metodei tablourilor analitice.

$\alpha_1 : (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

$\alpha_2 : [p \wedge (q \vee r)] \supset [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$\alpha_3 : [p \vee (q \wedge r)] \supset [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

$\alpha_4 : [p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

$\alpha_5 : q \supset (p \supset q)$

$\alpha_6 : (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

$\alpha_7 : \neg(q \wedge r) \vee [(p \wedge q) \supset r]$

$\alpha_8 : [(p / q) \supset \neg r] \vee [\, (p \downarrow q) \vee r]$

$\alpha_9 : [(p \supset q) \wedge q] \supset p$

$\alpha_{10} : \{[(p \supset r) \wedge (q \supset r)] \wedge (p \vee q)\} \supset r$

$\alpha_{11} : [(p / q) \supset r] \wedge (p \vee r)$

$\alpha_{12}: [p \supset (q \supset r)] \supset [(p \wedge q) \supset (q \wedge r)]$

$\alpha_{13}: [(p \wedge q) \supset r] \supset \{(r \supset s) \supset \{[s \supset (t \supset v)] \supset [(p \wedge t) \supset (q \supset v)]\}\}$

$\alpha_{14}: (p \supset q) \supset \{[q \supset (r \supset s)] \supset [r \supset (p \supset s)]\}$

2.2.1.5. Tablourile analitice şi forma normală disjunctivă

Tablourile analitice ne oferă totodată şi o metodă de construire a *formei normale disjunctive* a unei formule a $\mathcal{L}_p$. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în forma normală *disjunctivă* dacă are forma $D_1 \vee \ldots \vee D_n$ în care D_i $(1 \leq i \leq n)$ este o conjuncție de variabile propoziționale nenegate sau negate o singură dată [19].

Pentru construirea formei normale disjunctive pe baza tabloului analitic al formulei date procedăm astfel. Considerăm toate ramurile *deschise* ale unui tablou *complet* al formulei. Legăm prin conjuncție toate variabilele unei ramuri aşa cum apar în ramura respectivă (i.e. negate sau nenegate), iar ramurile le reunim disjunctiv. Expresia astfel obținută este forma normală disjunctivă a formulei avute în vedere. Înainte de a da un exemplu, să explicităm definițional ideea de „tablou complet" al unei formule.

*Definiția 1. O ramură $\mathcal{R}$ a unui tablou analitic se numeşte completă dacă pentru orice **α** care apare în $\mathcal{R}$, atât α_1 cât şi α_2 apar în $\mathcal{R}$, şi pentru orice **β** care apare în $\mathcal{R}$, cel puțin una din formulele β_1, β_2 apare în $\mathcal{R}$.*

Definiția 2. Un tablou analitic $\mathcal{T}$ se numeşte complet(at) dacă orice ramură a tabloului este fie închisă, fie completă.

Exemplu

α: 1. $\neg\{[(p \downarrow q) \vee \neg r] \supset (q \wedge r)\}$

2. $(p \downarrow q) \vee \neg r$

3. $\neg(q \wedge r)$

4. $(p \downarrow q)$ 5. $\neg r$

6. $\neg p$

7. $\neg q$

8. $\neg q$ 9. $\neg r$ 10. $\neg q$ 11. $\neg r$

Toate cele patru ramuri ale tabloului formulei α sunt deschise. Forma normală disjunctivă a lui α va fi aşadar:

$$\alpha_d : (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee \neg r$$

Fireşte, la acelaşi rezultat ajungem prin transformările uzuale reclamate de procedeul formelor normale.

$$\neg\{[(p \downarrow q) \vee \neg r] \supset (q \wedge r)\} \equiv \neg\{\neg[\neg(p \vee q) \vee \neg r] \vee (q \wedge r)\} \equiv$$
$$\equiv \{[\neg(p \vee q) \vee \neg r] \wedge \neg(q \wedge r)\} \equiv$$
$$\equiv \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r] \wedge (\neg q \vee \neg r)\} \equiv$$
$$\equiv [(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg r)] \equiv$$
$$\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee \neg r]$$

[19] Comp. 2.1.4.4.

Exerciții

Se dau următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$:

$\alpha_1 : [(p \downarrow q) \vee \neg r] \supset (q \wedge r)$

$\alpha_2 : [(p \wedge q) / p] \wedge [(r \vee \neg s) \wedge (p \supset q)]$

$\alpha_3 : [(p \supset q) \wedge r] / [(p \supset \neg q) \vee \neg r]$

Se cere:

1. Pe baza tablourilor analitice ale formulelor $\alpha_1 - \alpha_3$ construiți forma normală disjunctivă a acestor formule.
2. Verificați rezultatul astfel obținut cu ajutorul procedeului formelor normale.

2.2.1.6. Tablouri analitice pentru mulțimi finite de formule.

Definiția 1. Fie Γ *mulțimea finită de formule* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. *Un tablou analitic pentru* Γ *este un tablou care începe cu*

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array}$$

și continuă prin aplicarea succesivă a regulilor R_α și R_β.

Exemplu

$\Gamma = \{(p / q) \supset r, p \wedge \neg r, \neg q \vee s\}$

1. $(p / q) \supset r$
2. $p \wedge \neg r$
3. $\neg q \vee s$

4. $\neg(p / q)$	5. r
6. p	10. p
7. q	11. $\neg r$
8. p	
9. $\neg r$	

Ramura stângă (sub 9): 12. $\neg q$ * | 13. s

Ramura dreaptă (sub 11): 14. $\neg q$ * | 15. s *

Dacă prin α înțelegem formula obținută prin *conjuncția* formulelor din Γ, atunci pe baza tabloului de mai sus putem construi forma normală disjunctivă a lui α (exercițiu) [20].

[20] Putem construi, firește, de la bun început formula α prin conjuncția celor trei formule din Γ. Pentru ca tabloul semantic al lui α să fie un arbore *diadic* ordonat (și nu triadic!) vom asocia cei trei conjuncți în forma $2 + 1$.

Exerciții

1. Este α o formulă validă a $\mathcal{L}_p$? Verificați acest fapt cu ajutorul tablourilor analitice și al formelor normale.
2. Se dau următoarele mulțimi de formule ale $\mathcal{L}_p$:

$$\Gamma_1 = \{(q \downarrow r) \vee p, p \vee \neg q, (p / q) \wedge p\}$$
$$\Gamma_2 = \{p / \neg p, (q \wedge r) \supset \neg p\}$$
$$\Gamma_3 = \{(p \wedge q) / p, r \vee \neg s, p \supset q\}$$

Se cere:

1. Construiți tabloul analitic al celor trei mulțimi.
2. Pe baza tabloului analitic determinați forma normală disjunctivă a formulelor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, obținute, corespunzător, prin conjuncția formulelor din mulțimile $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.
3. Verificați rezultatul astfel obținut cu ajutorul procedeului formelor normale.
4. Sunt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ formule valide ale $\mathcal{L}_p$? Arătați acest lucru cu ajutorul tablourilor analitice.

2.2.1.7. Tablourile semantice (Hintikka)

În această prezentare punctele arborelui nu sunt formule, ci mulțimi *finite* de formule. Dezvoltarea tabloului se face de fiecare dată exclusiv în funcție de punctele *finale* ale acestuia. Construcția demarează cu punerea mulțimii de formule în origine și continuă cu aplicarea succesivă a următoarelor reguli:

Reg_α: Γ, α
|
$\Gamma, \alpha_1, \alpha_2$

Reg_β: Γ, β
/ \
Γ, β_1 $\quad$ Γ, β_2

unde α, β pot să aparțină sau nu lui Γ[21].

Definiție. Un tablou semantic se numește închis dacă fiecare punct final conține atât o formulă cât și negația ei.

Utilizarea acestei variante ca metodă de demonstrație în $\mathcal{L}_p$ este similară rezultatelor deja prezentate în 2.2.1.1 – 2.2.1.6. Să luăm câteva exemple, mai întâi cazul în care mulțimea de formule din origine are un singur element.

Fie $\alpha: (p \vee q) \supset (q \vee p)$. Vom construi un tablou Hintikka pentru $\neg\alpha$, prin aplicarea Reg_α și Reg_β.

$\neg[(p \vee q) \supset (q \vee p)]$
|
$p \vee q, \neg(q \vee p)$
|
$p \vee q, \neg q, \neg p$
/ \
$p, \neg q, \neg p$ $\quad$ $q, \neg q, \neg p$

[21] În elaborarea ei originală (Hintikka) toate mulțimile de formule apar încadrate.

Cum ambele puncte finale conțin atât o formulă cât și negația ei, tabloul Hintikka al lui $\neg\alpha$ este închis. α este deci o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Fie $\beta : [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

$$\neg\{[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)\}$$
$$|$$
$$(p \supset q) \wedge (q \supset r), \neg(p \supset r)$$
$$|$$
$$p \supset q, q \supset r, \neg(p \supset r)$$
$$|$$
$$p \supset q, q \supset r, p, \neg r$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p \supset q, p, \neg r, \neg q \qquad\qquad p \supset q, p, \neg r, r$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p, \neg r, \neg q, \neg p \qquad\qquad p, \neg r, \neg q, q$$

Remarcă. Acest tablou semantic poate fi prescurtat trecând direct în origine mulțimea de formule aflată în rândul trei, respectiv $\{ p \supset q, q \supset r, \neg(p \supset r) \}$. Căci dacă din adevărul formulelor (premise) $p \supset q$ și $q \supset r$ rezultă adevărul formulei (concluzie) $p \supset r$, atunci mulțimea formată din premise și *negația* concluziei este nesatisfiabilă. Echivalența din $\mathcal{L}_p$ care exprimă acest fapt este: $[(\alpha \wedge \beta) \supset \gamma] \equiv \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma)$. Totul se reduce așadar la a arăta că mulțimea $\{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ are un tablou Hintikka închis.

Exercițiu. Se dau următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$:

$\alpha_1 : (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

$\alpha_2 : (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

$\alpha_3 : [(p \supset q) \wedge (p \supset r)] \supset [p \supset (q \wedge r)]$

$\alpha_4 : [(p \supset q) \supset (p \supset r)] \supset [p \supset (q \wedge r)]$

$\alpha_5 : [(p / q) \supset q] \supset (r \vee \neg r)$

$\alpha_6 : [(p \downarrow q) / r] \wedge (q \supset r)$

Sunt ele formule valide ale $\mathcal{L}_p$? Decideți cu ajutorul tablourilor Hintikka.

2.2.2. Corectitudinea și completitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$

2.2.2.1. Corectitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$

Considerăm mai întâi un tablou $\mathcal{T}$ și o interpretare a variabilelor din $\mathcal{T}$.

Definiția 1. O ramură $\mathcal{R}$ a tabloului $\mathcal{T}$ se numește adevărată în interpretarea dată dacă toți termenii ramurii $\mathcal{R}$ iau valoarea logică adevărat în interpretarea dată.

Definiția 2. Un tablou $\mathcal{T}$ se numește adevărat într-o interpretare dată dacă are cel puțin o ramură adevărată în interpretarea respectivă.

Lemă. Dacă $\mathcal{T}_2$ este o extensie directă a lui $\mathcal{T}_1$, atunci $\mathcal{T}_2$ este adevărat în orice interpretare în care $\mathcal{T}_1$ este adevărat.

Demonstrația lemei. Presupunem că $\mathcal{T}_1$ este adevărat, conține deci o ramură adevărată $\mathcal{R}_1$. $\mathcal{T}_2$ se obține din $\mathcal{T}_1$ prin adăugarea unui succesor (dacă extensia se face prin aplicarea regulii R_α) sau a doi succesori (dacă aplicăm regula R_β) la o ramură $\mathcal{R}$ a lui $\mathcal{T}_1$. Avem două cazuri:

Cazul 1. Ramura $\mathcal{R}$, cea extinsă, este *distinctă* de $\mathcal{R}_1$ (i.e. de ramura adevărată a lui $\mathcal{T}_1$). În acest caz $\mathcal{T}_2$ este adevărat, pentru că ramura $\mathcal{R}_1$ este în continuare o ramură adevărată a lui $\mathcal{T}_2$.

Cazul 2. Ramura $\mathcal{R}$ este identică cu $\mathcal{R}_1$. Înseamnă că $\mathcal{R}_1$ a fost extinsă fie prin aplicarea unei reguli R_α, fie prin aplicarea unei reguli R_β. Dacă $\mathcal{R}_1$ a fost extinsă prin aplicarea R_α, înseamnă că $\mathcal{R}_1$ conține o formulă $\boldsymbol{\alpha}$ adevărată (prin presupoziție), iar la $\mathcal{R}_1$ am adăugat una din formulele $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$ (adevărate, fiindcă $\boldsymbol{\alpha}$ este adevărată). Aşadar, extensia $\mathcal{T}_2$ a lui $\mathcal{T}_1$, în acest caz, generează un tablou adevărat.

Similar argumentăm pentru cazul în care extensia se face prin aplicarea regulii R_β (exercițiu).

Teorema corectitudinii. *Orice formulă demonstrabilă prin metoda tablourilor analitice este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Echivalent: Originea oricărui tablou semantic închis este o formulă nesatisfiabilă.*

Demonstrație.

Conform definiției, demonstrația unei formule α este un tablou analitic *închis* pentru negația ei, $\neg\alpha$. Construim aşadar un tablou cu $\neg\alpha$ în origine. Prin inducție matematică, pe baza lemei de mai sus, conchidem că dacă *originea* tabloului este adevărată într-o interpretare, atunci orice tablou $\mathcal{T}$ este în mod necesar adevărat în interpretarea respectivă. Prin contrapoziție, deducem de aici că dacă tabloul semantic al lui $\neg\alpha$ nu este adevărat în nici o interpretare (i.e. este un tablou închis, fapt echivalent cu o demonstrație pentru α), atunci originea (i.e. formula $\neg\alpha$) nu este adevărată în nici o interpretare (este deci nesatisfiabilă, fapt echivalent cu validitatea lui α). Aşadar, dacă o formulă a $\mathcal{L}_p$ este demonstrabilă cu ajutorul metodei tablourilor analitice, atunci ea este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Consistența metodei tablourilor analitice: *metoda tablourilor analitice nu demonstrează atât o formulă cât şi negația ei.* Acest lucru rezultă din demonstrația de mai sus, căci dacă formula demonstrată este validă, nu poate fi validă şi negația ei. Nefiind validă negația ei, aceasta nu este demonstrabilă (prin contrapoziție din th. corectitudinii).

2.2.2.2. Completitudinea metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$

Teorema completitudinii. *Orice formulă validă a logicii propozițiilor este o formulă demonstrabilă prin metodă tablourilor analitice.*

Demonstrație

Pentru demonstrația teoremei completitudinii vom utiliza următoarea teoremă.

Th. Orice ramură *deschisă completă* a unui tablou analitic este *satisfiabilă.*

Vom demonstra această teoremă în formularea echivalentă a lemei lui Hintikka.

Lema lui Hintikka. *Orice mulțime Hintikka finită este satisfiabilă*[22].

Echivalența dintre *Th* și *Lema lui Hintikka* este dată de următorul fapt: dacă $\mathfrak{R}$ este o ramură *completă* și *deschisă* a lui $\mathcal{T}$, atunci mulțimea termenilor ei este o mulțime Hintikka (Γ_H), adică o mulțime care satisface următoarele condiții:

1. Nu conține nici o variabilă împreună cu negația ei.
2. Dacă $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma_H$, atunci $\boldsymbol{\alpha_1} \in \Gamma_H$ și $\boldsymbol{\alpha_2} \in \Gamma_H$.
3. Dacă $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_H$, atunci $\boldsymbol{\beta_1} \in \Gamma_H$ sau $\boldsymbol{\beta_2} \in \Gamma_H$.

Demonstrația *Lemei lui Hintikka.*

Fie Γ_H o mulțime Hintikka. În următoarea interpretare *toate* elementele mulțimii Γ_H sunt adevărate:

a) Dacă o variabilă $p \in \Gamma_H$, atunci lui p îi asignăm valoarea logică *adevărat*.

b) Dacă $\neg p \in \Gamma_H$, atunci lui p îi asignăm valoarea logică *fals*.

c) Dacă nici p, nici $\neg p$ nu aparțin lui Γ_H, atunci lui p îi asignăm o valoare logică arbitrară.

Exemplu. Dacă α este formula $(p \supset q) \wedge \neg r$, atunci tabloul analitic al formulei α este:

1. $(p \supset q) \wedge \neg r$
2. $p \supset q$ $\qquad \Gamma_H^1 = \{(p \supset q) \wedge \neg r, p \supset q, \neg r, \neg p\}$
3. $\neg r$ $\qquad \Gamma_H^2 = \{(p \supset q) \wedge \neg r, p \supset q, \neg r, q\}$

4. $\neg p$ $\qquad$ 5. q

Ambele ramuri complete ale formulei α sunt deschise și deci putem construi două mulțimi Hintikka. Cum $\neg p$ și $\neg r$ aparțin lui Γ_H^1, lui p și r le vom asigna, cf. b), valoarea logică fals. Nici q, nici $\neg q$ nu apar ca formule distincte în Γ_H^1, motiv pentru care q poate primi orice valoare (cf. c)).

Demonstrația faptului că *toate* elementele unei mulțimi Hintikka sunt adevărate în interpretarea de mai sus o facem prin inducție pe *gradul* unei formule.

Toate variabilele propoziționale (i.e. formulele de gradul zero) sunt adevărate (prin construcția interpretării).

Presupunem acum că α este o formulă din Γ_H de un grad mai mare decât zero și că toate formulele din Γ_H de un grad mai mic decât gradul lui α sunt adevărate. Vom arăta că și α trebuie să fie adevărată.

Cum α este de un grad mai mare ca zero, ea trebuie să fie o formulă $\boldsymbol{\alpha}$ sau $\boldsymbol{\beta}$. Dacă α este o formulă $\boldsymbol{\alpha}$, atunci atât $\boldsymbol{\alpha_1}$ cât și $\boldsymbol{\alpha_2}$ sunt în Γ_H, prin condiția 2 de mai sus. Însă $\boldsymbol{\alpha_1}$ și $\boldsymbol{\alpha_2}$ sunt de un grad mai mic decât $\boldsymbol{\alpha}$, deci sunt adevărate (prin ipoteză). Așadar, și $\boldsymbol{\alpha}$ este adevărată. Iar dacă α este o formulă $\boldsymbol{\beta}$, atunci $\boldsymbol{\beta_1}$ sau $\boldsymbol{\beta_2}$ se află în Γ_H, prin condiția 3 de

[22] Condiția „finită" din lemă nu este necesară. Însă în formularea „Orice mulțime Hintikka finită sau *infinită* este satisfiabilă" lema nu este echivalentă cu *Th*, ci este un enunț *mai tare*.

mai sus. Oricare din formulele β_1, β_2 s-ar afla în Γ_H, ea este adevărată (prin ipoteză), având un grad mai mic decât β. Şi deci β este adevărată.

Reformulăm acum teorema de completitudine, în acord cu conceptul *demonstrabilității* prin metoda tablourilor analitice: *Dacă α este o formulă validă, atunci orice tablou analitic complet al lui $\neg\alpha$ este închis.*

Demonstrația teoremei completitudinii, în această reformulare, rezultă cu uşurință din *Th* de mai sus (demonstrată în forma *Lemei lui Hintikka*). Presupunem că $\mathcal{T}$ este un tablou *complet* pentru $\neg\alpha$ (pentru *negația* lui α !). Dacă $\mathcal{T}$ este *deschis*, atunci $\neg\alpha$ este satisfiabilă (prin *Th*) şi deci α *nu* este validă. De unde, prin contrapoziție, deducem că dacă α este validă, atunci tabloul complet pentru $\neg\alpha$ este unul *închis*.

Remarcă. Dacă formula considerată nu este validă, atunci tabloul complet al *negației* ei este unul deschis, iar categoriile de asignări conținute în ramurile deschise (i.e. variabilele propoziționale negate sau nenegate) oferă *contraexemple* ale formulei considerate (adică interpretări în care formula este falsă).

Exemplu

$\beta: [(p / q) \wedge \neg r] \supset \neg p$

$\neg\beta$: 1. $\neg\{ [(p / q) \wedge \neg r] \supset \neg p \}$

2. $(p / q) \wedge \neg r$

3. p

4. p / q

5. $\neg r$

6. $\neg p$ 7. $\neg q$

*

Ramura deschisă conține următoarele formule: $\neg q$, $\neg r$, p . Cum tabloul analitic al lui $\neg\beta$ conține o ramură deschisă, categoriile de asignări conținute în această ramură (i.e. q=fals, r=fals şi p=adev) reprezintă un contraexemplu al formulei β, adică asignări în care β este falsă. Verificarea acestui fapt este elementară (exercițiu).

2.2.3. Compacitatea în $\mathcal{L}_p$

Problema compacității în $\mathcal{L}_p$ înseamnă următorul fapt: Dacă Γ este o mulțime infinit numărabilă de formule ale $\mathcal{L}_p$ şi fiecare submulțime finită Γ_i este satisfiabilă, atunci este Γ satisfiabilă?

Teorema compacității. *Dacă orice submulțime finită Γ_i a unei mulțimi infinit numărabile Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.*

Pentru demonstrarea teoremei compacității sunt suficiente următoarele două leme: *Lema lui Hintikka* şi *Lema lui König.*

De data aceasta vom considera Lema lui Hintikka în varianta mai tare:

Lema lui Hintikka. *Orice mulțime Hintikka infinită este satisfiabilă.*

Demonstrația acestei leme este cea dată anterior.

Lema lui König. *Orice arbore finit generat cu infinit de multe puncte conține cel puțin o ramură infinită.*

Demonstrație

Definiție. Un punct al arborelui $\mathcal{T}$ se numește bun dacă are infinit de mulți succesori; în caz contrar se numește rău.

Prin ipoteză, $\mathcal{T}$ are infinit de multe puncte, dispuse pe ramuri începând cu originea. Deci originea este un punct bun.

Dacă toți succesorii unui punct ar fi răi, atunci punctul respectiv ar fi rău (căci ar avea un număr finit de succesori). Deci un punct bun trebuie să aibe cel puțin un succesor bun. Deci originea, x_0, are cel puțin un succesor bun, x_1, care și el trebuie să aibe un succesor bun, x_2, etc. În felul acesta putem genera o ramură infinită ($x_0, x_1, x_2, ...$).

Remarcă 1. Un punct bun are în mod necesar un succesor bun doar dacă arborele este *finit generat*. În caz contrar, aserțiunea nu este valabilă (argumentați acest fapt).

Remarcă 2. Pentru orice arbore *finit generat* avem următoarea echivalență: „Pentru orice n există un punct de nivelul n" *Echival* „Arborele $\mathcal{T}$ are infinit de multe puncte".

Cu aceste două leme demonstrația teoremei de compacitate arată astfel. Aranjăm mulțimea Γ într-un șir numărabil de formule $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n ...$ și presupunem că pentru orice n mulțimea $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ este satisfiabilă. Construim un *tablou analitic complet* pentru α_1. Acest tablou nu se închide, deoarece α_1 este satisfiabilă (prin presupoziție). La *fiecare* ramură *deschisă* a tabloului formulei α_1 adăugăm α_2 și continuăm construirea unui tablou complet. Și acest tablou va avea cel puțin o ramură deschisă, căci în caz contrar $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ar fi o submulțime finită nesatisfiabilă a lui Γ (contrar presupoziției). La fiecare ramură deschisă a tabloului astfel obținut adăugăm acum α_3 și continuăm construcția unui tablou complet, adăugăm apoi $\alpha_4, \alpha_5, ...$. Pentru nici un n tabloul astfel construit nu se închide (căci în caz contrar ar exista un n finit astfel încât $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ ar fi nesatisfiabilă (contrar presupoziției). Am obținut astfel un arbore *infinit*. Prin *Lema lui König*, tabloul conține cel puțin o ramură infinită *deschisă* R și care conține toate formulele α_i, iar mulțimea tuturor formulelor lui R este o mulțime Hintikka. Prin *Lema lui Hintikka* ea este o mulțime satisfiabilă. Și deci și mulțimea Γ este satisfiabilă (pentru că este inclusă în această mulțime Hintikka).

2.3. Axiomatica $\mathcal{L}_p$

2.3.1. Preliminar

Modul de demonstrare a teoremelor în sistemele axiomatice, numite și *sisteme tip Hilbert*, este esențial diferit de demonstrarea în sistemele tip Gentzen[23], de aplicarea metodei rezoluției[24] sau cea a tablourilor analitice. Dacă în acest din urmă caz demersul demonstrativ începea cu *negația* formulei date și se ajungea la o contradicție (în forma unui tablou analitic *închis*), în cazul sistemelor axiomatice se pleacă de la anumite formule valide, numite *axiome*, iar prin aplicarea repetată a unor *reguli de deducție* se ajunge la formula demonstrată. În această structurare axiomatic-deductivă logica propozițiilor devine calculul axiomatic al propozițiilor. Sistemele tip Hilbert cunosc o mare varietate de forme, întâlnite atât în logica clasică cât și în logici neclasice. Ele se deosebesc, de exemplu, după formulele alese ca axiome, după operatorii logici în care sunt redate axiomele, după regulile de deducție. Să menționăm câteva exemple notabile.

[23] Comp. 2.5.

[24] Comp. 2.6.

Sistemul axiomatic fregean[25] al $\mathcal{L}_p$ are şase axiome, exprimate cu ajutorul *negaţiei* şi *implicaţiei*, plus două reguli: regula substituţiei şi *modus ponens*.

Acest sistem a fost simplificat de către J. Lukasiewicz, reducând numărul axiomelor la trei. Mai mult chiar, utilizând cei doi operatori, $\neg$ şi $\supset$, este posibilă o construcţie axiomatică a $\mathcal{L}_p$ pe baza unei singure axiome[26].

Un sistem axiomatic similar, utilizând o singură axiomă, axprimată strict cu ajutorul operatorului „/" (incompatibilitate), a fost construit de J. Nicod [27]. Axioma acestui sistem este $[p/(q/r)]/\{[s/(s/s)]/[(v/q)/((p/v)/(p/v))]\}$, iar regulile utilizate sunt: regula substituţiei şi următoarea regulă: din α şi $\alpha/(\beta/\gamma)$ rezultă γ.

Un alt sistem axiomatic al $\mathcal{L}_p$ este cel elaborat de Hilbert şi Ackermann[28], sistem care utilizează patru axiome exprimate cu ajutorul *disjuncţiei* şi *negaţiei*, iar ca reguli de deducţie: substituţia şi *modus ponens*.

Sistemul axiomatic, construit de S.C. Kleene[29], are la bază zece *scheme de axiome*, construite cu operatorii: *negaţie, conjuncţie, disjuncţie* şi *implicaţie*, plus regula *modus ponens*. În fine, sistemul lui Rosser[30] ia ca operatori primitivi *negaţia* şi *conjuncţia*[31].

Dincolo de deosebirile menţionate mai sus dintre sistemele axiomatice mai putem adăuga una: unele sisteme sunt construite pe baza unor axiome specificate, altele pe baza unor *scheme de axiome* [32]. Să ilustrăm această diferenţă.

Fie S următorul sistem axiomatic:

Axiome:

Ax1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

Ax2. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)]$

Ax3. $(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \alpha)$

Regulă de deducţie: *MP* $\dfrac{\alpha, \alpha \supset \beta}{\beta}$

Fie S^* următorul sistem axiomatic.

Axiome:

Ax1*. $p \supset (q \supset p)$

Ax2*. $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

Ax3*. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$

---

[25] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*, Hale, 1879; în engleză în J. V. Heijenoort (ed), *From Frege to Gödel*, Harvard UP, 1967, 1-82.

[26] Cf. J. Lukasiewicz; A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, C.R. Soc. Sci., Varsovie, 23, III, 1930; în engleză în A. Tarski, *Logics, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, cap. IV.

[27] J.G.P. Nicod, A reduction in the number of the primitive propositions of logic, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 19, 1917. Comp. şi Quine, A note on Nicod's postulate, *Mind* 41; I. Copi, *Symbolic Logic*, Third ed., Macmillan Co, 1967, § 8.6.

[28] Cf. D. Hilbert şi W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, zw. verb. Aufl, New York, Dover Publ., 1946, §§ 10-13.

[29] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publ. Co, 1964, § 19.

[30] J.B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, New York, 1953.

[31] Pentru referiri la diferitele axiomatizări, inclusiv indicaţii istorice, comp. I. Copi (op. cit.), A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton UP, 1956, A. Heyting, *Intuitionism*, 1956.

[32] O axiomă este o formulă a limbajului obiect (i.e. a calculului), pe când o schemă de axiomă este un enunţ care spune că orice formulă care satisface anumite condiţii (i.e. are o anumită formă) este o *axiomă*.

Reguli de deducție:

MP (de mai sus) și regula substituției *Subst*

$$\frac{\alpha(p_1,\ldots,p_k)}{\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)}$$

Sistemele S și S^* se raportează în următorul fel: S^* utilizează strict 3 axiome (cele specificate), pe când S utilizează doar *scheme* de axiome [33]. În acest din urmă caz, va fi axiomă a sistemului S orice formulă a $\mathcal{L}_p$ care are *forma* menționată de scheme, deci și axiomele lui S^*. S are, așadar, o infinitate de axiome. Întrucât în sistemul S regula substituției este dispensabilă, singura regulă de deducție a acestui sistem este *modus ponens*.

Exemplu de demonstrație în S

Th 1. $\alpha \supset \alpha$

1. $[\alpha \supset ((\alpha \supset \alpha) \supset \alpha)] \supset [(\alpha \supset (\alpha \supset \alpha)) \supset (\alpha \supset \alpha)]$; Ax2
2. $\alpha \supset ((\alpha \supset \alpha) \supset \alpha)$; Ax1
3. $(\alpha \supset (\alpha \supset \alpha)) \supset (\alpha \supset \alpha)$; 1,2 MP
4. $\alpha \supset (\alpha \supset \alpha)$; Ax1
5. $\alpha \supset \alpha$; 4,3 MP

Exemplu de demonstrație în S^*

Th 1*. $p \supset p$

1. $p \supset (q \supset p)$; Ax1*
2. $p \supset [(q \supset p) \supset p]$; 1, $q/\, q \supset p$
3. $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$; Ax2*
4. $\{p \supset [(q \supset p) \supset r]\} \supset \{[p \supset (q \supset p)] \supset (p \supset r)\}$; 3, $q/q \supset p$
5. $\{p \supset [(q \supset p) \supset p]\} \supset \{[p \supset (q \supset p)] \supset (p \supset p)\}$; 4, r/p
6. $[p \supset (q \supset p)] \supset (p \supset p)$; 2, 5 MP
7. $p \supset p$; 1, 6 MP

Simbolurile din dreapta fiecărei linii indică linia / liniile din care s-a obținut linia respectivă și regulile corespunzătoare.

Dacă în S^* teorema demonstrată este $p \supset p$, în sistemul S, corespunzător, $\alpha \supset \alpha$ este schemă de teoremă[34], caz în care α poate fi orice formulă a $\mathcal{L}_p$: p, $(p/q) \wedge r$, $(p \equiv q) \supset (r \vee s)$ etc.

Remarcă. Așa cum putem ușor constata, utilizarea schemelor de axiome simplifică demonstrațiile într-un sistem, deoarece *Subst* devine dispensabilă, fără a se pierde nimic, căci are loc: $\vdash_S \alpha$ ddacă $\vdash_{S^*} \alpha$, unde „$\vdash$ " înseamnă „α este demonstrabilă“ sau „α este teoremă“ (Simbolul situat dedesubt indică sistemul axiomatic avut în vedere).

Argument. Presupunem că *Dem* este o demonstrație a formulei α în S (i.e. $\vdash_S \alpha$). Însă cu ajutorul regulii substituției axiomele lui S, care intervin în această demonstrație, pot fi deduse din axiomele sistemului S^*. Iar dacă în *Dem* se înlocuiesc aceste axiome cu deducția lor în S^*, atunci demonstrația formulei α în S trece în demonstrația acestei formule în S^*

[33] Chiar dacă le vom numi tot axiome, deosebirea este evidentă.

[34] Chiar dacă le vom numi în continuare tot teoreme.

Invers, presupunem că Dem^* este o demonstrație a formulei α în S^* (i.e. $\vdash_{S^*}\alpha$). Dem^* poate fi transformată într-o demonstrație Dem^{**}, în care *Subst* se aplică numai axiomelor și teoremelor obținute din axiome prin aplicarea acestei reguli (respectiv, *Subst* se aplică *înaintea* MP). În acest fel, axiomele care apar în Dem^{**} și teoremele care apar în Dem^{**}, obținute prin aplicarea *Subst*, devin axiome ale sistemului *S*. Și deci dacă în Dem^{**} eliminăm formulele asupra cărora s-a aplicat *Subst*, atunci obținem o demonstrație a formulei α în *S*.

Și deci teoremele celor două sisteme, *S* și S^*, coincid.

Remarcă. Nu este valabilă însă următoarea echivalență:

$\alpha_1,...,\alpha_n \vdash_S \alpha$ ddacă $\alpha_1,...,\alpha_n \vdash_{S^*} \alpha$ (așa cum vom arăta mai jos).

Întrucât „demonstrația" și „deducția" sunt concepte fundamentale ale axiomaticii, să le introducem definițional.

Definiția 1. O demonstrație într-un sistem axiomatic este un șir finit de formule $\beta_1,...,\beta_n$, *astfel încât fiecare formulă a șirului este fie o axiomă, fie rezultă din formule anterioare ale șirului prin aplicarea unor reguli de deducție. Ultima formulă a șirului,* β_n, *este formula demonstrată (echivalent:* β_n *este o teoremă; simbolic* $\vdash\beta_n$*).*

Definiția 2. O deducție într-un sistem axiomatic a unei formule dintr-o mulțime de formule $\{\alpha_1,...,\alpha_m\}$ *este un șir finit de formule* $\beta_1,...,\beta_n$, *astfel încât fiecare formulă a șirului este fie o axiomă, fie o formulă* α_i $(i=1,...,m)$, *fie rezultă din formulele anterioare ale șirului prin aplicarea unor reguli de deducție. Ultima formulă a șirului,* β_n, *este formula dedusă din cele m asumpții (simbolic:* $\alpha_i,...,\alpha_m \vdash \beta_n$*).*

Demonstrabilitatea este un caz special al deductibilității: o formulă α este demonstrabilă dacă α este deductibilă dintr-o mulțime *vidă* de asumpții.

Remarcă. Aplicarea regulii substituției într-o deducție a unei formule β din asumpțiile $\alpha_1,...,\alpha_m$ are o restricție notabilă: *nu se aplică celor m formule asumpție.* Explicația este următoarea. Formulele asumpție pot fi orice fel de formule: valide, nesatisfiabile sau satisfiabile. Dacă în primele două cazuri determinațiile „valid", respectiv „nesatisfiabil" se conservă în *orice* aplicare a *Subst*, în cel de-al treilea caz acest lucru nu mai are loc. Fie, de exemplu, formula satisfiabilă $(p \wedge q) \supset r$. Prin aplicarea *Subst* asupra acestei formule $(p/p \vee \neg p, q/q \vee \neg q, r/r \wedge \neg r)$ obținem formula nesatisfiabilă $[(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)] \supset (r \wedge \neg r)$. Similar putem construi o formulă validă (exercițiu). Aplicarea nerestrictivă a *Subst* într-o deducție ar valida o deducție (ilicită) de genul $p \vdash q$.

2.3.2. Sistemul axiomatic S

Sistemul $S(\neg, \supset)$, de mai sus, este sistemul obținut de J. Lukasiewicz prin simplificarea sistemului fregean din *Begriffsschrift*. Rămânem în cele ce urmează la acest sistem.

Axiome: Ax1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

Ax2. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)]$

Ax3. $(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \alpha)$

Regulă de deducție: *MP* (*modus ponens*) $\dfrac{\alpha, \alpha \supset \beta}{\beta}$

Definiții. Def. 1. $\alpha \vee \beta =_{df} \neg\alpha \supset \beta$

Def. 2. $\alpha \wedge \beta =_{df} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Def. 3. $\alpha \equiv \beta =_{df} (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$

Definițiile, într-un sistem axiomatic, sunt abrevieri. Ele permit înlocuirea unor combinații de simboluri cu altele, de obicei mai simple.

Teoreme în sistemul S

Th. 1. $\alpha \supset \alpha$ (cf. 2.3.1)

Th. 2. $\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$

1. $(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$; Ax3
2. $[(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)] \supset [\neg\alpha \supset ((\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta))]$; Ax1
3. $\neg\alpha \supset ((\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta))$; 1,2 MP
4. $\{\neg\alpha \supset [(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)]\} \supset \{[\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)] \supset [\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)]\}$; Ax2
5. $[\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)] \supset [\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)]$; 3, 4 MP
6. $\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$; Ax1
7. $\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$; 5, 6 MP

Aceeași teoremă poate fi însă demonstrată în mai multe moduri într-un sistem. Logica este interesată de elaborarea acelor metode de demonstrație care permit o maximă simplificare a demonstrației teoremelor. Pentru aceasta adesea sunt utilizate *metateoremele*. Distincția dintre o *teoremă* și o *metateoremă* rezidă în următorul fapt: teoremele sunt formule demonstrate strict cu mijloacele sistemului *S*, și deci sunt formule ale lui *S*, pe când metateoremele sunt aserțiuni a căror demonstrație depășește aceste mijloace, încluzând și teze metateoretice intuitive. O astfel de metateoremă este *teorema deducției* [35].

Teorema deducției (Herbrand)[36]

Dacă $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \vdash \beta$, *atunci* $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta$.

Demonstrație. Presupunem antecedentul condiționalului din enunțul teoremei, adică $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \vdash \beta$. În acord cu definiția deductibilității există deci un șir de formule $\beta_1,\ldots,\beta_m$ (unde $\beta_m = \beta$), care reprezintă deducția lui β din asumpțiile $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Vom demonstra, prin inducție pe i ($1 \leq i \leq m$) că $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_i$.

$i = 1$. În acest caz deosebim următoarele subcazuri:

a) β_1 este o axiomă. Pe baza Ax1 avem $\beta_1 \supset (\alpha_n \supset \beta_1)$. De unde, prin MP, obținem $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_1$.

b) β_1 este oricare din formulele asumpție α_l, cu $l \neq n$. Tot pe baza Ax1 avem $\alpha_l \supset (\alpha_n \supset \alpha_l)$; de unde, prin MP, obținem $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \alpha_l$, adică $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_1$.

[35] Fără riscul unei confuzii, le vom numi în continuare teoreme.

[36] Cf. J. Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration, *Travaux de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie*, III, Vol. 33, 33-160.

c) β_1 este formula α_n. Vom avea, corespunzător, $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \alpha_n$ (prin Th 1), adică $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_1$.

Presupunem acum că $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_j$, pentru orice $j < i$. Deosebim următoarele subcazuri:
a) β_i este o axiomă.
b) β_i este o formulă asumpție α_l, $l \neq n$.
c) β_i este formula α_n.

În aceste subcazuri procedăm corespunzător celor trei situații de mai sus.

d) β_i rezultă prin MP din două formule anterioare β_k și β_p (k, $p < i$) unde β_p are forma $\beta_k \supset \beta_i$.

Prin ipoteza inducției avem: $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_k$ și $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset (\beta_k \supset \beta_i)$.

Însă, prin Ax2, are loc $[\alpha_n \supset (\beta_k \supset \beta_i)] \supset [(\alpha_n \supset \beta_k) \supset (\alpha_n \supset \beta_i)]$. De unde, printr-o dublă aplicație a MP obținem $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta_i$. Și deci pentru $i = m$ vom avea $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$ $\vdash \alpha_n \supset \beta_m$, adică $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \supset \beta$.

Remarcă. În demonstrarea teoremei deducției sunt suficiente următoarele resurse teoretice: Ax1, Ax2, Th 1 și MP.

Corolar. Dacă $\alpha_1,...,\alpha_n \vdash \beta$, *atunci* $\vdash \alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset ... \supset (\alpha_n \supset \beta)...)$

Semnificația metateoremelor rezidă, în general, în faptul că *garantează existența unor derivări*, fără ca derivările să fie menționate explicit. Însă utilizarea unei metateoreme în demonstrarea unei teoreme nu face demonstrația ca atare una metateoretică. Căci dacă se caută o demonstrație anume, în toate detaliile ei, atunci aceasta poate fi construită din demonstrația metateoremei corespunzătoare.

Căci, conform teoremei deducției, de exemplu, dacă β este deductibilă din asumpțiile $\alpha_1,...,\alpha_n$, atunci $\alpha_n \supset \beta$ este deductibilă din asumpțiile $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$, iar acest lucru poate fi demonstrat presupunând deductibilitatea formulei β din cele n asumpții (într-un șir de formule $\beta_1,...,\beta_m$) și construind apoi o deducție a formulei $\alpha_n \supset \beta$ din primele n-1 asumpții, *înlocuind* toate formulele șirului deductiv al lui β din $\alpha_1,...,\alpha_n$, respectiv β_i ($1 \leq i \leq m$), cu formula $\alpha_n \supset \beta_i$ și *inserând* în acest șir toate acele formule din care $\alpha_n \supset \beta_i$ rezultă. Iar acest demers se rezumă la considerarea celor *patru* cazuri posibile, după cum β_i este o axiomă, o formulă asumpție diferită de α_n, formula α_n sau β_i rezultă din două formule anterioare ale șirului prin MP. Adică

a) β_i este o axiomă. Înlocuim această formulă cu $\alpha_n \supset \beta_i$ și inserăm în șirul deductiv formulele din care această formulă rezultă, adică: $\beta_i \supset (\alpha_n \supset \beta_i)$ și β_i. Includem aceste formule înaintea formulei $\alpha_n \supset \beta_i$, astfel încât, prin aplicarea MP obținem tocmai $\alpha_n \supset \beta_i$.

b) β_i este o formulă asumpție α_l, cu $\alpha_l \neq \alpha_n$. Și în acest caz procedăm ca în a).

c) β_i este formula α_n. În acest caz în șirul deductiv vom insera toate formulele din care $\alpha_n \supset \alpha_n$ rezultă, adică Th1 de mai sus.

d) β_i rezultă prin MP din două formule anterioare β_k și β_p (k, $p < i$), astfel că $\beta_p = \beta_k \supset \beta_i$. În acest caz înaintea formulei $\alpha_n \supset \beta_i$ vom pune formulele $\alpha_n \supset \beta_k$ și $\alpha_n \supset (\beta_k \supset \beta_i)$ plus Ax2: $[\alpha_n \supset (\beta_k \supset \beta_i)] \supset [(\alpha_n \supset \beta_k) \supset (\alpha_n \supset \beta_i)]$ din care printr-o dublă aplicare a MP obținem formula $\alpha_n \supset \beta_i$.

Exemplu. Th 2: $\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$. Utilizând teorema deducției demonstrația acestei teoreme se poate face astfel. Deducem mai întâi, din $\neg\alpha$, implicația $\alpha \supset \beta$:

1. $\neg\alpha$; as
2. $\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$; Ax1
3. $\neg\beta \supset \neg\alpha$; 1, 2 MP
4. $(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$; Ax3
5. $\alpha \supset \beta$; 3, 4 MP

Am obținut, așadar, $\neg\alpha \vdash \alpha \supset \beta$. De unde, prin Th. deducției, $\vdash \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$. Acum, *din demonstrația teoremei deducției*, putem construi o demonstrație a acestei teoreme, realizată integral cu resursele sistemului S, *fără* a utiliza teorema deducției. Pentru aceasta procedăm în acord cu indicațiile a)-d) din demonstrația teoremei deducției.

Șirul de formule 1-5, de mai sus, sunt formulele $\beta_1,\ldots,\beta_5$. Înlocuind aceste cinci formule cu formulele $\neg\alpha \supset \beta_i$ $(1 \le i \le 5)$, obținem:

$1^*. \neg\alpha \supset \neg\alpha$

$2^*. \neg\alpha \supset [\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)]$

$3^*. \neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$

$4^*. \neg\alpha \supset [(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)]$

$5^*. \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$

Iar acum trebuie să *inserăm* în acest șir deductiv toate acele formule care *justifică* formulele 1^*-5^*. Iar acest lucru îl facem în funcție de ce anume este formula β_i $(1 \le i \le 5)$ din șirul deductiv 1-5.

β_1 *este formula* $\neg\alpha$. Avem așadar cazul c), motiv pentru care vom trece succesiv toate cele cinci formule care alcătuiesc demonstrația formulei 1^*, $\neg\alpha \supset \neg\alpha$ (i.e. Th. 1).

β_2 *este Ax1*. Aici avem cazul a). Vom insera în șirul deductiv 1^*-5^* toate formulele din care rezultă formula 2^*, adică $\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$ (Ax1) și $[\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)] \supset [\neg\alpha \supset (\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha))]$ (Ax1). De unde, prin MP, obținem 2^*.

β_3 *se obține din formulele 1 și 2 prin* MP. Aici avem cazul d). Și astfel înaintea formulei 3^* vom pune următoarele formule: $\neg\alpha \supset \neg\alpha$ și $\neg\alpha \supset (\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha))$ plus Ax3: $\{\neg\alpha \supset [\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)]\} \supset [(\neg\alpha \supset \neg\alpha)(\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha))]$. De unde, printr-o dublă aplicare a MP, obținem 3^*: $\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$.

β_4 *este Ax3*. Din nou, avem cazul a). Procedăm similar. Adică inserăm în șirul deductiv 1^*-5^*, înaintea formulei 4^* toate formulele din care ea rezultă: Ax3 și $\neg\beta_4 \supset (\neg\alpha \supset \beta_4)$: $[(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)] \supset [\neg\alpha \supset ((\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta))]$. De unde, prin MP, obținem 4^*.

β_5 *se obține din formulele 3 și 4 prin* MP. Avem, din nou, cazul d). Și deci înaintea formulei 5^* vom insera următoarele formule:

$\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$, $\neg\alpha \supset [(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)]$ și

Ax2: $\{\neg\alpha \supset [(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)]\} \supset \{[\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)] \supset [\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)]\}$. De unde, printr-o dublă aplicare a lui MP, obținem formula de demonstrat, 5^*.

Înșiruind toate formulele menționate mai sus obținem o demonstrație a Th2 *din* demonstrația teoremei deducției.

Remarcă 1. Teorema deducției explicitează o corelație esențială între demonstrații și deducții. În demonstrația unei teoreme este suficient să demonstrăm relația corespunzătoare de deductibilitate iar apoi să aplicăm teorema deducției. Așadar, teorema deducției se poate constitui într-o regulă derivată de deducție, în sensul că, o dată demonstrată, pe baza ei inferăm existența unor deducții / demonstrații, fără construcția lor efectivă.

În fine, o altă metateoremă importantă este cea privitoare la *înlocuirea* expresiilor echivalente.

Teorema înlocuirii (echivalenților): $\beta \equiv \gamma \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

În expresia de mai sus, α, β, γ sunt formule ale $\mathcal{L}_p$, β este o subformulă a lui α (i.e. α_β) iar α_γ se obține din α_β prin înlocuirea a zero sau mai multe ocurențe ale lui β în formula α cu formula γ.

Demonstrație (inducție).

Fie, în cele ce urmează, *n* gradul formulei α_β minus gradul formulei β.

1. $n=0$. În acest caz: $\beta \equiv \gamma \vdash \beta \equiv \gamma$.

2. $n > 0$. Presupunem că teorema are loc pentru orice $j < n$ și vom arăta că are loc și pentru *n*. În acest caz α_β are forma α_{β^*}, unde α_{β^*} este *diferită* de β^*, iar β^* este o formulă în care β este subformulă. Așadar, $\beta^* = \beta^*_\beta$ (β^* poate fi diferită sau nu de β). Cum gradul formulei β^* este mai mic decât gradul formulei α_{β^*}, prin ipoteza inducției, teorema are loc; așadar: $\beta \equiv \gamma \vdash \beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma$. Considerând acum forma formulei α_β, deosebim cele două cazuri:

a) α_β are forma $\neg\beta^*_\beta$. În acest caz α_γ are forma $\neg\beta^*_\gamma$. Vom avea:

1. $\beta \equiv \gamma$; as
2. $\beta \equiv \gamma \vdash \beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma$; ipot. ind.
3. $(\beta \equiv \gamma) \supset (\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma)$; 2 Th. ded.
4. $\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma$; 1, 3 MP
5. $\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma \vdash \neg\beta^*_\beta \equiv \neg\beta^*_\gamma$; Th. 33 (mai jos)
6. $(\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma) \supset (\neg\beta^*_\beta \equiv \neg\beta^*_\gamma)$; 5, Th. ded.
7. $\neg\beta^*_\beta \equiv \neg\beta^*_\gamma$; 4, 6 MP

Avem deci $\beta \equiv \gamma \vdash \neg\beta^*_\beta \equiv \neg\beta^*_\gamma$, adică $\beta \equiv \gamma \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

b) α_β are forma 1. $\beta^*_\beta \supset \delta$ sau 2. $\delta \supset \beta^*_\beta$.

b1) $\alpha_\beta = \beta^*_\beta \supset \delta$. Și deci $\alpha_\gamma = \beta^*_\gamma \supset \delta$

1. $\beta \equiv \gamma$; as
2. $\beta \equiv \gamma \vdash \beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma$; ipot. ind.
3. $(\beta \equiv \gamma) \supset (\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma)$; 2 Th ded
4. $\beta^*_\beta \equiv \beta^*_\gamma$; 1, 3 MP
5. $\beta^*_\beta \supset \beta^*_\gamma$; 4, Def. 3, Th. 20
6. $\beta^*_\gamma \supset \beta^*_\beta$; 4, Def. 3, Th. 21

7. $\beta^*_\gamma \supset \beta^*_\beta,\ \beta^*_\beta \supset \delta \vdash \beta^*_\gamma \supset \delta$; Th. 24

8. $(\beta^*_\gamma \supset \beta^*_\beta) \supset [(\beta^*_\beta \supset \delta) \supset (\beta^*_\gamma \supset \delta)]$; 7, Corol. Th. ded.

9. $(\beta^*_\beta \supset \delta) \supset (\beta^*_\gamma \supset \delta)$; 6, 8 MP

10. $\beta^*_\beta \supset \beta^*_\gamma,\ \beta^*_\gamma \supset \delta \vdash \beta^*_\beta \supset \delta$; Th. 24.

11. $(\beta^*_\beta \supset \beta^*_\gamma) \supset [(\beta^*_\gamma \supset \delta) \supset (\beta^*_\beta \supset \delta)]$; 10, Corol. Th. ded.

12. $(\beta^*_\gamma \supset \delta) \supset (\beta^*_\beta \supset \delta)$; 5, 11 MP

13. $(\beta^*_\beta \supset \delta) \equiv (\beta^*_\gamma \supset \delta)$; 9, 12, Th. 27, Def. 3

Şi deci $\beta \equiv \gamma \vdash (\beta^*_\beta \supset \delta) \equiv (\beta^*_\gamma \supset \delta)$; adică $\beta \equiv \gamma \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

b2) $\alpha_\beta = \delta \supset \beta^*_\beta$. Şi deci $\alpha_\gamma = \delta \supset \beta^*_\gamma$

1 – 6 din b1

7. $\beta^*_\beta \supset \beta^*_\gamma,\ \delta \supset \beta^*_\beta \vdash \delta \supset \beta^*_\gamma$; Th. 24

8. $(\beta^*_\beta \supset \beta^*_\gamma) \supset [(\delta \supset \beta^*_\beta) \supset (\delta \supset \beta^*_\gamma)]$; 7, Corol. Th. ded.

9. $(\delta \supset \beta^*_\beta) \supset (\delta \supset \beta^*_\gamma)$; 5, 8 MP

10. $\beta^*_\gamma \supset \beta^*_\beta,\ \delta \supset \beta^*_\gamma \vdash \delta \supset \beta^*_\beta$; Th. 24

11. $(\beta^*_\gamma \supset \beta^*_\beta) \supset [(\delta \supset \beta^*_\gamma) \supset (\delta \supset \beta^*_\beta)]$; 10, Corol. Th. ded.

12. $(\delta \supset \beta^*_\gamma) \supset (\delta \supset \beta^*_\beta)$; 6, 11 MP

13. $(\delta \supset \beta^*_\beta) \equiv (\delta \supset \beta^*_\gamma)$; 9, 12, Th 27, Def. 3

Şi deci, $\alpha \equiv \beta \vdash (\delta \supset \beta^*_\beta) \equiv (\delta \supset \beta^*_\gamma)$; adică $\alpha \equiv \beta \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

Remarcă 2. Demonstraţia de mai sus este o demonstraţie *pur sintactică* a teoremei înlocuirii. Aşa cum am văzut în 2.1.5 , în teoria funcţiilor de adevăr avem o teoremă similară: teorema (*semantică*) a înlocuirii (echivalenţilor): *Dacă* $\beta \equiv \gamma$, *atunci* $\alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$. De unde deducem $\beta \equiv \gamma \models \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$ (de ce?), echivalent $\models (\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma)$ (prin teorema de normalitate). În cazul în care *presupunem demonstrată* teorema *completitudinii* sistemului S, conchidem asupra $\vdash (\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma)$. Şi deci $\beta \equiv \gamma \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$. Aşadar, cu presupoziţia menţionată, teorema sintactică a înlocuirii este un rezultat imediat al teoremei semantice a înlocuirii.

Th. 3. $[\alpha \supset (\alpha \supset \beta)] \supset (\alpha \supset \beta)$

1. $\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$; as
2. α; as
3. $\alpha \supset \beta$; 1, 2 MP
4. β; 2, 3 MP

Şi deci $\alpha \supset (\alpha \supset \beta),\ \alpha \vdash \beta$. De unde, prin aplicarea Th. deducţiei, obţinem $\alpha \supset (\alpha \supset \beta) \vdash \alpha \supset \beta$. În fine, printr-o nouă aplicaţie a Th. deducţiei, obţinem $\vdash [\alpha \supset (\alpha \supset \beta)] \supset (\alpha \supset \beta)$. Rezultatul se putea obţine şi direct din prima deducţie prin aplicarea *corolarului* acestei teoreme.

Th. 4. $(\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)]$

1. $\alpha \supset \beta$; as

2. $\beta \supset \gamma$; as

3. α; as

4. β; 1, 3 MP

5. γ; 2, 4 MP

Şi deci, $\alpha \supset \beta$, $\beta \supset \gamma$, $\alpha \vdash \gamma$. Şi astfel, $\vdash (\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)]$.

Th. 5. $\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$

1. α; as

2. $\neg\alpha$; as

3. $\neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$; Th. 2.

4. $\alpha \supset \beta$; 2, 3 MP

5. β; 1, 4 MP

Şi deci, α, $\neg\alpha \vdash \beta$, şi astfel $\vdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$ (prin corolar).

Th. 6. $\neg\neg\alpha \supset \alpha$

1. $\neg\neg\alpha$; as

2. $\neg\neg\alpha \supset (\neg\alpha \supset \neg\neg\neg\alpha)$; Th. 2

3. $\neg\alpha \supset \neg\neg\neg\alpha$; 1, 2 MP

4. $(\neg\alpha \supset \neg\neg\neg\alpha) \supset (\neg\neg\alpha \supset \alpha)$; Ax3

5. $\neg\neg\alpha \supset \alpha$; 3, 4 MP

Th. 7. $\alpha \supset \neg\neg\alpha$ (exerciţiu)

Th. 8. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$

1. $\alpha \supset \beta$; as

2. $\neg\neg\alpha \supset \alpha$; Th. 6

3. $\neg\neg\alpha \supset \beta$; Th. 4, 2, 1 MP

4. $\beta \supset \neg\neg\beta$; Th. 7

5. $\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta$; Th. 4, 3, 4

6. $(\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$; Ax3

7. $\neg\beta \supset \neg\alpha$; 5, 6 MP

Şi deci $\alpha \supset \beta \vdash \neg\beta \supset \neg\alpha$; de unde, prin th. ded. $\vdash (\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$.

Th. 9. $(\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \neg\alpha)$ (exerciţiu)

Th. 10. $(\neg\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \alpha)$ (exerciţiu)

Th. 11. $\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg(\alpha \supset \beta))$

1. $\alpha \supset [(\alpha \supset \beta) \supset \beta]$; din MP plus două aplicaţii ale th. ded.

2. $[(\alpha \supset \beta) \supset \beta] \supset [(\neg\beta \supset \neg(\alpha \supset \beta))]$; Th. 8

3. $\alpha \supset (\neg\beta \supset \neg(\alpha \supset \beta))$; 1, 2 prin $\alpha \supset \beta$, $\beta \supset \gamma \vdash \alpha \supset \gamma$ (demonstraţi că această din urmă deducţie are loc).

Th. 12. $(\alpha \supset \beta) \supset [(\neg\alpha \supset \beta) \supset \beta]$ (exerciţiu)

Th. 13. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [\beta \supset (\alpha \supset \gamma)]$

1. $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$; as

2. β; as

3. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)]$; Ax2

4. $(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)$; 1, 3 MP

5. $\beta \supset (\alpha \supset \beta)$; Ax1

6. $\alpha \supset \beta$; 2, 5 MP

7. $\alpha \supset \gamma$; 6, 4 MP

Avem deci $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$, $\beta \vdash \alpha \supset \gamma$;

Aşadar $\vdash [\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [\beta \supset (\alpha \supset \gamma)]$ (corolar).

Th. 14. $(\alpha \supset \beta) \supset [(\gamma \vee \alpha) \supset (\gamma \vee \beta)]$

1. $\alpha \supset \beta$; as
2. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\gamma \supset (\alpha \supset \beta))$; Ax1
3. $\neg\gamma \supset (\alpha \supset \beta)$; 1, 2 MP
4. $[\neg\gamma \supset (\alpha \supset \beta)] \supset [(\neg\gamma \supset \alpha) \supset (\neg\gamma \supset \beta)]$; Ax2
5. $(\neg\gamma \supset \alpha) \supset (\neg\gamma \supset \beta)$; 3, 4 MP
6. $(\gamma \vee \alpha) \supset (\gamma \vee \beta)$; Def. 1
7. Th. 14; 1, 6, Th. ded.

Th. 15. $(\alpha \supset \neg\alpha) \supset \neg\alpha$

(Din Th. 5: $\alpha \supset (\neg\alpha \supset \neg(\beta \supset \beta))$, Ax2, Th. 9) (exerciţiu)

Th. 16. $(\neg\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$ (exerciţiu)

Th. 17. $(\alpha \vee \alpha) \supset \alpha$; Th. 16, Def. 1

Th. 18. $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$ (exerciţiu)

Th. 19. $(\alpha \vee \beta) \supset (\beta \vee \alpha)$ (exerciţiu)

Th. 20. $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$ (exerciţiu)

Th. 21. $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$ (exerciţiu)

Th. 22. $\alpha \vee \neg\alpha$ (exerciţiu)

Th. 23. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \vdash \beta \vee (\alpha \vee \gamma)$

1. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$; as
2. $\neg\alpha \supset (\neg\beta \supset \gamma)$; 1, Def. 1
3. $\neg\beta \supset (\neg\alpha \supset \gamma)$; 2, Th. 13.
4. $\beta \vee (\alpha \vee \gamma)$; 3, Def. 1

Th. 24. $\alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma \vdash \alpha \supset \gamma$ (exerciţiu)

Th. 25. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \vdash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

1. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$; as
2. $\neg\alpha \supset (\beta \vee \gamma)$; Def. 1
3. $(\beta \vee \gamma) \supset (\gamma \vee \beta)$; Th. 19
4. $\neg\alpha \supset (\gamma \vee \beta)$; 2, 3 Th. 24
5. $\alpha \vee (\gamma \vee \beta)$; 4, Def. 1
6. $\gamma \vee (\alpha \vee \beta)$; 5, Th. 23
7. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$; Th. 19, 6, MP

Th. 26. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (exerciţiu)

Th. 27. α, $\beta \vdash \alpha \wedge \beta$

1. $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \supset \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$; Th. 1
2. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$; Def. 1
3. $\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta))$; 2, Th. 26
4. $\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee (\alpha \wedge \beta))$; 3, Def. 2
5. $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta))$; 4, Def. 1

6. α; as

7. $\beta \supset (\alpha \wedge \beta)$; 5, 6 MP

8. β; as

9. $\alpha \wedge \beta$; 7, 8 MP

Th. 28. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [(\alpha \wedge \beta) \supset \gamma]$

1. $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$; as

2. $\alpha \wedge \beta$; as

3. α; 2, Th. 20, MP

4. β; 2, Th. 21, MP

5. $\beta \supset \gamma$; 1, 3 MP

6. γ; 4, 5 MP

Deci, $\alpha \supset (\beta \supset \gamma), \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$. De unde, printr-o dublă aplicare a Th. ded. obținem rezultatul.

Th. 29. $[(\alpha \wedge \beta) \supset \gamma] \supset [\alpha \supset (\beta \supset \gamma)]$ (exercițiu)

Th. 30. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \equiv [(\alpha \wedge \beta) \supset \gamma]$ (exercițiu)

Th. 31. $\alpha \equiv \beta, \beta \equiv \gamma \vdash \alpha \equiv \gamma$ (exercițiu)

Th. 32. $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ (Th. 6, Th. 7, Th. 27, Def. 3)

Th. 33. $\alpha \equiv \beta \vdash \neg\alpha \equiv \neg\beta$ (exercițiu)

Th. 34. $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$ (exercițiu)

Th. 35. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

($\alpha \vee \neg\alpha$, Th. 22, Th. 34, Th. 32, Th. înloc., Def. 2)

Th. 36. $[(\alpha \supset \beta) \wedge \neg\beta] \supset \neg\alpha$

1. $(\alpha \supset \beta) \wedge \neg\beta$; as

2. $\alpha \supset \beta$; Th. 20

3. $\neg\beta$; Th. 21

4. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$; Th. 8

5. $\neg\beta \supset \neg\alpha$; 2, 4 MP

6. $\neg\alpha$; 3, 5 MP

Şi deci $(\alpha \supset \beta) \wedge \neg\beta \vdash \neg\alpha$. De unde, prin th. ded., obținem Th. 36.

Th. 37. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

1. $\neg(\alpha \vee \beta) \supset \neg(\alpha \vee \beta)$; Th. 1

2. $\neg(\alpha \vee \beta) \supset \neg(\neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta)$; Th. 32, Th. înloc.

3. $\neg(\alpha \vee \beta) \supset (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$; Def. 2

4. $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \supset (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$; Th. 1

5. $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \supset \neg(\neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta)$; Def. 2

6. $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \supset \neg(\alpha \vee \beta)$; Th. 32, Th. înloc.

7. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$; 3, 6, Th. 27, Def. 3

Th. 38. $\neg(\alpha \supset \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$

1. $\neg(\alpha \supset \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta)$; Th. 32, Th. înloc., Def. 1

2. $\neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta)$; Th. 37

3. $(\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$; Th. 32, Th. înloc.

4. $\neg(\alpha \supset \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$; Th. 31.

2.3.3. Corectitudinea şi completitudinea sistemului axiomatic S

Teorema corectitudinii. Dacă $\vdash \alpha$, *atunci* $\models \alpha$.

Ceea ce trebuie demonstrat este deci faptul că *orice formulă demonstrabilă în S este o formulă validă a* $\mathcal{L}_p$. Demonstrarea teoremei corectitudinii se rezumă la a demonstra următoarele:

a) Axiomele sistemului *S* sunt formule valide.

b) Regula *modus ponens* conservă, în concluzie, validitatea premiselor.

Demonstraţie.

a) Întrucât operăm cu *scheme* de axiome, a demonstra a) înseamnă a demonstra că orice formulă de *forma* axiomei respective este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Prima axiomă, de exemplu, are forma $p \supset (q \supset p)$, care este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Iar orice formulă validă a $\mathcal{L}_p$ obţinută prin substituţii corecte din această formulă este, de asemenea, o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Demonstraţie (contrapoziţie). Presupunem că $\alpha(p_1 / \beta_1,..., p_k / \beta_k)$, obţinută din $\alpha(p_1,..., p_k)$ prin substituţiile indicate, *nu* este validă. Există deci o interpretare Int_1 a variabilelor propoziţionale din formulele $\beta_1,..., \beta_k$ în care $\alpha(p_1 / \beta_1 ... p_k / \beta_k)$ este falsă. Fie acum o interpretare Int_2, similară interpretării Int_1 cu următoarea clauză: p_i în Int_2 $(1 \leq i \leq k)$ ia valoarea formulei β_i în Int_1. În acest caz, în Int_2 formula $\alpha(p_1,..., p_k) = 0$ şi deci *nevalidă*[37].

b) *Modus ponens* conservă validitatea. Demonstraţia acestui fapt o putem face ca mai sus, la punctul a), arătând că formula $[\alpha \wedge (\alpha \supset \beta)] \supset \beta$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Prin *reductio ad absurdum* demonstraţia lui b) arată astfel. Presupunem că premisele regulii, α şi $\alpha \supset \beta$, sunt formule valide iar β nu este validă. Există deci o interpretare *Int* a variabilelor din β astfel că $\beta = 0$ în *Int*. Cum α este adevărată în *orice* interpretare (fiind formulă validă!), rezultă că $(\alpha \supset \beta) = 0$ în *Int*. Însă acest rezultat *contrazice* asumpţia validităţii premisei $\alpha \supset \beta$.

Remarcă. O dată demonstrată corectitudinea sistemului, o demonstraţie a *consistenţei* se poate face cu uşurinţă. Căci dacă *prin consistenţa lui S înţelegem că în S nu este demonstrabilă atât o formulă* α *cât şi negaţia ei*, atunci conchidem că: dacă α este demonstrabilă, atunci α este validă (prin th. corect.). Iar dacă α este validă, atunci $\neg\alpha$ este nesatisfiabilă (deci nevalidă). De unde, prin contrapoziţie, din th. corectitudinii, deducem că $\neg\alpha$ nu este demonstrabilă.

Pentru demonstrarea completitudinii sistemului *S* demonstrăm în prealabil o teoremă care conectează cele două semnificaţii fundamentale: $\models$ (validitatea) şi $\vdash$ (demonstrabilitatea).

Teoremă. Fie $\alpha(p_1,..., p_k)$. *Pentru o interpretare Int a variabilelor* $p_1,..., p_k$, *fie*:

$$p_i^* = \begin{cases} p_i, \text{dacă } p_i = 1 \text{ în } Int \\ \neg p_i, \text{dacă } p_i = 0 \text{ în } Int \end{cases} \qquad \alpha^* = \begin{cases} \alpha, \text{dacă } \alpha = 1 \text{ în } Int \\ \neg\alpha, \text{dacă } \alpha = 0 \text{ în } Int \end{cases}$$

$(1 \leq i \leq k)$

Atunci: $p_1^*,..., p_k^* \vdash \alpha^*$.

[37] Comp. şi 2.1.5.

Pentru a sesiza mai uşor conţinutul acestei teoreme, să dăm mai întâi un exemplu. Fie $\alpha = p_1 \equiv p_2$. Fie *Int* următoarea interpretare a variabilelor: $p_1 = 1$ şi $p_2 = 0$. În acest caz vom avea $p_1^* = p_1$, $p_2^* = \neg p_2$ şi $\alpha^* = \neg\alpha$. Trebuie demonstrat aşadar, că $p_1^*, p_2^* \vdash \alpha^*$, adică $p_1, \neg p_2 \vdash \neg\alpha$.

Demonstraţie (inducţie pe gradul *n* al formulei α)

a) $n = 0$. În acest caz α este o variabilă propoziţională *p*, care în *Int* poate fi adevărată sau falsă. Dacă $p = 1$, atunci $p^* = p$ şi $\alpha^* = p$ şi deci $p \vdash p$, adică $p^* \vdash p^*$ are loc. Iar dacă $p = 0$, atunci $p^* = \neg p$ şi $\alpha^* = \neg p$ şi deci $\neg p \vdash \neg p$, aşadar $p^* \vdash p^*$ are loc.

b) $n > 0$. Presupunem că teorema are loc pentru orice $j < n$ (i.e. ipoteza inducţiei) şi trebuie să arătăm că teorema are loc şi pentru *n*. Cum $n > 0$, formula α poate avea forma $\neg\beta$ sau $\beta \supset \gamma$. Deosebim aşadar două cazuri:

1. $\alpha = \neg\beta$. Cum gradul lui β este mai mic decât gradul lui α, teorema are loc pentru β (prin ipoteza inducţiei). Deosebim, în continuare, următoarele două subcazuri, după cum β este adevărată sau falsă în *Int*.

1a. $\beta = 1$. Fiindcă $\alpha = \neg\beta$, rezultă că $\alpha = 0$. Aşadar, vom avea $\beta^* = \beta$ şi $\alpha^* = \neg\alpha$. În acord cu ipoteza inducţiei, avem:

1. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta^*$
2. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta$
3. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \neg(\neg\beta)$; 2, Th. 7, MP
4. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \neg\alpha$
5. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \alpha^*$

1b. $\beta = 0$. Acum $\beta^* = \neg\beta$, $\alpha^* = \alpha$. Avem, aşadar:

1. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta^*$
2. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \neg\beta$
3. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \alpha$
4. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \alpha^*$

2. $\alpha = \beta \supset \gamma$. Cum gradele formulelor β şi γ sunt mai mici decât gradul lui α, prin ipoteza inducţiei teorema are loc pentru aceste formule. Avem, aşadar, $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta^*$ şi $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \gamma^*$. În acord cu condiţiile de adevăr ale unei implicaţii, deosebim următoarele trei subcazuri:

2a. $\beta = 0$. Şi deci $\alpha = 1$. Şi astfel $\beta^* = \neg\beta$, $\alpha^* = \alpha$. Avem deci:

1. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \neg\beta$
2. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta \supset \gamma$; 1 Th. 2, MP
3. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \alpha^*$

2b. $\gamma = 1$. Şi deci, $\gamma^* = \gamma$, $\alpha^* = \alpha$. Şi astfel,

1. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \gamma$
2. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \beta \supset \gamma$; 1, Ax1, MP
3. $p_1^*, \ldots, p_k^* \vdash \alpha^*$

2c. $\beta=1$ şi $\gamma=0$. Şi deci $\beta^*=\beta$, $\gamma^*=\neg\gamma$ iar $\alpha^*=\neg\alpha$ (i.e. $\neg(\beta\supset\gamma)$).

Avem astfel : 1. $p_1^*,\dots,p_k^* \vdash \beta$

2. $p_1^*,\dots,p_k^* \vdash \neg\gamma$

3. $p_1^*,\dots,p_k^* \vdash \neg(\beta\supset\gamma)$; 1, 2, Th. 11 MP

4. $p_1^*,\dots,p_k^* \vdash \alpha^*$

Teorema de completitudine. Dacă $\models \alpha$, *atunci* $\vdash \alpha$.

Demonstrație. Presupunem $\models \alpha(p_1,\dots,p_k)$. Şi deci pentru orice interpretare a variabilelor propoziționale $p_1,\dots,p_k$ din α, α ia valoarea logică adevărat. Şi deci $\alpha^*=\alpha$. În acord cu teorema de mai sus, avem

$p_1^*,\dots,p_k^* \vdash \alpha$

Şi astfel avem, vom avea:

a) dacă $p_k=1$, atunci $p_1^*,\dots,p_{k-1}^*,p_k \vdash \alpha$

b) dacă $p_k=0$, atunci $p_1^*,\dots,p_{k-1}^*,\neg p_k \vdash \alpha$

De unde, prin teorema deducției, obținem, corespunzător:

1. $p_1^*,\dots,p_{k-1}^* \vdash p_k\supset\alpha$

2. $p_1^*,\dots,p_{k-1}^* \vdash \neg p_k\supset\alpha$

3. $p_1^*,\dots,p_{k-1}^* \vdash \alpha$; 1, 2 Th. 12, MP

Însă şi p_{k-1} poate fi adevărată sau falsă. Repetând demersul de mai sus, eliminăm succesiv (în k paşi) toate variabilele p_i^* ($1\le i\le k$) şi obținem, în final, $\vdash\alpha$.

Remarcă. Laolaltă, cele două teoreme (corectitudinea şi completitudinea) redau ideea coextensivității celor două concepte: „formulă validă" şi „formulă demonstrabilă (teoremă)" în $\mathcal{L}_p$: $\models\alpha$ ddacă $\vdash\alpha$.

În sens tare teorema de completitudine include considerarea formulelor asumpție, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Definiția 1. Un sistem axiomatic S se numeşte complet (în sens tare) dacă din $\alpha_1,\dots,\alpha_n \models \beta$ *rezultă* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \vdash \beta$.

Definiția 2. O formulă β *a* $\mathcal{L}_p$ *este deductibilă în S dintr-o mulțime* Γ *de formule ale* $\mathcal{L}_p$ *(simbolic* $\Gamma\vdash\beta$ *) dacă există o mulțime finită de formule* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *din* Γ, *astfel încât* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \vdash \beta$.

Definiția 3. O mulțime Γ *de formule ale* $\mathcal{L}_p$ *se numeşte S-inconsistentă dacă există o formulă* β *a* $\mathcal{L}_p$ *astfel încât* $\Gamma\vdash\beta$ şi $\Gamma\vdash\neg\beta$; *în caz contrar se numeşte S-consistentă.*

Remarcă. Sensul S-inconsistenței[38] din definiția de mai sus este echivalent cu următorul: Γ este S-inconsistentă ddacă $\vdash \neg(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_n)$.

Demonstrație[39]. Presupunem sensul din *Def. 3*, adică $\Gamma\vdash\beta$ şi $\Gamma\vdash\neg\beta$. Există aşadar $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\Gamma$, astfel că $\alpha_1,\dots,\alpha_n\vdash\beta$ şi $\alpha_1,\dots,\alpha_n\vdash\neg\beta$. Şi deci $\alpha_1,\dots,\alpha_n\vdash\beta\wedge\neg\beta$ (prin Th. 27). Şi deci $\vdash \alpha_1\supset(\dots\supset(\alpha_n\supset(\beta\wedge\neg\beta))\dots)$ (corolar Th. ded.); respectiv,

---

[38] Întrucât în acest paragraf avem în vedere doar sistemul axiomatic $S(\neg,\supset)$, simbolul S cu referire la in/consistență va fi omis.

$\vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$ (prin Th. 28). Însă în S $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$ este teoremă. Şi deci $\vdash \neg (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ (prin Th. 36 MP). Reciproc (argumentaţi).

Definiţia 4. O mulţime Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ se numeşte maximal consistentă, dacă este consistentă şi pentru orice formulă α a $\mathcal{L}_p$ are loc: dacă $\Gamma \cup \{\alpha\}$ este consistentă, atunci $\alpha \in \Gamma$.

Lema 1 (Lindenbaum). Orice mulţime consistentă Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ admite o extensie maximal consistentă.

Demonstraţie. Considerăm mai întâi o enumerare[40] a tuturor formulelor $\mathcal{L}_p$: $\alpha_1, \alpha_2,...$ Construim acum un şir de mulţimi $\Gamma_1, \Gamma_2,...$ în felul următor:

$\Gamma_1 = \Gamma$

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$, dacă mulţimea astfel obţinută este consistentă.

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, în caz contrar

Fie acum $\Gamma^* = \cup\Gamma_i$ $(i = 1,2,...)$. Trebuie să arătăm acum că reuniunea tuturor mulţimilor astfel construite, Γ^*, este *consistentă* şi *maximală.*

a) Γ^* *este consistentă* (*reductio ad absurdum*). Există aşadar formulele $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k}$ din Γ^* şi o formulă β astfel încât $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k} \vdash \beta$ şi $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k} \vdash \neg\beta$. Fie m cel mai mic număr astfel încât formulele $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k}$ aparţin mulţimii Γ_m. Şi deci Γ_m este inconsistentă. Însă acest lucru este imposibil, căci Γ_m este una din mulţimile şirului $\Gamma_1, \Gamma_2,...$ construit astfel încât $\Gamma_1 = \Gamma$ este consistentă (prin ipoteză) iar dacă Γ_n este consistentă, atunci Γ_{n+1} este consistentă.

b) Γ^* *este maximală.* Căci dacă $\Gamma^* \cup \{\alpha_n\}$ este consistentă, atunci şi $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ este consistentă şi deci $\alpha_n \in \Gamma_{n+1}$. Aşadar, $\alpha_n \in \Gamma^*$.

Lema 2. Orice mulţime consistentă Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ este satisfiabilă.

Demonstraţie. Ceea ce trebuie arătat este următorul fapt: *dacă Γ este o mulţime consistentă de formule, atunci există o interpretare în care toate formulele din Γ iau valoarea logică adevărat.* Prin *Lema 1*, Γ admite o extensie maximal consistentă Γ^*. Dacă α este o formulă elementară (i.e. variabilă propoziţională) care aparţine lui Γ^*, atunci îi asignăm valoarea logică adevărat (i.e. $\alpha = 1$); în caz contrar $\alpha = 0$. Vom demonstra, prin inducţie pe gradul unei formule, că în această interpretare următoarea echivalenţă are loc, pentru orice formulă α.

$$\alpha = 1 \text{ ddacă } \alpha \in \Gamma^*$$

$n = 0$. În acest caz formula α este o variabilă propoziţională şi deci rezultatul este imediat (prin construcţia interpretării).

$n > 0$. Presupunem că echivalenţa are loc pentru orice formulă α al cărei grad, j, este mai mic decât n şi arătăm că ea are loc şi pentru o formulă arbitrară al cărei grad este n. Întrucât operatorii primitivi ai sistemului S sunt negaţia şi implicaţia, vom considera distinct cele două cazuri.

---

[39] Este o demonstraţie în sensul Henkin, sens pe care-l vom avea în vedere şi în demonstrarea completitudinii logicii axiomatice a predicatelor (comp. L. Henkin, The completeness of the first-order functional calculus, *Journal of Symbolic Logic*, 14, 1949, 159-166).

[40] Fapt posibil, deoarece limbajul $\mathcal{L}_p$ conţine o mulţime infinit numărabilă de simboluri.

a) *α are forma $\neg\beta$.* Şi deci j este gradul formulei β.

1. $\neg\beta \in \Gamma^*$. Rezultă că $\beta \notin \Gamma^*$ (prin consistența lui Γ^*). Prin ipoteza inducției, echivalența are loc pentru β şi deci $\beta = 0$. Şi astfel $\neg\beta = 1$.

2. $\neg\beta \notin \Gamma^*$. Rezultă că $\Gamma^* \cup \{\beta\}$ este consistentă şi deci $\beta \in \Gamma^*$.

Argument: Presupunem că $\Gamma^* \cup \{\beta\}$ este inconsistentă. Rezultă că există o formulă γ astfel încât $\Gamma^*, \beta \vdash \gamma$ şi $\Gamma^*, \beta \vdash \neg\gamma$. Şi deci $\Gamma^*, \beta \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$ (prin Th. 27). Şi deci $\Gamma^* \vdash \beta \supset (\gamma \wedge \neg\gamma)$ (prin Th. Ded.). Şi astfel $\Gamma^* \vdash \neg(\gamma \wedge \neg\gamma) \supset \neg\beta$ (prin Th. 8) şi deci $\Gamma^* \vdash \neg\beta$ (Th. 35, MP). Şi astfel $\Gamma^* \cup \{\neg\beta\}$ este consistentă şi astfel $\neg\beta \in \Gamma^*$, ceea ce contrazice asumpția $\neg\beta \notin \Gamma^*$.

Însă dacă $\beta \in \Gamma^*$, atunci $\beta = 1$ (prin ipoteza inducției) şi deci $\neg\beta = 0$.

b) *α are forma $\beta \supset \gamma$.*

1. $\beta \supset \gamma \in \Gamma^*$. În acest caz avem: $\beta \notin \Gamma^*$ sau $\gamma \in \Gamma^*$. Cum β şi γ au gradele mai mici decât *n*, prin ipoteza inducției avem $\beta = 0$ sau $\gamma = 1$. Şi deci $\beta \supset \gamma = 1$.

2. $\beta \supset \gamma \notin \Gamma^*$. Rezultă că $\Gamma^* \cup \{\neg(\beta \supset \gamma)\}$ este consistentă şi deci $\neg(\beta \supset \gamma) \in \Gamma^*$ (cf. argumentului a2). Şi deci $\Gamma^* \vdash \neg(\beta \supset \gamma)$. Şi astfel $\Gamma^* \vdash \beta \wedge \neg\gamma$ (Th. 38). Şi deci $\Gamma^* \vdash \beta$ (Th. 20) şi $\Gamma^* \vdash \neg\gamma$ (Th. 21). Şi astfel $\beta \in \Gamma^*$ şi $\gamma \notin \Gamma^*$ (prin ipot. ind.). De unde $\beta = 1$ şi $\gamma = 0$. Şi astfel $\beta \supset \gamma = 0$.

Şi deci există o interpretare în care toate formulele din Γ^* sunt simultan adevărate. Aşadar şi formulele din Γ sunt adevărate în această interpretare (deoarece $\Gamma \subseteq \Gamma^*$). Şi deci sub asumpția consistenței lui Γ, *satisfiabilitatea* ei poate fi demonstrată.

Pe baza acestor două leme putem acum demonstra teorema de completitudine (în sens tare) a sistemului S.

Teorema de completitudine (în sens tare). Dacă $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$, atunci $\alpha_1,...,\alpha_n \vdash \beta$.

Demonstrație (contrapoziție). Presupunem că *non* $\alpha_1,...,\alpha_n \vdash \beta$ (i.e. β nu este deductibilă în S din $\alpha_1,...,\alpha_n$). În acest caz mulțimea $\alpha_1,...,\alpha_n, \neg\beta$ este consistentă (cf. exerc. 4). Şi deci, prin Lema 2, este satisfiabilă. Adică există o interpretare în care $\alpha_1,...,\alpha_n$ sunt adevărate iar β este falsă. Aşadar, *non* $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$.

Exerciții

1. Să se demonstreze următorul enunț (sens mai tare al th. corectitudinii):

Dacă $\alpha_1,...,\alpha_n \vdash \beta$, atunci $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$.

Indicație. Prin corol. Th. ded. avem $\vdash (\alpha_1 \supset ...(\alpha_n \supset \beta)...)$. De unde, prin Th. 30 obținem $\vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset \beta$. Şi astfel $\models (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset \beta$ (prin th. corect.). De unde, prin th. de normalitate: $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \models \beta$. Şi deci $\alpha_1,...,\alpha_n \models \beta$ (prin exerc. 4 din 2.1.2.4).

2. Fie α formula $\delta \supset \varepsilon$. Cu presupoziția completitudinii lui *S*, demonstrați că următoarea relație are loc: $\beta \equiv \gamma \vdash \alpha_\beta \equiv \alpha_\gamma$.

Indicație. (inducție pe gradul lui α_β). Avem $\alpha_\beta = \delta_\beta \supset \varepsilon_\beta$ iar $\alpha_\gamma = \delta_\gamma \supset \varepsilon_\gamma$. Prin ipoteza inducției avem $\alpha \equiv \beta \vdash \delta_\beta \equiv \delta_\gamma$ şi $\alpha \equiv \beta \vdash \varepsilon_\beta \equiv \varepsilon_\gamma$. De unde, prin formula *validă* a

$\mathcal{L}_p$ (şi deci teoremă prin completitudinea lui S): $[(\lambda_1 \equiv \lambda_2) \wedge (\lambda_3 \equiv \lambda_4)] \supset [(\lambda_1 \supset \lambda_3) \equiv (\lambda_2 \supset \lambda_4)]$ plus Th. 27, MP obţinem rezultatul.

3. a) Fie HA[41] următorul sistem axiomatic:

Ax1. $(p \vee p) \supset p$; Ax2. $p \supset (p \vee q)$; Ax3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$; Ax4. $(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$. Reguli de deducţie:

Regula substituţiei: $\dfrac{\alpha(p_1,\ldots,p_k)}{\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)}$ şi MP $\dfrac{\alpha, \alpha \supset \beta}{\beta}$

Demonstraţi următoarele reguli (derivate) ale sistemului HA:

R_1. $\alpha \vee \alpha \vdash \alpha$

R_2. $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

R_3. $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$

R_4. $\alpha \supset \beta \vdash [(\gamma \vee \alpha) \supset (\gamma \vee \beta)]$

R_5. $\alpha \supset \beta \vdash [(\gamma \supset \alpha) \supset (\gamma \supset \beta)]$

b) Demonstraţi teorema corectitudinii acestui sistem, în următoarea interpretare aritmetică a sintaxei lui: *p, q, r* sunt variabile aritmetice care pot lua valorile 0 sau 1; $\neg p = 1$ ddacă $p = 0$; $p \vee q = pq$ (produsul aritmetic).

Indicaţie. În această interpretare toate formulele demonstrabile (şi numai ele) iau valoarea 0. Detaliaţi demonstraţia.

4. Să se demonstreze următorul enunţ:

Dacă *non* $\Gamma \vdash \alpha$, atunci $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este consistentă.

Indicaţie. Presupunem $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă.

Deci $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$ şi $\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta$. Şi astfel $\Gamma \vdash \neg\alpha \supset (\beta \wedge \neg\beta)$. Şi astfel $\Gamma \vdash \alpha$ (contradicţie).

[41] HA este sistemul Hilbert/Ackermann, din *Grundzüge der theoretischen Logik*, § 10, obţinut din sistemul Whitehead/Russell din *Principia Mathematica* (prima ed.) prin omiterea axiomei care redă asociativitatea disjuncţiei.

2.4. Deducția naturală în $\mathcal{L}_p$

Spre deosebire de celelalte procedee de demonstrație, sistemele deducției naturale constituie un mijloc de decizie care corespunde în mai mare măsură modurilor practice de inferare în argumentarea informală sau în diferitele compartimente ale științei. Astfel de sisteme sunt construcții bazate pe acceptarea fără demonstrație a câtorva *reguli fundamentale*, cu ajutorul cărora se construiește întreg edificiul unui calcul. Primele construcții de acest gen datează din deceniul patru al secolului 20, prin contribuțiile notabile ale lui G. Gentzen[42] și St. Jaskowski[43]. Astăzi sistemele deducției naturale cunosc o mare diversitate. În cele ce urmează ne vom limita la analiza detaliată a unui astfel de sistem [44].

Simbolurile primitive ale sistemului sunt: variabilele propoziționale p, q, r, ... (cu sau fără indici); operatorii logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $/$, parantezele), (,], [, }, {. Conceptul de „formulă a calculului propozițional" este cel din paragrafele anterioare. În sistem vom opera cu două categorii de reguli: *regulile structurale*, care determină structura unei demonstrații (directe sau indirecte), și *regulile fundamentale de adăugare de noi termeni* șirului de formule care constituie demonstrația.

2.4.1. Sistemul deducției naturale

I. Reguli fundamentale și reguli structurale

a) *Regulile fundamentale* de adăugare de noi termeni (formule) sunt scheme deductive de forma *premise – concluzie*. Adică, date fiind formulele $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ $(n \geq 1)$, numite *premise* (asumpții), conchidem β, numită *concluzie*. Ele au așadar forma:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

Fiecare operator logic binar din cei menționați mai sus, cu excepția $\supset$, este explicitat prin două astfel de reguli, una de *introducere* iar cealaltă de *eliminare*. Aceste reguli pot fi construite cu ușurință pe baza definiției semantice a operatorilor respectivi.

Reguli de introducere (I) — *Reguli de eliminare (E)*

$$\mathrm{I}_{\wedge}.\ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \hline \alpha \wedge \beta \end{array} \qquad \mathrm{I}_{/}.\ \begin{array}{c} \neg\alpha \\ \hline \alpha / \beta \end{array},\ \begin{array}{c} \neg\beta \\ \hline \alpha / \beta \end{array} \qquad \mathrm{E}_{\wedge}:\ \begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array},\quad \mathrm{E}_{/}.\ \begin{array}{c} \alpha / \beta \\ \hline \neg\alpha \vee \neg\beta \end{array}$$

$$\mathrm{I}_{\vee}.\ \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha \vee \beta \end{array},\ \begin{array}{c} \beta \\ \hline \alpha \vee \beta \end{array} \qquad \mathrm{E}_{\vee}:\ \begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

---

[42] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, *Math. Zeitschr.* 39, 1934-35.

[43] St. Jaskowski, On the Rules of Supposition in Formal Logic, *Studia Logica*, Warszawa, 1, H. 1, 1934.

[44] Sistemul de față este o variantă a sistemului elaborat de J. Slupecki și L. Borkowski, *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*, Warszawa, 1967.

$$I_{\equiv}.\quad \frac{\begin{matrix}\alpha \supset \beta \\ \beta \supset \alpha\end{matrix}}{\alpha \equiv \beta} \qquad E_{\equiv}:\quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\begin{matrix}\alpha \supset \beta \\ \beta \supset \alpha\end{matrix}} \qquad E_{\supset}\quad \frac{\begin{matrix}\alpha \\ \alpha \supset \beta\end{matrix}}{\beta}$$

Remarcă. Ordinea premiselor este neimportantă. Acolo unde la „numitor" apar două formule, regulile respective ($E_{\wedge}, E_{\equiv}$) concentrează două cazuri distincte. Căci din adevărul echivalenței, de exemplu, se poate conchide asupra adevărului oricăreia din cele două implicații.

Distincția *introducere-eliminare* este motivată astfel: într-o regulă de introducere a unui operator, operatorul respectiv nu apare în premise, iar în cea de eliminare el nu apare în concluzie.

Cu excepția $I_{\vee}$ toate regulile sunt perfect intuitive. Dacă, de exemplu, două propoziții oarecare sunt adevărate, atunci putem conchide asupra adevărului *conjuncției* lor ($I_{\wedge}$), așa cum adevărul conjuncției determină adevărul argumentelor ei ($E_{\wedge}$) ş.a.m.d. În cazul $I_{\vee}$ validitatea este garantată de faptul că premisa fiind adevărată, concluzia este întotdeauna adevărată (este, deci, indiferentă la adăugarea disjunctivă a unei formule arbitrare).

b) *Regulile structurale*

Înainte de a formula cele două reguli structurale pentru construcția unei demonstrații directe, respectiv indirecte, vom avea în vedere faptul că *orice* formulă a logicii propozițiilor poate fi înțeleasă ca având forma din schema următoare:

Sch: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset (\alpha_3 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots))$, $n \geq 0$

Explicația este simplă, e vorba despre o „lectură" a oricărei formule din perspectiva operatorului $\supset$. Schema de mai sus nu înseamnă că orice formulă este/are o implicație sau că trebuie adusă la o asemenea formă.

Dacă operatorul principal [45] al formulei considerate nu este implicația, atunci $n = 0$, iar formula este formula β din schema de mai sus. Dar dacă operatorul principal este implicația, atunci formula are forma $\gamma \supset \delta$, şi deci γ este α_1. Dacă operatorul principal al lui δ nu este $\supset$, atunci δ este formula β. Iar dacă operatorul principal al lui δ este $\supset$, atunci δ are forma $\varepsilon \supset \iota$, în care ε este α_2 iar ι este β, dacă operatorul principal nu este $\supset$, iar dacă operatorul principal al lui ι este $\supset$, atunci continuăm, raționând ca mai sus. Analiza se încheie atunci când ajungem la o formulă al cărei operator principal nu este $\supset$, adică la formula β.

În cele ce urmează „formule" înseamnă configurații de simboluri de forma *Sch*.

(**DIR**) *Regula structurală pentru construcția unei demonstrații directe*

1. Primii n termeni ai şirului care constituie demonstrația unei formule îi reprezintă formulele asumpție (premisele) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ale demonstrației.

2. a) Orice teoremă deja demonstrată poate fi adăugată ca nou termen al şirului.

b) Orice formulă obținută prin aplicarea celor 9 reguli fundamentale asupra termenilor deja existenți ai şirului poate fi adăugată demonstrației.

[45] Intuitiv, un operator al unei formule este operatorul principal dacă în evaluarea matriceală a formulei operația respectivă este *ultima* care trebuie executată.

3. Demonstrația directă a unei formule este completă dacă ultimul termen al șirului de formule care constituie demonstrația este formula β.

(**INDIR**) *Regula structurală pentru construcția unei demonstrații indirecte*

1. a) Primii *n* termeni ai șirului care constituie demonstrația unei formule îi reprezintă formulele asumpție (premise) $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ale demonstrației.

b) Cel de-al $(n+1)$-lea termen al șirului este $\neg\beta$, introdus ca premisă a demonstrației indirecte.

2. a) Orice teoremă deja demonstrată poate fi adăugată ca nou termen al șirului.

b) Orice formulă obținută prin aplicarea celor 9 reguli fundamentale asupra termenilor deja existenți ai șirului poate fi adăugată demonstrației.

3. Demonstrația indirectă a unei formule este completă dacă șirul respectiv de formule conține atât o formulă cât și negația ei, fapt simbolizat prin *.

Dacă există o demonstrație directă sau indirectă pentru o formulă α, atunci formula respectivă este o *teoremă* (simbolic: $\vdash \alpha$).

Exemple.

Th1. $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$

1. $p \supset (q \supset r)$; α_1
2. q; α_2
3. p; α_3
4. $q \supset r$; 1, 3, $E_\supset$
5. r; 2, 4, $E_\supset$

Notațiile din dreapta fiecărui rând reprezintă: formule premise ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), respectiv pașii din care s-au obținut formulele prin aplicarea regulii fundamentale specificate.

Th2. $[(p \supset q) \wedge \neg q] \supset \neg p$

1. $(p \supset q) \wedge \neg q$; α_1
2. p; $\neg\beta$
3. $p \supset q$; 1, $E_\wedge$
4. $\neg q$; 1, $E_\wedge$
5. q; 2, 3, $E_\supset$

*

Aici avem o demonstrație indirectă, în pasul 2 formula $\neg\beta$, adică *p*, este tocmai premisa introdusă ca asumpție specifică acestei demonstrații.

Th 3. $[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \supset p$

1. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$; α_1
2. $\neg p$; $\neg\beta$
3. $p \vee q$; 1, $E_\wedge$
4. $p \vee \neg q$; 1, $E_\wedge$
5. q; 2, 3, $E_\vee$
6. p; 4, 5, $E_\vee$

*

Th4. $[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

1. $(p \supset q) \wedge (q \supset r)$; α_1

Th4. (variantă) $[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

1. $(p \supset q) \wedge (q \supset r)$; α_1

2. p; α_2
3. $p \supset q$; 1, $E_\wedge$
4. $q \supset r$; 1, $E_\wedge$
5. q; 2, 3, $E_\supset$
6. r; 4, 5, $E_\supset$

2. p; α_2
3. $\neg r$; $\neg\beta$
4. $p \supset q$; 1, $E_\wedge$
5. $q \supset r$; 1, $E_\wedge$
6. q; 2, 4, $E_\supset$
7. r; 5, 6, $E_\supset$

*

Comparând cele două demonstrații ale aceleiași formule, cea directă și cea indirectă (variantă) constatăm că orice demonstrație directă se poate „traduce" în una indirectă, dacă imediat după cele *n* asumpții trecem premisa $\neg\beta$ (pasul 3) și obținem o contradicție între formula acestui pas și ultima formulă din șir (7). Întreaga logică a propozițiilor poate fi redată cu ajutorul regulii structurale a demonstrației indirecte, cea a demonstrației directe nefiind totuși suficientă acestui scop.

Th5. $\neg(p \wedge q) \vee [r \vee (p \wedge q)]$

1. $\neg\{\neg(p \wedge q) \vee [r \vee (p \wedge q)]\}$; $\neg\beta$
2. $\neg\neg(p \wedge q)$; 1, $E_\downarrow$[46]
3. $\neg[r \vee (p \wedge q)]$; 1, $E_\downarrow$
4. $\neg r$; 3, $E_\downarrow$
5. $\neg(p \wedge q)$; 3, $E_\downarrow$

*

Din exemplele de mai sus putem deduce că modul în care executăm demonstrația depinde de *operatorul principal* al formulei. Avem două cazuri posibile, după cum operatorul principal este sau nu implicația.

a) Dacă operatorul principal *nu* este implicația, atunci fie apelăm la teoreme anterior demonstrate, fie recurgem la o demonstrație indirectă, în care *negația* formulei care trebuie demonstrată se introduce ca premisă a demonstrației indirecte.

b) Dacă operatorul principal este implicația, atunci antecedentul implicației se trece ca premisă a demonstrației. Dacă consecventul este tot o implicație, atunci procedăm similar, adăugând antecedentul consecventului ca următoarea premisă a demonstrației. Procedăm astfel până la explicitarea tuturor premiselor și continuăm cu demonstrația directă a formulei (conform algoritmului specificat în regula respectivă), până ajungem la formula β. Dacă procedând în acest fel demonstrația directă nu izbutește, atunci adăugăm formula $\neg\beta$ ca premisă a demonstrației indirecte și continuăm până la obținerea unei contradicții.

II. Reguli de deducție derivate

În paragraful anterior, 2.3, am operat cu axiome, dar și cu *scheme* de axiome, am demonstrat o teoremă, menționând că demonstrația rămâne valabilă dacă vom substitui variabilele propoziționale ale demonstrației cu formule arbitrare (în acord cu regula substituției), obținând astfel o *schemă* de demonstrație, iar enunțul teoremei obținut prin substituții este o *schemă* de teoremă.

Ideea de „schemă de teoremă" rămâne perfect valabilă și în calculul deducției naturale. Să luăm un exemplu simplu.

Fie următoarea teoremă a logicii propozițiilor: *Th6*: $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \wedge q) \supset r]$. Coloana de formule din dreapta reprezintă *schema* teoremei *Th6*, plus *schema* demonstrației.

[46] Cele două reguli, corespunzătoare operatorului $\downarrow$, sunt reguli *derivate*; comp. Th. 26 (mai jos).

1. $p \supset (q \supset r)$, α_1 — 1'. $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$; α_1

2. $p \wedge q$; α_2 — 2'. $\alpha \wedge \beta$; α_2

3. p; 2, $E_\wedge$ — 3'. α, 2', $E_\wedge$

4. q; 2, $E_\wedge$ — 4'. β, 2', $E_\wedge$

5. $q \supset r$; 1, 3, $E_\supset$ — 5'. $\beta \supset \gamma$, 1', 3', $E_\supset$

6. r; 4, 5 $E_\supset$ — 6'. γ, 4', 5', $E_\supset$

Aşadar, *o dată demonstrată o teoremă, putem considera demonstrată orice formulă a logicii propoziţiilor care are forma teoremei respective.* Această aserţiune nu este o regulă prin care adăugăm noi termeni unei demonstraţii, ci o regulă prin care dintr-o teoremă (o dată demonstrată) obţinem alte teoreme.

Însă, în cazul în care operatorul principal al unei teoreme este implicaţia, atunci, prin constatarea de mai sus, o dată demonstrată teorema, putem conchide că şi schema corespunzătoare este demonstrabilă. Cum operatorul principal al teoremei este $\supset$, schema va avea următoarea formă (condiţia $n \geq 1$ fiind necesară!).

Sch T: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)$; $n \geq 1$

Pe baza acestui fapt sunt valide următoarele reguli *derivate* de deducţie:

$$R\,\mathrm{I}.1.\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \supset (\ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)};\quad R\,\mathrm{I}.2.\ \frac{\alpha_1 \quad \alpha_2}{\alpha_3 \supset (\ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)};\ \ldots;\quad R\,\mathrm{I}.n.\ \frac{\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n}{\beta}$$

Dacă într-o demonstraţie premisele acestor reguli figurează ca termeni (nu contează ordinea) ai şirului de formule corespunzător, atunci putem adăuga *Sch T* ca un nou termen al şirului, iar printr-o aplicaţie de k-ori ($k = 1, \ldots, n$) a $E_\supset$ obţinem concluzia regulii respective. Din *Th6* de mai sus putem obţine, de exemplu, următoarele două reguli derivate:

a) $$\frac{\alpha \supset (\beta \supset \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \supset \gamma}$$

b) $$\frac{\alpha \supset (\beta \supset \gamma) \quad \alpha \wedge \beta}{\gamma}$$

Th7. $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$ (exerciţiu)

Th8. $(p \vee q) \supset (\neg q \supset p)$ (exerciţiu)

Th9. $[(p \supset r) \wedge (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset r]$

1. $(p \supset r) \wedge (q \supset r)$; α_1
2. $p \vee q$; α_2
3. $\neg r$; $\neg\beta$
4. $p \supset r$; 1 $E_\wedge$
5. $q \supset r$; 1 $E_\wedge$
6. $\neg p$; 4, 3 *Th7*
7. $\neg q$; 5, 3 *Th7*
8. p; 2, 7 *Th8*

*

Th9 ilustrează modul în care teoreme anterior demonstrate pot figura în demonstrarea unei teoreme. Aici, când în pasul 6 am conchis $\neg p$ din paşii 4 şi 3, am avut în vedere *schema* unei teoreme anterior demonstrate. Conchiderea $\neg p$ în pasul 6 pe baza schemei teoremei *Th7* se face printr-o dublă aplicare a $E_{\supset}$ asupra formulei $(p \supset r) \supset (\neg r \supset \neg p)$, obţinută din schema *Th7*, premisele $p \supset r$ (4) şi $\neg r$ (3) fiind deja termeni ai demonstraţiei.

Pe baza *Th7*, *Th8* şi *Th9* putem construi regulile derivate de deducţie corespunzătoare (*exerciţiu*).

În demonstraţii de teoreme în care operatorul principal este *echivalenţa* ne vom folosi de regula $E_{\equiv}$, însă în următorul fel. Dacă $\alpha \equiv \beta$ este o teoremă, atunci vor fi teoreme $\alpha \supset \beta$ şi $\beta \supset \alpha$, caz în care vom demonstra *separat* cele două formule.

Exemplu. Să se demonstreze următorul enunţ care fundamentează metoda antilogismului: „Dacă într-un silogism valid în locul unei premise vom pune *negaţia* concluziei, aceasta echivalează cu obţinerea unui nou silogism a cărui concluzie este *negaţia* premisei înlocuite". Formal exprimat, avem:

Th10. $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [(\neg r \wedge q) \supset \neg p]$.

Avem de demonstrat următoarele două implicaţii:

a) $[(p \wedge q) \supset r] \supset [(\neg r \wedge q) \supset \neg p]$

1. $(p \wedge q) \supset r$; α_1
2. $\neg r \wedge q$; α_2
3. p; $\neg\beta$
4. $\neg r$; 2 $E_{\wedge}$
5. q; 2 $E_{\wedge}$
6. $p \wedge q$; 3, 5 $I_{\wedge}$
7. r; 1, 6, $E_{\supset}$

*

b) $[(\neg r \wedge q) \supset \neg p] \supset [(p \wedge q) \supset r]$

1. $(\neg r \wedge q) \supset \neg p$; α_1
2. $p \wedge q$; α_2
3. $\neg r$; $\neg\beta$
4. p; 2 $E_{\wedge}$
5. q; 2 $E_{\wedge}$
6. $\neg r \wedge q$; 3, 5 $I_{\wedge}$
7. $\neg p$; 1, 6 $E_{\supset}$

*

Th11. $\neg\neg p \equiv p$

a) $\neg\neg p \supset p$ (eliminarea dublei negaţii)

1. $\neg\neg p$; α_1
2. $\neg p$; $\neg\beta$

*

b) $p \supset \neg\neg p$ (introducerea dublei negaţii)

1. p; α_1
2. $\neg\neg\neg p$; $\neg\beta$
3. $\neg p$; $E_{\neg\neg}$

*

Din a) şi b) obţinem *Th11* (prin $I_{\equiv}$).

Aici, din *11a* putem construi următoarea regulă derivată de deducţie, utilă în multe demonstraţii care reclamă *eliminarea* dublei negaţii:

$$RdE_{\neg\neg}.\ \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Aplicarea regulii $E_{\neg\neg}$ ne permite să omitem într-o demonstraţie, de ori câte ori dorim, orice număr *par* de negaţii.

Pe baza *11b* putem construi, similar, regula *introducerii* dublei negaţii.

$$RdI_{\neg\neg}.\ \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Regula introducerii dublei negații fundamentează construcția unor *variante* ale regulii eliminării disjuncției.

RdE$_{\vee}$

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta \qquad \alpha}{\beta} \qquad\qquad \frac{\alpha \vee \neg\beta \qquad \beta}{\alpha}$$

Demonstrație.

1. $\neg\alpha \vee \beta$; α_1
2. α; α_2
3. $\neg\neg\alpha$; 2, $I_{\neg\neg}$
4. β; 1, 3 $E_{\vee}$

Demonstrație (exercițiu).

Sensul intuitiv al acestor reguli este de fapt sensul intuitiv al regulii $E_{\vee}$: un argument al disjuncției este o consecință a acelei disjuncții și a contradictoriului celuilalt argument.

Th12. $p \equiv p$ (exercițiu)
Th13. $(\neg p \vee q) \equiv (p \supset q)$ (exercițiu)
Th14. $(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$ (exercițiu)
Th15. $[p \supset (q \equiv \neg q)] \supset \neg p$ (exercițiu)
Th16. $[(p \supset q) \wedge \neg q] \supset \neg p$ (exercițiu)

Din *Th16* obținem regula *modus tollens*:

Rtoll
$$\frac{\alpha \supset \beta \qquad \neg\beta}{\neg\alpha}$$

conform căreia negația antecedentului unei implicații poate fi obținută din implicație și din negația consecventului ei. Având în vedere că formulele din premisele regulii, α și β, pot fi negate sau nenegate, putem obține variante ale acestei reguli derivate (exercițiu).

Th17. $[p \supset (q \wedge \neg q)] \supset \neg p$ (*Reductio ad absurdum*) (exercițiu).
Th18. $(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$ (exercițiu)
Th19. $[(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)] \supset (p \equiv r)$

1. $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)$; α_1
2. $p \equiv q$; 1, $E_{\wedge}$
3. $q \equiv r$; 1, $E_{\wedge}$
4. $p \supset q$; 2, $E_{\equiv}$
5. $q \supset p$; 2, $E_{\equiv}$
6. $q \supset r$; 3, $E_{\equiv}$
7. $r \supset q$; 3, $E_{\equiv}$
8. $p \supset r$; 4, 6, *Th4*
9. $r \supset p$; 7, 5, *Th4*
10. $p \equiv r$; 8, 9, $I_{\equiv}$

Th20 a) $[(p \equiv q) \wedge p] \supset q$ (exercițiu); b) $[(p \equiv q) \wedge q] \supset p$ (exercițiu)

Th20 fundamentează construcția a două reguli de deducție derivate pentru echivalență.

$$\text{Rd}_{\equiv}\quad \frac{\alpha \equiv \beta \qquad \alpha}{\beta} \qquad\qquad \frac{\alpha \equiv \beta \qquad \beta}{\alpha}$$

a) Argumentați validitatea acestor reguli.

b) Având în vedere faptul că α şi β pot fi negate sau nenegate, construiți alte reguli derivate valide pentru echivalență.

Th21. 1. $(p \equiv q) \supset (\neg p \equiv \neg q)$

2. $(p \equiv q) \supset [(p \wedge r) \equiv (q \wedge r)]$

3. $(p \equiv q) \supset [(p \vee r) \equiv (q \vee r)]$

4. $(p \equiv q) \supset [(p \supset r) \equiv (q \supset r)]$

Th21 reprezintă câteva legi ale extensionalității echivalenței (exercițiu). Ele fundamentează regula corespunzătoare a înlocuirii echivalenților.

$$\text{Rînloc}_{\equiv}: \quad \frac{\beta \equiv \gamma}{\alpha_{\beta} \equiv \alpha_{\gamma}}$$

Prin expresia α_{γ} înțelegem o formulă care se obține din formula α_{β} prin înlocuirea a zero sau mai multe ocurențe ale subformulei β a lui α cu formula γ.

Exemplu. Dacă α este formula $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$, β este $q \supset r$ iar γ este $\neg q \vee r$, atunci α_{γ} este: $(p \supset q) \supset [(\neg q \vee r) \supset (p \supset r)]$.

RII. Regula adăugării unei implicații unei demonstrații, pe baza adăugării unei premise suplimentare.

Pe baza acestei reguli, într-o demonstrație directă sau indirectă din premise date, este admisă introducerea unei formule suplimentare α_i ca premisă adițională (*Ad*) a demonstrației. Dacă din această premisă adițională şi din premisele date se obține o formulă α_j, atunci implicația $\alpha_i \supset \alpha_j$ poate fi adăugată ca *nou termen al şirului care constituie demonstrația.*

Aşadar, dacă teorema inițială era *ThA*: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)$, atunci prin *RII* (dacă condiția este satisfăcută) următoarele două formule sunt de asemenea teoreme:

ThA_1: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset (\alpha_i \supset \alpha_j))\ldots)$, în cazul demonstrației directe a lui *ThA*.

ThA_2: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset (\neg\beta \supset (\alpha_i \supset \alpha_j)))\ldots)$, în cazul demonstrației indirecte a *ThA*.

Fără aplicarea *RII* am fi putut obține implicația $\alpha_i \supset \alpha_j$ în demonstrarea teoremei *ThA*, doar dacă am fi demonstrat în prealabil *fie* ThA_1, *fie* ThA_2, şi am fi adăugat-o ca termen al demonstrației teoremei *ThA*. Apoi, în această demonstrație a teoremei *ThA* aplicam asupra ThA_1 de n-ori regula eliminării implicației $E_{\supset}$ plus primii n termeni şi obțineam $\alpha_i \supset \alpha_j$. Dacă *ThA* a fost demonstrată indirect, atunci aplicăm asupra ThA_2 de $n+1$ ori regula $E_{\supset}$ plus primii $n+1$ termeni şi obținem $\alpha_i \supset \alpha_j$.

Premisa adițională, laolaltă cu toate formulele din demonstrație, obținute cu ajutorul ei, sunt numerotate *distinct* (dublu numerotate, de exemplu)[47]. Toate aceste formule dublu numerotate vor fi utilizate *strict* la obținerea implicației $\alpha_i \supset \alpha_j$ şi nu vor mai fi folosite ulterior în demonstrație. Implicația $\alpha_i \supset \alpha_j$ va fi însă *simplu* numerotată. (Într-o demonstrație pot să apară mai multe premise adiționale şi nu doar una).

---

[47] Cf. J. Slupecki; L. Borkowski, *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*, Warszawa, 1967, 31.

Exemplu.

Th22. $[p \supset (q \wedge r)] \supset [(p \supset q) \wedge (p \supset r)]$

1. $p \supset (q \wedge r)$; α_1

1.1. p; *Ad*

1.2. $q \wedge r$; 1, 1.1. $E_{\supset}$

1.3. q; 1.2. $E_{\wedge}$

1.4. r; 1.2. $E_{\wedge}$

2. $p \supset q$; 1.1., 1.3., *RII*

3. $p \supset r$; 1.1., 1.4., *RII*

4. $(p \supset q) \wedge (p \supset r)$; 2, 3, $I_{\wedge}$

Această regulă derivată, *RII*, este utilă în multe demonstrații de teoreme, în sensul că face complet dispensabil apelul la alte teoreme, anterior demonstrate. *Th22*, de exemplu, putea fi demonstrată fără a apela la *RII*, dar prin utilizarea următoarelor două teoreme:

Th23. $[p \supset (q \wedge r)] \supset (p \supset q)$

1. $p \supset (q \wedge r)$; α_1

2. p; α_2

3. $q \wedge r$; 1, 2, $E_{\supset}$

4. q, 3, $E_{\wedge}$

Th24. $[p \supset (q \wedge r)] \supset (p \supset r)$ (exercițiu)

Pe baza acestor două teoreme, demonstrația *Th22* arată astfel:

1. $p \supset (q \wedge r)$; α_1

2. $[p \supset (q \wedge r)] \supset (p \supset q)$; *Th23*

3. $[p \supset (q \wedge r)] \supset (p \supset r)$; *Th24*

4. $p \supset q$; 1, 2 $E_{\supset}$

5. $p \supset r$; 1, 3 $E_{\supset}$

6. $(p \supset q) \wedge (p \supset r)$; 4, 5, $I_{\wedge}$

Comparând cele două demonstrații ale *Th22* cititorul poate sesiza avantajele utilizării *RII*.

Th25. $[(p \supset q) \wedge (p \supset r)] \supset [p \supset (q \wedge r)]$ (Conversa *Th22*) (*exercițiu*).

RIII. Regula introducerii negației unei premise arbitrare.

Potrivit acestei reguli, dacă prin adăugarea unei premise arbitrare într-o demonstrație rezultă atât o formulă cât și negația ei, atunci *negația* premisei arbitrare poate fi adăugată ca nou termen al șirului de formule care constituie demonstrația.

Argument. Presupunem că prin introducerea unei premise α_i într-o demonstrație obținem formulele reciproc contradictorii α_j și $\neg\alpha_j$. Prin regula introducerii conjuncției ($I_{\wedge}$) putem adăuga demonstrației și formula $\alpha_j \wedge \neg\alpha_j$, iar prin regula *RII*, de mai sus, putem adăuga și formula $\alpha_i \supset (\alpha_j \wedge \neg\alpha_j)$. Pe baza *Th15* din această formulă obținem formula $\neg\alpha_i$, adică negația premisei arbitrare introduse.

Exemple.

Th26. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

a) $\neg(p \vee q) \supset (\neg p \wedge \neg q)$

1. $\neg(p \vee q)$; α_1

1.1. p; *Ad*

b) $(\neg p \wedge \neg q) \supset \neg(p \vee q)$

1. $\neg p \wedge \neg q$; α_1

2. $p \vee q$; $\neg\beta$, $E_{\neg\neg}$

1.2. $p \vee q$; 1.1. $I_\vee$
2. $\neg p$; 1.1., 1, 1.2., RIII
2.1. q; *Ad*
2.2. $p \vee q$; 2.1., $I_\vee$
3. $\neg q$; 2.1., 1, 2.2., RIII
4. $\neg p \wedge \neg q$; 2, 3 $I_\wedge$

3. $\neg p$; 1 $E_\wedge$
4. $\neg q$; 1 $E_\wedge$
5. q, 2, 3, $E_\vee$
6. p, 2, 4, $E_\vee$
*

Th26a şi Th26b permit, corespunzător, derivarea unor reguli de deducţie:

$$E_\downarrow.\ \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \quad \neg\beta} \qquad\qquad I_\downarrow.\ \frac{\neg\alpha \quad \neg\beta}{\alpha \downarrow \beta}$$

Aici „$\downarrow$" este operatorul logic al *rejecţiei*, cele două reguli fiind, respectiv, *eliminarea* rejecţiei şi *introducerea* rejecţiei. Îl vom folosi în continuare ca *abreviere* pentru *negarea disjuncţiei.*

Th27. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

a) $\neg(p \wedge q) \supset (\neg p \vee \neg q)$
1. $\neg(p \wedge q)$; α_1
2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$; $\neg\beta$
3. $\neg\neg p$; 2, $E_\downarrow$
4. $\neg\neg q$; 2, $E_\downarrow$
5. p; 3 $E_{\neg\neg}$
6. q, 4 $E_{\neg\neg}$
7. $p \wedge q$; 5, 6 $I_\wedge$
*

b) $(\neg p \vee \neg q) \supset \neg(p \wedge q)$
1. $\neg p \vee \neg q$; α_1
2. $p \wedge q$; $\neg\beta$
3. p; 2, $E_\wedge$
4. q; 2, $E_\wedge$
5. $\neg q$; 1, 3 $E_\vee$
6. $\neg p$; 1, 4 $E_\vee$
*

Remarcă. Th27a şi *b* fundamentează, corespunzător, cele două reguli de deducţie derivate pentru negarea conjuncţiei, adică pentru incompatibilitate, „/", motiv pentru care poate fi construit un tablou al deducţiei naturale în care „/" nu figurează ca regulă fundamentală.

Th28 (Legea lui Haubert)[48]:
$[(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge (p \vee r) \wedge \neg(q \wedge s)] \supset [(q \supset p) \wedge (s \supset r)]$
1. $(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge (p \vee r) \wedge \neg(q \wedge s)$; α_1
2. $p \supset q$; 1, $E_\wedge$
3. $r \supset s$; 1, $E_\wedge$
4. $p \vee r$; 1, $E_\wedge$
5. $\neg(q \wedge s)$; 1, $E_\wedge$
6. $\neg q \vee \neg s$; 5, Th27, $Rînloc_\equiv$
1.1. q; *Ad*
1.2. $\neg s$; 6, 1.1. $E_\vee$
1.3. $\neg r$; 3, 1.2., *Rtoll*
1.4. p; 4, 1.3., $E_\vee$
7. $q \supset p$; 1.1, 1.4., RII

[48] Sau *Legea unui sistem închis de teoreme* sau *Legea conversiei implicaţiilor*; cf. Slupecki, Borkowski, 41.

2.1. s; *Ad*
2.2. $\neg q$; 6, 2.1, $E_\vee$
2.3. $\neg p$; 2, 2.2., *Rtoll*
2.4. r; 4, 2.3, $E_\vee$
8. $s \supset r$; 2.1., 2.4., RII
9. $(q \supset p) \wedge (s \supset r)$; 7, 8, $I_\wedge$

Th28 fundamentează construcția unei reguli corespunzătoare de deducție (exercițiu). Forma generalizată la n implicații a acestei reguli derivate este următoarea:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \supset \beta_1 \\ \alpha_2 \supset \beta_2 \\ \\ \\ \alpha_n \supset \beta_n \\ \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n \\ \neg(\beta_i \wedge \beta_j) \text{ pentru } 1 \le i \ne j \le n \\ \hline \beta_1 \supset \alpha_1 \\ \beta_2 \supset \alpha_2 \\ \\ \\ \beta_n \supset \alpha_n \end{array}$$

RIV. Regula demonstrației ramificate cu ajutorul premiselor adiționale.

RIV.1. Demonstrația *directă* a unei formule $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)$ este completă dacă un termen al demonstrației este o disjuncție $\alpha_i \vee \alpha_j$ și dacă formula β se obține pe baza fiecărei premise adiționale α_i, α_j.

RIV.2. Demonstrația *indirectă* a unei formule $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset \ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)$ este completă dacă $\alpha_i \vee \alpha_j$ este un termen al demonstrației și dacă pe baza *fiecărei* premise adiționale α_i, α_j, demonstrația conține două formule reciproc contradictorii.

Argument pentru RIV.1. Dacă pe baza premiselor adiționale α_i, α_j se obține formula β, atunci, prin RII, putem adăuga demonstrației formulele $\alpha_i \supset \beta$ și $\alpha_j \supset \beta$, care, prin $I_\wedge$, dau formula $(\alpha_i \supset \beta) \wedge (\alpha_j \supset \beta)$. Cum $\alpha_i \vee \alpha_j$ este o formulă a demonstrației (prin ipoteză), atunci prin *Th9*, prin dubla aplicare a $E_\supset$, obținem β.

Argument pentru RIV.2. Dacă pe baza premiselor adiționale α_i, α_j obținem atât o formulă cât și negația ei, atunci, prin RIII, putem adăuga demonstrației formulele $\neg\alpha_i$ și $\neg\alpha_j$. Însă din $\alpha_i \vee \alpha_j$, formulă a demonstrației, și $\neg\alpha_i$ obținem, prin $E_\vee$, α_j. Așadar, atât α_j cât și $\neg\alpha_j$ sunt formule ale demonstrației și astfel demonstrația indirectă este completă.

Remarcă. În demonstrația regulii RIV am presupus introducerea a două formule adiționale α_i și α_j. Regula rămâne valabilă, firește, pentru orice număr finit de astfel de formule.

Exemplu (aplicarea RIV.1.)

Th29. $[(p \supset q) \wedge (r \supset s)] \supset [(p \vee r) \supset (q \vee s)]$

1. $(p \supset q) \wedge (r \supset s)$; α_1
2. $p \vee r$; α_2
3. $p \supset q$; 1 $E_\wedge$
4. $r \supset s$; 1 $E_\wedge$

1.1. p; *Ad*

1.2. q; 3 $E_\supset$

1.3. $q \vee s$; 1.2., $I_\vee$

2.1. r; *Ad*

2.2. s; 4, 2.1. $E_\supset$

2.3. $q \vee s$; 2.2., $I_\vee$

5. $q \vee s$; 2, 1.3., 2.3., RIV.1.

Exemplu (aplicarea RIV.2.)

Th30. $[(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge \neg(q \vee s)] \supset \neg(p \vee r)$

1. $(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge \neg(q \vee s)$; α_1
2. $p \vee r$; $\neg\beta$
3. $p \supset q$; 1 $E_\wedge$
4. $r \supset s$; 1 $E_\wedge$
5. $\neg(q \vee s)$; 1 $E_\wedge$

1.1. p; *Ad*

1.2. q; 1.1., 3, $E_\supset$

1.3. $q \vee s$; 1.2., $I_\vee$

2.1. r; *Ad*

2.2. s; 4, 2.1., $E_\supset$

2.3. $q \vee s$; 2.2., $I_\vee$

*

În *Th30* introducerea premiselor adiționale p, q duc la obținerea formulei $q \vee s$ (1.3. și 2.3.), care contrazice formula 5 a demonstrației. Pașii 3, 4 și 5 concentrează două aplicări succesive ale regulii eliminării conjuncției.

Th31. $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Th32. $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

Th33. $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \equiv [(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)]$

Th34. $[(p \wedge q) \vee (r \wedge s)] \equiv [(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)]$

Th33 și *Th34* pot fi generalizate ca aplicându-se la disjuncții și conjuncții cu multe elemente.

2.4.2. Corectitudinea și completitudinea sistemului deducției naturale

1. Corectitudinea

Teorema corectitudinii. Dacă $\vdash \alpha$***, atunci*** $\models \alpha$.

Altfel spus: *orice teoremă a sistemului deducției naturale este o formulă validă.* Demonstrația acestei teoreme o facem prin inducție în raport cu ordinul (demonstrabil al) teoremei. Pentru $n \geq 1$, orice teoremă a calculului propozițional are un anumit ordin. Sensul conceptelor „ordinul 1", „ordinul 2",..., „ordinul *n*" este dat de următoarea definiție.

Definiție. A. O formulă α *este o teoremă de ordinul 1 dacă există o demonstrație (directă sau indirectă) din premise a formulei* α*, în care utilizăm doar cele 9 reguli fundamentale pentru adăugarea de noi termeni demonstrației (și deci nu utilizăm niciodată teoreme deja demonstrate).*

B. O formulă α *este o teoremă de ordinul n dacă există o demonstrație din premise a formulei* α*, în care utilizăm teoreme de ordinul cel mult* $n-1$ *și dacă* α *nu este o teoremă de un ordin mai mic decât n.*

Din sensul conceptului „teoremă" și din definiția de mai sus rezultă că o formulă α este o teoremă ddacă există un număr natural *n* astfel că α este o teoremă de ordinul *n*.

În cadrul aplicării procedeului inductiv vom proceda indirect, presupunând că α este o teoremă dar nu este o formulă validă. Să detaliem demonstrația.

$n=1$. Vom arăta că toate teoremele de *ordinul 1* sunt formule valide. Presupunem așadar că α: $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset ... \supset (\alpha_n \supset \beta)...)$, $n \geq 0$, este o teoremă de ordinul 1, dar nu este o formulă validă. Cum α este o teoremă de ordinul 1, există o demonstrație *indirectă* a ei în care sunt utilizate, în adăugarea de noi termeni demonstrației, doar cele 9 reguli fundamentale. Adică, în acord cu conceptul demonstrației indirecte, din formulele $\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta$ se obțin două formule contradictorii, γ și $\neg\gamma$. Însă, cum α nu este validă (prin presupoziție), rezultă că există cel puțin o interpretare a variabilelor propoziționale din α, astfel încât α ia valoarea logică *fals*. Iar acest lucru este posibil doar atunci când $\alpha_1,...,\alpha_n$ sunt simultan adevărate, iar β este falsă. Însă, dacă β este falsă, atunci $\neg\beta$ este adevărată. Astfel, în această interpretare toate formulele $\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta$ sunt simultan adevărate. Însă toate cele 9 reguli fundamentale de adăugare de noi termeni demonstrației sunt *reguli valide*, adică dacă premisele lor sunt simultan adevărate, într-o anumită interpretare a variabilelor propoziționale care apar în ele, atunci și concluzia este *în mod necesar* adevărată pentru această interpretare. Întrucât toate premisele $\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta$ sunt adevărate în interpretarea considerată, iar cele 9 reguli de adăugare de noi termeni sunt valide, rezultă că *toate* formulele demonstrației sunt adevărate. Însă demonstrația indirectă a lui α înseamnă existența formulelor contradictorii, γ și $\neg\gamma$, care sunt deci simultan adevărate, fapt exclus prin definiția semantică a negației. Deci: dacă α este o teoremă de ordinul 1, atunci α este o formulă validă.

$n > 1$: Presupunem că toate teoremele de ordin *mai mic* decât n sunt formule valide.

Aici argumentăm ca mai sus, în pasul inițial. Presupunem că α este o teoremă de ordinul n și nu este validă. Există așadar o demonstrație *indirectă* a lui α care generează, din formulele $\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta$ și din teoremele de un ordin mai mic decât n, două formule contradictorii, γ și $\neg\gamma$. Cum α nu este validă, rezultă că există cel puțin o interpretare a variabilelor ei propoziționale pentru care α este falsă, fapt posibil doar dacă $\alpha_1,...,\alpha_n$ sunt adevărate iar β este falsă. Dar dacă β este falsă, atunci $\neg\beta$ este adevărată. În această interpretare deci toate formulele $\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta$ sunt adevărate. Cum și toate teoremele de ordin inferior a lui n sunt adevărate (mai mult chiar: întotdeauna adevărate!), iar regulile fundamentale de adăugare de noi termeni demonstrației sunt reguli valide, rezultă că toate formulele obținute prin aplicarea lor (i.e. termenii demonstrației) sunt adevărate. Însă demonstrația indirectă a lui α conține cele două formule contradictorii, γ și $\neg\gamma$, care nu pot fi simultan adevărate. Deci dacă α este o teoremă a sistemului deducției naturale, atunci α este o formulă validă.

Din teorema corectitudinii rezultă *consistența* sistemului deducției naturale. Respectiv, în acest sistem nu poate fi demonstrată atât o formulă cât și negația ei. Căci dacă sistemul ar demonstra atât α cât și $\neg\alpha$, rezultă că ambele sunt formule *valide*, ceea ce contrazice definiția semantică a negației.

2. Completitudinea

Teorema completitudinii. Dacă $\models \alpha$, ***atunci*** $\vdash \alpha$.

Altfel exprimat: *orice formulă validă a $\mathcal{L}_p$ este o teoremă a sistemului deducției naturale.*

Demonstrația de aici apelează la conceptul de *formă normală conjunctivă* din teoria funcțiilor de adevăr[49].

[49] Comp. 2.1.4.4.

Prin aplicarea câtorva teoreme şi prin aplicarea Rînloc$_{\equiv}$, orice formulă a $\mathcal{L}_p$ poate fi adusă la forma normală conjunctivă. Prin aplicarea *Th11* eliminăm negaţiile duble. Prin *Th14* şi *Th13* transformăm orice formulă în una echivalentă dar care conţine doar operatorii logici $\wedge$, $\vee$ şi $\neg$. Prin *Th26* şi *Th27* transformăm formulele astfel obţinute în formule în care negaţia nu neagă operatorii binari $\wedge$ şi $\vee$. Prin aplicarea *Th11* vom obţine o formulă construită doar din variabile propoziţionale, negate o singură dată sau nenegate, şi din operatorul $\wedge$ sau $\vee$. Orice astfel de formulă poate fi transformată, echivalent, în forma ei normală conjunctivă, prin aplicarea *Th31, Th32, Th33, Th34* (exerciţiu).

Aşadar, în sistemul deducţiei naturale următoarea echivalenţă este o teoremă: $\alpha \equiv \alpha_c$, unde α_c este forma normală conjunctivă a formulei α.

α_c are însă forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$, în care α_i $(1 \le i \le n)$ este o disjuncţie de variabile propoziţionale nenegate sau negate o singură dată. Un criteriu suficient pentru *validitatea* formulei α_c este ca fiecare α_i să conţină cel puţin *o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei.* Disjuncţia are aşadar forma:

$\alpha_i : v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_i \vee \neg v_i \vee ... \vee v_m$ (unde $v_1 ... v_m$ sunt variabile propoziţionale negate sau nenegate).

O astfel de disjuncţie este o *formulă validă.*

Argument. Presupunem că α_i este nevalidă. Există aşadar o interpretare a variabilelor propoziţionale din α_i astfel încât toţi termenii iau valoarea logică fals. În acest caz atât v_i cât şi $\neg v_i$ sunt simultan false, contrar definiţiei semantice a negaţiei.

Altfel argumentat. Dacă α_i nu conţine atât o variabilă propoziţională cât şi negaţia ei, atunci există o interpretare în care toţi termenii disjuncţiei sunt falşi: dacă o variabilă apare nenegată îi dăm valoarea logică fals, iar dacă apare negată, atunci îi dăm valoarea logică adevărat. Şi astfel α_i este falsă. Deci prezenţa unei variabile nenegate şi negate în α_i este *necesară.*

Apoi, orice α_i este demonstrabil în sistemul deducţiei naturale.

Argument. Pe baza Th27, α_i se poate obţine din forma echivalentă

$\neg(\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge ... \wedge \neg v_i \wedge \neg\neg v_i \wedge ... \wedge \neg v_m)$,

care este o formulă demonstrabilă (demonstraţie indirectă):

1. $\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge ... \wedge \neg v_i \wedge \neg\neg v_i \wedge ... \wedge \neg v_m$; $\neg\beta$
2. $\neg v_i$; 1, $E_\wedge$
3. $\neg\neg v_i$; 1, $E_\wedge$

*

Iar dacă fiecare α_i este demonstrabil, atunci şi α_c este demonstrabilă (prin $I_\wedge$).

Dacă $\vdash \alpha \equiv \alpha_c$, atunci $\models \alpha \equiv \alpha_c$ (prin Th. corectitudinii). Iar dacă $\alpha \equiv \alpha_c$ este o formulă validă, atunci α şi α_c sunt semantic echivalente (prin definiţia semantică a echivalenţei). Şi deci dacă α este o formulă validă, atunci şi α_c este o formulă validă.

Teorema completitudinii. Dacă $\models \alpha$, *atunci* $\vdash \alpha$.

Argument. Presupunem $\models \alpha$. Cum $\vdash \alpha \equiv \alpha_c$ rezultă că α_c este validă. Însă, am văzut mai sus, α_c este demonstrabilă în sistemul deducţiei naturale. De unde, din $\vdash \alpha \equiv \alpha_c$ şi $\vdash \alpha_c$, deducem $\vdash \alpha$ (prin *Th. 20b*).

2.5. Calculul secvenților în $\mathcal{L}_p$

2.5.1. Preliminar

Un mijloc elegant de demonstrare a validității unei formule α este o încercare de căutare a unei interpretări care falsifică această formulă. Pentru aceasta vom opera cu perechi de șiruri finite de formule numite *secvenți*[50].

Un secvent este o expresie de forma

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_n \to \beta_1,\ldots,\beta_m,$$

unde $\alpha_1,\ldots,\beta_m$ sunt formule arbitrare. Formulele $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ se numesc *antecedentul* secventului, iar $\beta_1,\ldots,\beta_m$ se numesc *succedentul* secventului. Simbolul „$\to$" nu este un simbol logic (i.e. nu aparține limbajului obiect al logicii), ci unul metalogic, similar simbolurilor auxiliare ale unui calcul.

Adesea, în dezvoltările formale, un secvent va fi redat simbolic prin expresia $\Gamma \to \Delta$, unde Γ este șirul de formule $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, iar Δ $\beta_1,\ldots,\beta_m$. Dacă Γ este o mulțime vidă, atunci secventul corespunzător este $\to \Delta$. Dacă Δ este vidă, atunci secventul devine $\Gamma \to$. Dacă atât Γ cât și Δ sunt vide, atunci secventul este $\to$

Sensul *intuitiv* al unui secvent $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \to \beta_1,\ldots,\beta_m$ este formula

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)$$

Dacă antecedentul este vid atunci formula de mai sus devine $1 \supset (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)$, echivalent $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$. Iar dacă succedentul este vid, atunci vom avea $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset 0$, echivalent $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$. În fine, dacă antecedentul și succedentul sunt vizi, atunci obținem secventul nesatisfiabil $\to$.

Orice formulă poate fi redată printr-un secvent echivalent: secventul al cărui antecedent este vid și al cărui succedent este formula dată.

Ceea ce numim astăzi, în tradiția Gentzen, „calculul secvenților" este mai curând o diversitate de sisteme, a căror construcție are la bază ideile lui Gentzen. Vom prezenta, mai jos, două astfel de sisteme: G și LK*.

2.5.2. Sistemul G

Operatorii logici ai acestui sistem sunt: $\wedge, \vee, \supset, \neg$. Fiecărui operator îi corespund două *reguli de inferență* (*operaționale*), după cum formula care-l conține se află în antecedentul sau în succedentul secventului, adică în stânga (s) simbolului $\to$ sau în dreapta (d) lui.

$$(\wedge_s)\ \frac{\Gamma, \alpha, \beta \to \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \to \Delta} \qquad (\wedge_d)\ \frac{\Gamma \to \alpha, \Delta \quad \Gamma \to \beta, \Delta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta, \Delta}$$

$$(\vee_s)\ \frac{\Gamma, \alpha \to \Delta \quad \Gamma, \beta \to \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \to \Delta} \qquad (\vee_d)\ \frac{\Gamma \to \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \to \alpha \vee \beta, \Delta}$$

[50] Cf. G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, I, II.

$$(\supset_s)\ \frac{\Gamma \rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma, \beta \rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \supset \beta \rightarrow \Delta} \qquad (\supset_d)\ \frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta, \Delta}$$

$$(\neg_s)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma, \neg\alpha \rightarrow \Delta} \qquad (\neg_d)\ \frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \neg\alpha, \Delta}$$

Cum se poate uşor constata, fiecare regulă de inferenţă are unul sau doi secvenţi, care constituie premisa sau premisele regulii, şi un secvent-concluzie. Formula asupra căreia se aplică regula se numeşte formulă *principală*, formulele care rezultă şi sunt introduse în premise se numesc formule *laterale*, iar celelalte formule, transcrise fără modificări, se numesc formule *exterioare*.

Orice regulă de inferenţă poate fi reprezentată ca un arbore, cu două puncte (dacă are o singură premisă) sau cu trei puncte (dacă are două premise). Prin aplicarea repetată a acestor reguli se obţine un arbore, cu formula iniţială la bază (i.e. în origine).

2.5.3. Concepte

Definiţia 1. Un secvent $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow \beta_1,...,\beta_m$ *este falsificabil (falsifiabil) dacă există o interpretare Int a variabilelor propoziţionale din* $\alpha_1,...,\beta_m$ *astfel încât* $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee ... \vee \beta_m) = 0$ *în Int; echivalent* $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \wedge \neg(\beta_1 \vee ... \vee \beta_m) = 1$.

Definiţia 2. Un secvent $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow \beta_1,...,\beta_m$ *este satisfiabil dacă există o interpretare Int a variabilelor propoziţionale din* $\alpha_1,...,\beta_m$ *astfel încât* $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee ... \vee \beta_m) = 1$.

Definiţia 3. Un secvent $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow \beta_1,...,\beta_m$ *este valid dacă este satisfiabil în orice interpretare.*

Din cele spuse mai sus cu privire la cazurile în care Γ şi Δ pot fi vide, putem formula cu uşurinţă condiţiile în care, în aceste cazuri, un secvent este falsificabil / satisfiabil / valid. Dacă $n = 0$, atunci secventul $\rightarrow \beta_1 \vee ... \vee \beta_m$ este falsificabil ddacă formula $\beta_1 \vee ... \vee \beta_m$ este falsificabilă; echivalent, formula $\neg(\beta_1 \vee ... \vee \beta_m)$ este satisfiabilă. În caz contrar este un secvent valid. Dacă $m = 0$, atunci secventul $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow$ este falsificabil ddacă $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ este satisfiabilă etc.

Definiţia 4. O axiomă a calculului secvenţilor este orice secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$, *astfel încât* Γ *şi* Δ *au o formulă comună.*

Definiţia 5. Un arbore deductiv este o succesiune de secvenţi, începând cu secventul iniţial (pus în origine), astfel încât fiecare punct (nod) se obţine nemijlocit din predecesorul său printr-o singură aplicare a unei reguli de deducţie.

Definiţia 6. Un arbore demonstrativ este un arbore deductiv în care fiecare punct final este o axiomă.

Definiţia 7. Un arbore contraexemplu este un arbore deductiv în care cel puţin un punct final este un secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$, *unde* Γ *şi* Δ *conţin variabile propoziţionale distincte (i.e.* $\Gamma \rightarrow \Delta$ *nu este axiomă).*

Secventul din originea (rădăcina) arborelui deductiv / demonstrativ este *concluzia* arborelui respectiv. *Un secvent este demonstrabil ddacă există un arbore demonstrativ a cărui concluzie este secventul respectiv.*

Să vedem în cele ce urmează în ce fel conceptele mai sus prezentate sunt operaţionale în calculul secvenţilor.

2.5.4. Leme şi teoreme

Lema 1. Orice axiomă este o formulă validă a sistemului Gentzen G.

Demonstraţie. Mulţimile Γ, Δ care constituie secventul axiomă au, prin definiţie, o formulă *comună*. A falsifica un astfel de secvent presupune existenţa unei interpretări în care aceeaşi formulă trebuie să fie adevărată şi falsă. Imposibil!

Lema 2. Pentru oricare din cele 8 reguli ale sistemului G are loc: o interpretare Int falsifică secventul din concluzia regulii ddacă Int falsifică cel puţin un secvent premisă; echivalent: Int satisface concluzia ddacă Int satisface toate premisele regulii.

Demonstraţie. Demonstraţia constă în verificarea condiţiilor de adevăr ale definiţiei semantice a operatorului formulei principale (pentru fiecare dintre cele 8 reguli). Vom lua ca exemplu regula ($\vee_s$).

$$(\vee_s)\quad \frac{\Gamma,\alpha\rightarrow\Delta\qquad\Gamma,\beta\rightarrow\Delta}{\Gamma,\alpha\vee\beta\rightarrow\Delta}$$

O interpretare *Int* falsifică secventul din concluzie ddacă *Int* satisface toate formulele din antecedent, adică toate formulele din Γ (i.e. satisface Γ) şi formula $\alpha\vee\beta$, şi *Int* falsifică toate formulele din Δ (i.e. nu satisface Δ). Însă *Int* satisface $\alpha\vee\beta$. Din definiţia semantică a operatorului „$\vee$", *Int* satisface $\alpha\vee\beta$ dacă *Int* satisface α *sau* dacă *Int* satisface β. Şi deci *Int* falsifică concluzia ddacă:

a) *Int* satisface Γ şi α şi falsifică Δ *sau*

b) *Int* satisface Γ şi β şi falsifică Δ.

Însă cele două alternative sunt reprezentate, în regula $\vee_s$, prin secvenţii din premise.

La fel putem argumenta echivalenţa menţionată în lemă (exerciţiu).

Încercarea de a falsifica secventul din concluzie, aplicată repetat în raport cu regulile sistemului G, permite, de fiecare dată, să construim demonstraţia unei formule. Să luăm un exemplu.

Demonstrarea validităţii formulei α în sistemul G demarează cu formula α în origine. Spre deosebire de metoda tablourilor analitice, în acest caz arborele se construieşte „de jos în sus". Formula de demonstrat apare astfel drept concluzie a aplicării repetate a regulilor de inferenţă, aplicate în vederea găsirii vreunui caz în care formula este falsă.

Fie $\alpha:(p\supset q)\supset(\neg q\supset\neg p)$. Demonstrarea validităţii formulei α este un arbore deductiv de următorul gen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(5a)\ \neg q, p\rightarrow p}{(4a)\ \neg q\rightarrow\neg p, p}}{(3a)\ \rightarrow\neg q\supset\neg p, p}\qquad\dfrac{\dfrac{q\rightarrow q,\neg p\ (5b)}{q,\neg q\rightarrow\neg p\ (4b)}}{q\rightarrow\neg q\supset\neg p\ (3b)}}{\dfrac{p\supset q\rightarrow\neg q\supset\neg p\quad(2)}{\rightarrow(p\supset q)\supset(\neg q\supset\neg p)\quad(1)}}$$

Cum citim această dezvoltare?

Formula α este formula aflată la baza arborelui (i.e. în origine). Ea este un secvent de forma $\rightarrow\Delta$, echivalent cu Δ. Cum operatorul principal al formulei (principale) este $\supset$, vom

aplica regula de inferență $\supset_d$ în încercarea de a falsifica această formulă. Vom obține secventul imediat superior, (2), i.e. premisa acestei reguli. Adică, formula implicativă α este falsă dacă antecedentul este adevărat iar consecventul fals, într-o interpretare oarecare. Însă adevărul antecedentului înseamnă *alternativ*: falsitatea lui *p* *sau* adevărul lui *q*, motiv pentru care din (2) obținem doi secvenți distincți, (3a) și (3b), prin aplicarea ($\supset_s$). Similar, prin aplicarea $\supset_d$ vom obține secvenții (4a) și (4b), iar prin aplicarea ($\neg_d$) și ($\neg_s$) obținem (5a) și (5b).

Însă secvenții din punctele finale (5a) și (5b) sunt axiome și deci nu pot fi falsificați (prin *Lema 1*).

Dacă toate ramurile arborelui deductiv se termină cu formule de genul 5a (sau 5b) (i.e. este un arbore deductiv închis), acest lucru este echivalent cu *demonstrarea* secventului aflat în origine, respectiv, este echivalent cu o demonstrație de validitate a formulei α. Corespondentul demonstrării secventului aflat în origine este echivalentul unui tablou analitic închis pentru *negația* formulei din origine, prin metoda tablourilor analitice.

Ce obținem însă dacă formula aflată în origine este nevalidă? Construind un arbore pentru formula $\beta:(p\supset q)\supset(\neg q\supset p)$ vom obține, în locul secventului 4a, secventul $\neg q\to p,p$, secvent falsificabil pentru asignările $p=0$, $q=0$ (exercițiu). În acest caz, în care arborele obținut are cel puțin un punct final care nu este axiomă, am obținut un *contraexemplu.* Similar metodei tablourilor analitice, contraexemplul reprezintă categoriile de asignări pentru care formula dată este falsificabilă.

Așadar, construind un arbore pentru un secvent $\Gamma\to\Delta$ vom obține una din următoarele două situații.

1. O demonstrație de validitate a secventului $\Gamma\to\Delta$, caz în care toate punctele finale sunt axiome.

2. Un arbore în care secvenții finali *nonaxiome* permit construirea evaluărilor în care secventul $\Gamma\to\Delta$ este falsificabil.

Aceste două situații corespund alternativei uzuale din $\mathcal{L}_p$: *o formulă* α *este ori validă ori falsificabilă.*

Exerciții

Demonstrați în G validitatea următoarelor formule:

1. $(p\supset q)\supset[(q\supset r)\supset(p\supset r)]$
2. $[(p\supset q)\wedge(q\supset r)]\supset(p\supset r)$

Teorema de corectitudine. Dacă un secvent $\Gamma\to\Delta$ *este demonstrabil în G (i.e. G-demonstrabil), atunci este un secvent valid.*

Demonstrație (inducție pe arbori demonstrativi).

1. Orice arbore demonstrativ cu un singur punct (i.e. o axiomă) este un secvent valid (prin *Lema 1*).

2a. Presupunem că originea arborelui demonstrativ $\mathcal{T}$ are un singur succesor. În acest caz $\mathcal{T}$ se obține dintr-un arbore demonstrativ $\mathcal{T}_1$ prin aplicarea unei reguli cu o singură premisă (premisa regulii este concluzia arborelui $\mathcal{T}_1$):

$$\mathcal{T}\quad\frac{\text{Premisă}\qquad\mathcal{T}_1}{\text{Concluzie}}$$

Prin ipoteza inducţiei, teorema are loc pentru $\mathcal{T}_1$. Şi deci originea lui $\mathcal{T}_1$ (i.e. Premisă) este o formulă validă. Însă, prin *Lema 2*, de mai sus, are loc: *premisa este validă ddacă concluzia este validă*. Şi deci teorema de corectitudine are loc.

2b. Presupunem că originea arborelui demonstrativ $\mathcal{T}$ are doi succesori. În acest caz $\mathcal{T}$ se obţine din doi arbori demonstrativi, $\mathcal{T}_1'$ şi $\mathcal{T}_2$, prin aplicarea unei reguli cu două premise. Raţionăm ca mai sus (exerciţiu).

Completitudinea sistemului G rezultă din următoarele două leme.

Lema 3. O interpretare Int falsifică secventul $\Gamma \to \Delta$ *din originea unui arbore deductiv ddacă Int falsifică cel puţin un secvent final.*

Demonstraţie (inducţie pe arbori deductivi)

1. Arborele deductiv are un singur punct (lema are loc, trivial).

2. Presupunem că arborele deductiv $\mathcal{T}$ are mai mult decât un punct. Similar demonstraţiei teoremei de corectitudine, avem cele două cazuri. Să luăm doar cazul în care originea lui $\mathcal{T}$ are doi succesori, celălalt caz rezultând din acesta. $\mathcal{T}$ se obţine aşadar din doi arbori deductivi, $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$, ale căror origini sunt cele două premise ale regulii prin care obţinem $\mathcal{T}$ din $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$:

$$\begin{array}{cc} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2' \\ & \\ \text{Premisa 1} & \text{Premisa 2} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\text{Concluzia}} \end{array}$$

Presupunem (prin ipoteza inducţiei) că *Lema 3* are loc pentru cei doi arbori deductivi, $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$, adică: o interpretare *Int* falsifică *Premisa 1* ddacă *Int* falsifică un punct final al lui $\mathcal{T}_1$ şi *Int* falsifică *Premisa 2* ddacă *Int* falsifică un punct final al lui $\mathcal{T}_2$. Însă, prin *Lema 2*, *Int* falsifică *Concluzia* ddacă *Int* falsifică *Premisa 1* sau *Premisa 2*. Şi deci: *Int* falsifică *Concluzia* ddacă *Int* falsifică vreun punct final al lui $\mathcal{T}_1$ sau al lui $\mathcal{T}_2$, adică *Int* falsifică vreun punct final al lui $\mathcal{T}$.

Lema 4. Secventul $\Gamma \to \Delta$ *(aflat în originea unui arbore deductiv) este valid ddacă toate punctele finale sunt secvenţi valizi.*

Lema rezultă din precedenta. Demonstrăm mai jos *Lema 4* în varianta echivalentă ei: *secventul* $\Gamma \to \Delta$ *(aflat în originea unui arbore deductiv* $\mathcal{T}$*) este falsificabil ddacă arborele deductiv* $\mathcal{T}$ *nu este un arbore demonstrativ (i.e. există un secvent final falsificabil).*

Demonstraţie.

a) Dacă $\Gamma \to \Delta$ este falsificabil, atunci arborele deductiv $\mathcal{T}$ nu este un arbore demonstrativ.

Presupunem că $\Gamma \to \Delta$ este falsificabil. Există deci o interpretare *Int* care-l falsifică. Şi deci *Int* falsifică un secvent final al arborelui deductiv $\mathcal{T}$ (prin *Lema 3*). Un astfel de secvent va avea deci forma $p_1,\dots,p_k \to q_1,\dots,q_l$, unde p_i şi q_j sunt variabile propoziţionale şi are loc $\{p_1,\dots,p_k\} \cap \{q_1,\dots,q_l\} = \emptyset$ (în caz contrar secventul ar fi axiomă). Şi deci dacă $\Gamma \to \Delta$ este falsificabil, atunci arborele deductiv nu este arbore demonstrativ.

b) Dacă $\mathcal{T}$ nu este un arbore demonstrativ, atunci secventul $\Gamma \to \Delta$ este falsificabil. (Argumentăm similar; exerciţiu).

Corolar (Completitudinea sistemului G). Dacă $\Gamma \to \Delta$ *este un secvent valid, atunci el este demonstrabil în G.*

Corolarul rezultă prin *contrapoziţie* din b) de mai sus.

Remarcă 1. Dacă $\Gamma \to \Delta$ este un secvent *valid* infinit, atunci demonstrabilitatea acestui secvent înseamnă existenţa unor submulţimi *finite* de formule $\{\gamma_1,...,\gamma_n\} \subset \Gamma$ şi $\{\delta_1,...,\delta_m\} \subset \Delta$ astfel încât secventul $\gamma_1,...,\gamma_n \to \delta_1,...,\delta_m$ este demonstrabil. (Orice arbore demonstrativ este un tablou *închis* pentru secventul dat, şi deci unul finit).

Remarcă 2. Atât demonstraţia cu ajutorul tablourilor analitice cât şi demonstraţia în calculul secvenţilor se bazează, aşa cum am constatat mai sus, pe încercarea de a găsi contraexemple ale formulei date sau ale secventului dat. E de aşteptat, aşadar, ca între cele două tehnici să existe corespondenţe structurale. Să vedem, pe scurt, acest lucru.

2.5.5. Tablourile analitice şi calculul secvenţial

Definiţie. Prin tablou analitic pentru secventul $\alpha_1,...,\alpha_n \to \beta_1,...,\beta_m$ *se înţelege un tablou analitic pentru mulţimea* $\{T\alpha_1,...,T\alpha_n, F\beta_1,...,F\beta_m\}$, *unde „T" înseamnă „adevărat" iar „F" înseamnă „fals".*

Fireşte, secventul $\alpha_1,...,\alpha_n \to \beta_1,...,\beta_m$ este valid ddacă mulţimea mai sus specificată este nesatisfiabilă. Şi deci, în acord cu metoda tablourilor analitice, un tablou *închis* pentru mulţimea $\{T\alpha_1,...,T\alpha_n, F\beta_1,..., F\beta_m\}$ echivalează cu o *demonstraţie* prin această metodă a secventului dat.

Explicaţia acestui fapt este simplă: dacă $\Gamma \to \Delta$ este secventul $\alpha_1,...,\alpha_n \to \beta_1,...,\beta_m$, atunci $\Gamma \to \Delta$ este valid ddacă formula $\mathcal{L}_p$ $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee ... \vee \beta_m)$ este validă, respectiv dacă formula $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta_1 \wedge ... \wedge \neg\beta_m$ este nesatisfiabilă. Echivalent, mulţimea $\{T\alpha_1,...,T\alpha_n, F\beta_1,..., F\beta_m\}$ este nesatisfiabilă.

Fie, în cele ce urmează, *Seq* mulţimea de mai sus de formule *evaluate*: $\{T\alpha_1,...,T\alpha_n, F\beta_1,..., F\beta_m\}$. Avem, aşadar:

$\Gamma \to \Delta$ *este valid* ***ddacă*** *Seq este nesatisfiabilă.*

Cu notaţia de mai sus, o axiomă a sistemului G este orice mulţime *Seq* $T\alpha$, $F\alpha$.

Similar, vom avea două reguli de deducţie, corespunzătoare celor două categorii de formule: $\boldsymbol{\alpha}$ şi $\boldsymbol{\beta}$. Cele 8 reguli de deducţie ale lui G sunt specificări ale următoarelor două:

$$\textbf{REG } \alpha \quad \frac{Seq,\ \alpha_1, \alpha_2}{Seq,\ \alpha} \quad ; \quad \textbf{REG } \beta \quad \frac{Seq,\ \beta_1 \quad Seq,\ \beta_2}{Seq,\ \beta}$$

Explicaţie. Fie, de exemplu, $\boldsymbol{\alpha} = T(\alpha \wedge \beta)$. Formula principală este deci o conjuncţie adevărată. Expresia aferentă ***REG*** $\boldsymbol{\alpha}$ devine: „$T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $T\alpha$, $T\beta$, $F\beta_1,...,F\beta_m$ generează $T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $T(\alpha \wedge \beta)$, $F\beta_1,...,F\beta_m$", care nu este altceva decât regula de inferenţă $\wedge_s$:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \to \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \to \Delta}$$

Alt exemplu. Fie acum $\boldsymbol{\alpha} = F(\alpha \vee \beta)$. Conform ***REG*** $\boldsymbol{\alpha}$, vom avea: „$T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $F\beta_1,...,F\beta_m$, $F\alpha$, $F\beta$ generează $T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $F\beta_1,...,F\beta_m$, $F(\alpha \vee \beta)$", şi care este regula $\vee_s$:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}$$

Fie, în fine, $\beta = T(\alpha \supset \beta)$. În acord cu ***REG*** $\boldsymbol{\beta}$ vom avea: „$T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $T\beta$, $F\beta_1,...,F\beta_m$ sau $T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $F\beta_1,...,F\beta_m$, $F\alpha$ generează $T\alpha_1,...,T\alpha_n$, $T(\alpha \supset \beta)$, $F\beta_1,..., F\beta_m$“, care este regula $\supset_s$.

Toate celelalte cazuri se consideră similar (exercițiu).

Corespondența structurală dintre tablouri şi arborii deductivi permite acum o demonstrație simplă a teoremei completitudinii.

Teorema de completitudine. Orice secvent valid este demonstrabil.

Demonstrație. Presupunem că secventul $\alpha_1,...,\alpha_n \to \beta_1,...,\beta_m$ este valid. Construim un tablou pentru mulțimea $\{T\alpha_1,...,T\alpha_n, F\beta_1,..., F\beta_m\}$. Ceea ce obținem este un tablou închis (dată fiind validitatea secventului de mai sus). Acest lucru este echivalent cu o demonstrație pentru secventul considerat.

Dacă vrem să transformăm tabloul astfel construit într-un arbore deductiv, atunci vom înlocui fiecare punct al tabloului cu secventul corespunzător, cu deosebirea că dezvoltarea arborelui deductiv o facem „de jos în sus”.

Exemplu. Fie următoarea formulă a $\mathcal{L}_p$: $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$. Tabloul acestei formule arată astfel:

1. $\mathrm{F}(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
2. $\mathrm{T}(p \supset q)$, $\mathrm{F}[(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
3. $\mathrm{T}(p \supset q)$, $\mathrm{T}(q \supset r)$, $\mathrm{F}(p \supset r)$
4. $\mathrm{T}(p \supset q)$, $\mathrm{T}(q \supset r)$, $\mathrm{T}p$, $\mathrm{F}r$

$\mathrm{T}(q \supset r)$, $\mathrm{T}p$, $\mathrm{F}r$, $\mathrm{F}p$ | $\mathrm{T}(q \supset r)$, $\mathrm{T}p$, $\mathrm{T}q$, $\mathrm{F}r$

$\mathrm{T}p$, $\mathrm{F}r$, $\mathrm{F}p$, $\mathrm{F}q$ | $\mathrm{T}p$, $\mathrm{T}r$, $\mathrm{F}r$, $\mathrm{F}p$ | $\mathrm{T}p$, $\mathrm{T}q$, $\mathrm{F}r$, $\mathrm{F}q$ | $\mathrm{T}p$, $\mathrm{T}q$, $\mathrm{T}r$, $\mathrm{F}r$

Arborele deductiv corespunzător este

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to r, p, q \qquad p, r \to r, p}{q \supset r, p \to r, p} \qquad \dfrac{p, q \to r, q \qquad p, q, r \to r}{q \supset r, p, q \to r}}{p \supset q,\ q \supset r,\ p \to r}}{p \supset q,\ q \supset r \to p \supset r}}{p \supset q \to (q \supset r) \supset (p \supset r)}}{\to (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]}$$

Corespondenţa structurală dintre cele două construcţii este uşor sesizabilă.
Aşadar, o formulă α este o *teoremă* în G dacă secventul $\to\alpha$ are o demonstraţie. Prin teorema de corectitudine a sistemului G, α este deci şi o formulă validă a $\mathcal{L}_p$.

Exerciţii. Se dau următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$:

$$\alpha_1 : (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$$
$$\alpha_2 : [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$
$$\alpha_3 : [(p \supset r) \wedge (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset r]$$
$$\alpha_4 : [(p \wedge q) \supset r] \supset [(p \supset r) \supset (q \supset r)]$$
$$\alpha_5 : (p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset (p \vee q) \supset r]$$

Construiţi, în fiecare caz în parte, tabloul formulelor şi arborii deductivi corespunzători. Interpretaţi rezultatele.

2.5.6. Lema interpolării (Craig)

Există mai multe demonstraţii ale acestei leme în $\mathcal{L}_p$. În versiunea ei originală (Craig) demonstraţia este una constructivă. Fitting oferă o demonstraţie bazată pe ideea de mulţime Craig-consistentă şi pe teorema satisfiabilităţii[51]. R. Smullyan dă o demonstraţie constructivă în directă conexiune cu sistemele Gentzen. În cele ce urmează ne vom referi la acest din urmă caz.

Definiţie. O formulă ε se numeşte interpolant pentru implicaţia $\alpha \supset \beta$ dacă orice simbol propoziţional din ε apare atât în α cât şi în β şi dacă $\alpha \supset \varepsilon$ şi $\varepsilon \supset \beta$ sunt formule valide.

Remarcă. În acord cu semnificaţia „$\supset$”, o formulă poate fi validă şi în oricare din situaţiile:
1. α formulă nesatisfiabilă.
2. β formulă validă.

În primul caz interpolantul formulei $\alpha \supset \beta$ este 0 (falsul), în cel de-al doilea este 1 (adevăratul). De ce?

Lema interpolării (Craig). Dacă $\alpha \supset \beta$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$, atunci ea are un interpolant.

Similar interpolantului unei implicaţii, o formulă ε este interpolant pentru secventul $\Gamma \to \Delta$ dacă orice simbol propoziţional din ε apare în cel puţin o formulă din Γ şi în cel puţin o formulă din Δ şi dacă ambii secvenţi $\Gamma \to \varepsilon$ şi $\varepsilon \to \Delta$ sunt valizi.

Dat fiind sensul intuitiv al unui secvent $\Gamma \to \Delta$, adică $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee ... \vee \beta_m)$, unde $\alpha_1,...,\alpha_n$ sunt formulele din Γ iar $\beta_1,...,\beta_m$ cele din Δ, existenţa unui interpolant pentru secventul valid $\Gamma \to \Delta$ este echivalentă cu existenţa unui interpolant pentru formula validă $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset (\beta_1 \vee ... \vee \beta_m)$. Dacă operăm cu secvenţi, mai curând decât cu formule ale $\mathcal{L}_p$, atunci *Lema lui Craig* are următoarea formulare echivalentă: *dacă $\Gamma \to \Delta$ este un secvent valid, atunci el are un interpolant.*

În demonstraţia pe care Smullyan o face acestei leme utilizează ceea ce autorul numeşte „sisteme Gentzen simetrice”. Acestea sunt sisteme de genul sistemului *G* mai sus prezentat cu următoarea restricţie: în nici una din regulile de deducţie vreo formulă nu poate fi transferată dintr-o parte în alta a simbolului „$\to$” (aşa cum se întâmplă în sistemul *G*).

[51] M. Fitting, *First Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer-Verlag, New York, 1990, 56.

Sistemul S astfel obținut va avea ca axiome orice secvenți de genul $\Gamma,\alpha \to \Delta,\alpha$; $\Gamma,\alpha,\neg\alpha \to \Delta$; $\Gamma \to \Delta,\alpha,\neg\alpha$. Iar în notația uniformă regulile devin, corespunzător:

Reg A₁ $\dfrac{\Gamma,\alpha_1,\alpha_2 \to \Delta}{\Gamma,\alpha \to \Delta}$ ***Reg A₂*** $\dfrac{\Gamma \to \Delta,\beta_1,\beta_2}{\Gamma \to \Delta,\beta}$

Reg B₁ $\dfrac{\Gamma,\beta_1 \to \Delta \quad \Gamma,\beta_2 \to \Delta}{\Gamma,\beta \to \Delta}$ ***Reg B₂*** $\dfrac{\Gamma \to \Delta,\alpha_1 \quad \Gamma \to \Delta,\alpha_2}{\Gamma \to \Delta,\alpha}$

Demonstrația Lemei lui Craig se rezumă acum la următoarele:

1. Se arată că orice axiomă are un interpolant.

2. Pentru fiecare regulă de deducție se arată că dacă fiecare premisă are un interpolant, atunci concluzia are un interpolant.

1. $\Gamma,\alpha \to \Delta,\alpha$ are, evident, ca interpolant formula α; $\Gamma,\alpha,\neg\alpha \to \Delta$ 0 iar $\Gamma \to \Delta,\alpha,\neg\alpha$ 1.

2. ***A₁*** Dacă ε este interpolant pentru $\Gamma,\alpha_1,\alpha_2 \to \Delta$, atunci ε este interpolant și pentru $\Gamma,\alpha \to \Delta$.

A₂ Dacă ε este interpolant pentru $\Gamma \to \Delta,\beta_1,\beta_2$, atunci ε este interpolant și pentru $\Gamma \to \Delta,\beta$.

B₁ Dacă ε este interpolant pentru $\Gamma,\beta_1 \to \Delta$ și ι este interpolant pentru $\Gamma,\beta_2 \to \Delta$, atunci $\varepsilon \vee \iota$ este interpolant pentru $\Gamma,\beta \to \Delta$.

B₂ Dacă ε este interpolant pentru $\Gamma \to \Delta,\alpha_1$ și ι este interpolant pentru $\Gamma \to \Delta,\alpha_2$, atunci $\varepsilon \wedge \iota$ este interpolant pentru $\Gamma \to \Delta,\alpha$.

2.5.7. Compacitate, satisfiabilitate, consistență

Așa cum am văzut în 2.1.2.3, o formulă a $\mathcal{L}_p$ este *satisfiabilă* dacă este adevărată în cel puțin o interpretare a variabilelor sale. Similar, o mulțime Γ (finită sau infinit numărabilă) de formule ale $\mathcal{L}_p$ este satisfiabilă dacă toate formulele sunt simultan satisfiabile.

Teorema de compacitate (pentru G). Pentru orice mulțime Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ are loc: dacă orice submulțime finită a lui Γ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.

Demonstrație (reductio ad absurdum). Presupunem că Γ este nesatisfiabilă. Rezultă că secventul $\Gamma \to$ este valid. Și deci, prin teorema de completitudine (comp. *Remarcă 1*, 2.5.4) există o mulțime finită de formule $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\} \subset \Gamma$, astfel încât secventul $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \to$ este demonstrabil în G. De unde, prin teorema de corectitudine, rezultă că $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \to$ este valid. Și deci $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ nu este o mulțime satisfiabilă, ceea ce contrazice asumpția teoremei de compacitate. Așadar, Γ este satisfiabilă.

Similar definiției S-inconsistenței din 2.3.3 (Def. 3) vom construi un sens al G-in/consistenței unei mulțimi Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$.

Definiție. O mulțime Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ se numește G-inconsistentă dacă există o formulă β a $\mathcal{L}_p$ astfel încât în sistemul G au loc: $\vdash \Gamma \to \beta$ și $\vdash \Gamma \to \neg\beta$, în caz contrar Γ este G-consistentă.

Acest sens al inconsistenței este echivalent cu următorul: Γ este inconsistentă dacă $\vdash \Gamma \to \beta$, pentru *orice* β (de ce?).

Iar $\vdash \Gamma \to \beta$ înseamnă că există o mulțime finită de formule $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ din mulțimea Γ, astfel că $\vdash \alpha_1,\dots,\alpha_k \to \beta$.

Lema satisfiabilității (pentru G). Dacă Γ este o mulțime G-consistentă de formule ale $\mathcal{L}_p$, atunci Γ este satisfiabilă.

Demonstrație (reductio ad absurdum). Presupunem că Γ este nesatisfiabilă. Rezultă că secventul $\Gamma \to \beta$ este valid, pentru *orice* β. De unde, prin teorema de completitudine a sistemului G, există $\alpha_1,\dots,\alpha_k \subset \Gamma$ astfel că $\vdash \alpha_1,\dots,\alpha_k \to \beta$. Cum β poate fi orice formulă (i.e. construită dintr-o formulă și negația ei) rezultă că Γ este o mulțime G-inconsistentă[52] de formule, contrar asumpției.

Din această lemă deducem: dacă Γ este consistentă, atunci secventul $\Gamma \to$ nu poate fi valid (este deci falsificabil).

Lema consistenței (pentru G). Dacă Γ este o mulțime satisfiabilă de formule ale $\mathcal{L}_p$, atunci Γ este consistentă.

Demonstrație (reductio ad absurdum). Presupunem că Γ este inconsistentă. Și deci secventul $\Gamma \to \beta$ este demonstrabil, pentru *orice* β. Fie β formula $p \wedge \neg p$. Și deci secventul $\Gamma \to p \wedge \neg p$ este demonstrabil. Așadar, există $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ din Γ astfel încât $\alpha_1,\dots,\alpha_k \to p \wedge \neg p$ este demonstrabil. Prin teorema corectitudinii lui G rezultă că secventul $\alpha_1,\dots,\alpha_k \to p \wedge \neg p$ este valid, fapt imposibil, deoarece aceasta ar însemna, echivalent, nesatisfiabilitatea mulțimii $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} \in \Gamma$ și deci nesatisfiabilitatea lui Γ (ceea ce contrazice ipoteza teoremei).

Remarcă 1. O dată demonstrată lema satisfiabilității se poate construi o elegantă demonstrație a lemei: *Orice mulțime consistentă Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ admite o extensie maximal consistentă*[53]. Echivalent: *Orice mulțime consistentă Γ de formule ale $\mathcal{L}_p$ este o submulțime a unei mulțimi maximal consistente Γ^**

Demonstrație. Dacă Γ este consistentă, atunci Γ este satisfiabilă (prin Lema satisfiabilității). Există deci o interpretare *Int* în care toate formulele din Γ sunt adevărate. Fie Γ^* mulțimea tuturor formulelor adevărate în *Int*. Evident, Γ este o submulțime a lui Γ^*. Vom arăta că Γ^* este o mulțime maximal consistentă.

1. Γ^* *este consistentă,* căci toate formulele din Γ^* sunt adevărate în *Int* și deci Γ^* este satisfiabilă. De unde, prin Lema consistenței deducem 1.

2. Γ^* *este maximală (reductio ad absurdum).* Presupunem că Γ^* nu este maximală. Există deci o mulțime *consistentă* Δ, astfel că $\Gamma^* \subset \Delta$. Cum Δ este consistentă, rezultă că Δ este satisfiabilă (prin Lema satisfiabilității) și deci, prin definiție, există o interpretare Int^* în care toate formulele din Δ sunt adevărate. Cum Δ este o extensie *proprie* a lui Γ^* (i.e. cele două mulțimi *nu* coincid), există o formulă α care aparține lui Δ și nu aparține lui Γ^*. Cum α nu aparține mulțimii Γ^* rezultă că în interpretarea *Int* α ia valoarea logică fals. Și deci $\neg\alpha$ este adevărată în *Int*. Și deci $\neg\alpha \in \Gamma^*$. Cum Δ este o extensie a lui Γ^*, Int^* satisface orice formulă din Δ și deci și formula $\neg\alpha$. Însă Int^* satisface toate formulele din Δ și deci și formula α, despre care am presupus că aparține lui Δ și nu aparține lui Γ^*. Însă, în acest caz, rezultă că Int^* satisface atât α cât și $\neg\alpha$, imposibil. Deci Γ^* este maximală.

Remarcă 2. În demonstrația de mai sus a Lemei de existență cu privire la mulțimile maximal consistente s-a utilizat Lema satisfiabilității. Demonstrația dată în 2.3.3 (Lema 1)

[52] Întrucât aici avem în vedere doar sistemul G, omitem în cele ce urmează referirea explicită la G.
[53] Comp. Lema 1, 2.3.3.

acestei leme are altă factură. Demonstrația ei a fundamentat demonstrarea lemei satisfiabilității (Lema 2, 2.3.3), iar pe baza lemei satisfiabilității am construit demonstrația de completitudine.

2.5.8. Arborii deductivi şi formele normale [54]

Construcția unui arbore pentru un secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ permite, mai departe, construcția unei forme normale a formulei corespunzătoare.

Forma normală conjunctivă. Fie α o formulă a $\mathcal{L}_p$. Pentru obținerea formei normale *conjunctive* a formulei α (abrev α_c) construim un arbore deductiv pentru secventul $\rightarrow \alpha$. Vom avea una din cele două situații posibile: α este validă sau α este falsificabilă. În primul caz α o vom reda, simplu, printr-o formulă $\alpha_c : p \vee \neg p$, unde p este o variabilă propozițională din α. Evident, echivalența $\alpha \equiv \alpha_c$ are loc.

În cel de-al doilea caz, vom alege toți secvenții *nonaxiome* din punctele finale: $p_1,\dots,p_n \rightarrow q_1,\dots,q_m$, fiecăruia corespunzându-i un conjunct din α_c de forma: $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \supset (q_1 \vee \dots \vee q_m)$ (în acord cu sensul intuitiv al secvenților), echivalent $\neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q_1 \vee \dots \vee q_m$, echivalent $\neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n \vee q_1 \vee \dots \vee q_m$. Legăm prin conjuncție toate aceste formule şi obținem α_c.

Exemplu. Fie $\alpha : (p \supset r) \supset [(q \supset s) \supset ((p \vee q) \supset r)]$

$$p \rightarrow r,p,q \quad q \rightarrow r,p,q \quad p,s \rightarrow r,p \quad q,s \rightarrow r,p \quad p,r \rightarrow r,q \quad q,r \rightarrow r,q \quad p,r,s \rightarrow r \quad q,r,s \rightarrow r$$

$$p \vee q \rightarrow r,p,q \qquad p \vee q,s \rightarrow r,p \qquad p \vee q,r \rightarrow r,q \qquad p \vee q,r,s \rightarrow r$$

$$q \supset s, p \vee q \rightarrow r,p \qquad q \supset s, p \vee q, r \rightarrow r$$

$$p \supset r, q \supset s, p \vee q \rightarrow r$$

$$p \supset r, q \supset s \rightarrow (p \vee q) \supset r$$

$$p \supset r \rightarrow (q \supset s) \supset ((p \vee q) \supset r)$$

$$\rightarrow (p \supset r) \supset [(q \supset s) \supset ((p \vee q) \supset r)]$$

Ceea ce am obținut mai sus este un arbore deductiv al secventului $\rightarrow \alpha$. Din cei 8 secvenți puncte-finale doar unul nu este axiomă. Forma normală conjunctivă a formulei α este aşadar $\alpha_c = \neg q \vee \neg s \vee r \vee p$. Cum $\alpha \equiv \alpha_c$, putem cu uşurință să decupăm categoriile de asignări pentru care α este falsificabilă: $q = s = 1$ şi $r = p = 0$.

Exerciții

1. Arătați, cu ajutorul procedeului formelor normale, că forma normală conjunctivă a formulei α, α_c, este expresia mai sus obținută.

2. Argumentați direct, pe baza formulei α, că în interpretarea de mai sus α este falsificabilă.

[54] Comp. 2.1.4.4.

3. Pe baza arborilor deductivi corespunzători, construiți forma normală conjunctivă a următoarelor formule:

$$\alpha_1 = [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$
$$\alpha_2 = [(p \supset q) \wedge (q \supset s)] \supset (p \supset r)$$
$$\alpha_3 = [(p \wedge q) \supset r] \supset [(p \supset r) \supset (q \supset r)]$$
$$\alpha_4 = (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (r \supset s)]$$
$$\alpha_5 = (p \wedge q) \supset (p \supset q)$$
$$\alpha_6 = (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$$
$$\alpha_7 = (p \wedge q) \supset [(p \supset q) \wedge r]$$

Forma normală disjunctivă. Fie α o formulă a $\mathcal{L}_p$. Pentru a obține forma normală disjunctivă a formulei α (abrev. α_d) construim un arbore deductiv pentru secventul $\alpha \rightarrow$. În acord cu cele spuse în 2.5.1, un astfel de secvent este echivalent cu $\neg\alpha$, Așadar, $\neg\alpha$ este falsă ddacă α este adevărată. Ca mai sus, vom construi un arbore deductiv pentru $\alpha \rightarrow$ și vom alege toți secvenții *nonaxiome* din punctele finale ale arborelui, $p_1,\dots,p_n \rightarrow q_1,\dots,q_m$, fiecăruia corespunzându-i un disjunct din α_d de forma: $\neg[(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \supset (q_1 \vee \dots \vee q_m)]$, echivalent $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \neg q_1 \wedge \dots \wedge \neg q_m$. Legăm mai apoi prin disjuncție toate expresiile astfel construite și obținem α_d.

Exemplu. Fie $\alpha = [(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rightarrow p, q}{\rightarrow p \vee q} \qquad \dfrac{p \rightarrow r}{\rightarrow p \supset r}}{\rightarrow (p \vee q) \wedge (p \supset r)} \qquad \neg r \rightarrow}{[(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r \rightarrow}$$

$$\alpha_d = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee \neg r$$

Exerciții

1. Arătați, cu ajutorul procedeului formelor normale, că forma normală disjunctivă a formulei de mai sus, α_d, este expresia astfel obținută.

2. Pentru formulele $\alpha_1 - \alpha_7$ de la exercițiul 3 de mai sus construiți, pe baza arborilor deductivi corespunzători, forma normală disjunctivă și verificați rezultatul astfel obținut cu ajutorul procedeului formelor normale.

2.5.9. Arborii deductivi și mulțimile Hintikka

O altă modalitate de a prezenta un secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ este utilizarea unei perechi (Γ, Δ) de *mulțimi* de formule. În cele ce urmează vom considera doar cazul în care Γ și Δ sunt mulțimi *finite* de formule.

Fie secventul $[(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r \rightarrow$ din exemplul al doilea din 2.5.8. În acest caz $\Gamma = \{[(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r\}$, iar $\Delta = \{\emptyset\}$. Fie acum o ramură *deschisă* a arborelui deductiv al

secventului de mai sus. Fie Θ_1 mulțimea tuturor formulelor care apar în antecedentul fiecărui secvent din ramura considerată, iar Θ_2 mulțimea tuturor formulelor care apar în succedentul fiecărui secvent din ramura aleasă. Așadar,

$$\Theta_1 = \{[(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r, p\}$$

$$\Theta_2 = \{(p \vee q) \wedge (p \supset r), p \supset r, r\}$$

Din aceste două mulțimi construim o singură mulțime prin prefixarea tuturor formulelor din Θ_1 cu T (adevărat) și a tuturor formulelor din Θ_2 cu F (fals), adică:

$$\mathrm{H} = \{T[(p \vee q) \wedge (p \supset r)] \supset \neg r, Tp, F(p \vee q) \wedge (p \supset r), F(p \supset r), Fr\}$$

H este o mulțime Hintikka, adică o mulțime care satisface următoarele trei condiții:

1. *Nu conține nici o variabilă propozițională împreună cu negația ei.*
2. *Dacă* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{H}$, *atunci* $\boldsymbol{\alpha_1} \in \mathrm{H}$ *și* $\boldsymbol{\alpha_2} \in \mathrm{H}$.
3. *Dacă* $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{H}$, *atunci* $\boldsymbol{\beta_1} \in \mathrm{H}$ *sau* $\boldsymbol{\beta_2} \in \mathrm{H}$.

Lemă. Orice ramură deschisă a unui arbore deductiv formează o mulțime Hintikka.

Demonstrație. Ceea ce trebuie să arătăm este faptul că mulțimea H, așa cum am construit-o mai sus, este o mulțime Hintikka.

1 are loc. H nu poate conține o variabilă propozițională împreună cu negația ei. Căci orice variabilă propozițională care apare într-un secvent apare în orice ramură care conține secventul respectiv. Iar dacă H ar conține atât *Tp* cât și *Fp*, unde *p* este orice variabilă propozițională, atunci ramura respectivă conține un secvent *axiomă* și este deci o ramură *închisă*, contrar asumpției din lemă.

Pentru demonstrarea validității celorlalte condiții vom considera cele două cazuri distincte, după cum o formulă oarecare α aparține mulțimii Θ_1 sau α aparține mulțimii Θ_2. Considerăm că $\alpha \in \Theta_1$; cazul celălalt se tratează similar.

2 are loc. Considerăm că α aparține unui secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$, iar T$\alpha$ este o formulă de tipul $\boldsymbol{\alpha}$. În acest caz $\boldsymbol{\alpha_1}$ și $\boldsymbol{\alpha_2}$ se adaugă succesorului imediat al lui $\Gamma \rightarrow \Delta$, prin aplicarea unei reguli de inferență, în felul următor:

a) Dacă $\boldsymbol{\alpha_1}$ este de forma Tλ_1, atunci λ_1 se adaugă antecedentului succesorului lui $\Gamma \rightarrow \Delta$. La fel procedăm dacă $\boldsymbol{\alpha_2}$ are forma Tλ_2.

b) Dacă $\boldsymbol{\alpha_1}$ este de forma Fλ_1, atunci λ_1 se adaugă succedentului succesorului lui $\Gamma \rightarrow \Delta$. La fel procedăm dacă $\boldsymbol{\alpha_2}$ are forma Fλ_2.

Și deci în ambele cazuri $\boldsymbol{\alpha_1}$ și $\boldsymbol{\alpha_2}$ aparțin lui H.

3 are loc. Considerăm acum că o formulă α aparține unui secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$, iar T$\alpha$ este o formulă de tip $\boldsymbol{\beta}$. În acest caz $\Gamma \rightarrow \Delta$ va avea doi succesori, $\boldsymbol{\beta_1}$ va fi adăugată succesorului stâng, iar $\boldsymbol{\beta_2}$ succesorului drept. Și aici vom avea cele două cazuri de mai sus:

a) Dacă $\boldsymbol{\beta_1}$ este de forma Tλ_1, atunci λ_1 va fi adăugată antecedentului succesorului stâng al secventului $\Gamma \rightarrow \Delta$. Dacă și $\boldsymbol{\beta_2}$ este de forma Tλ_2, atunci λ_2 se va adăuga antecedentului succesorului drept al secventului $\Gamma \rightarrow \Delta$.

b) Dacă $\boldsymbol{\beta_1}$ este de forma Fλ_1, atunci λ_1 se va adăuga succedentului succesorului stâng al lui $\Gamma \rightarrow \Delta$. În fine, dacă $\boldsymbol{\beta_2}$ are forma Fλ_2, atunci λ_2 se va adăuga succedentului succesorului drept al lui $\Gamma \rightarrow \Delta$.

Și deci fie $\boldsymbol{\beta_1}$, fie $\boldsymbol{\beta_2}$ aparține lui H.

2.5.10. Sistemul LK*

Acest sistem tip Gentzen este de fapt sistemul LK din *Untersuchungen*...[55], fără cele 4 reguli de introducere a cuantificatorilor ∀ şi ∃ în antecedentul şi, respectiv, succedentul unui secvent. În construcţia acestui sistem vom găsi două tipuri de reguli: *structurale* şi *operaţionale*, la care se adaugă aşa-numita regulă a tăieturii.

1. Regulile structurale

Atenuare

$$At_s \; \frac{\Gamma \to \Delta}{\alpha, \Gamma \to \Delta} \qquad At_d \; \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \alpha}$$

Contragere

$$Cont_s \; \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha, \Gamma \to \Delta} \qquad Cont_d \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha}$$

Permutare

$$Per_s \; \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \to \Lambda} \qquad Per_d \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \beta, \alpha, \Lambda}$$

2. Regula tăieturii:

$$Taiet \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}$$

3. Regulile operaţionale (logice):

$$(\wedge_s) \; \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta} \; ; \; (\wedge_s) \; \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta} \; ; \; (\wedge_d) \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee_s) \; \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta \quad \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Delta} \; ; \; (\vee_d) \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta} \; ; \; (\vee_d) \; \frac{\Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$(\supset_s) \; \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \beta, \Lambda \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta} \qquad (\supset_d) \; \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \supset \beta}$$

[55] Comp. G. Gentzen, „Untersuchungen über das logische Schließen", 192-3.

$$(\neg_s)\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Delta} \qquad (\neg_d)\ \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\alpha}$$

Axiomele acestui sistem sunt orice secvent de forma $\alpha \to \alpha$.

Teorema de corectitudine a sistemului LK. Orice formulă LK*-demonstrabilă este validă.*

Ceea ce trebuie să arătăm sunt următoarele două teze: a) orice axiomă a sistemului LK* este un secvent valid (trivial!) şi b) dacă toate premisele unei reguli a acestui sistem sunt adevărate într-o interpretare arbitrară *Int*, atunci şi concluzia regulii este adevărată în interpretarea respectivă. Adică orice regulă conservă adevărul premiselor. Din aceste două teze rezultă că orice formulă deductibilă din axiomele sistemului, prin aplicarea regulilor sale, este o formulă validă.

Pentru a demonstra b) putem considera fiecare regulă în parte, argumentând corespunzător în raport cu formula principală conţinută.

Exemplu.

Fie regula $(\supset_s)$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \beta, \Lambda \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}$$

Dacă ambele premise ale regulii sunt adevărate, atunci concluzia este adevărată. Echivalent, dacă concluzia este falsă, atunci cel puţin una din premise este falsă. Pentru orice interpretare *Int*, concluzia este falsă în *Int* ddacă *Int* satisface toate formulele din Γ şi Λ plus formula $\alpha \supset \beta$ şi falsifică toate formulele din Δ şi Θ. Însă *Int* satisface $\alpha \supset \beta$ dacă fie *Int* falsifică α, fie *Int* satisface β. Aşadar, *Int* falsifică concluzia ddacă: 1) fie *Int* satisface Γ şi falsifică Δ şi α, 2) fie *Int* satisface β şi Λ şi falsifică Θ, exact ceea ce exprimă secvenţii din premise.

Remarcă. O deosebire esenţială există între teoremele de corectitudine ale sistemelor G şi LK*, în următorul sens. În G este valabilă următoarea echivalenţă:

Premise adevărate în *Int ddacă* concluzie adevărată în *Int*,

adică şi din adevărul concluziei se poate conchide asupra adevărului premiselor. În schimb, în LK* este valabil doar condiţionalul:

Dacă premisele sunt adevărate în *Int, atunci* concluzia este adevărată în *Int*.

Consistenţa în LK*

Lemă. 1. O mulţime Γ de formule este LK-inconsistentă ddacă există o formulă α astfel încât ambii secvenţi $\Gamma \to \alpha$ şi $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt LK*-demonstrabili.*[56]

2. Pentru orice α, secventul $\Gamma \to \alpha$ nu este LK-demonstrabil ddacă $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este consistentă.*

Demonstraţie. 1. Bicondiţionalul din 1 înseamnă:

1a) Dacă Γ este inconsistentă, atunci există α astfel încât atât $\Gamma \to \alpha$ cât şi $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt demonstrabili în LK*. Echivalent, pentru *orice* β, secventul $\Gamma \to \beta$ este demonstrabil (comp. 2.5.7).

[56] Omitem „LK*-".

1b) (conversa lui 1a). Dacă există α astfel încât atât $\Gamma \to \alpha$ cât şi $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt demonstrabili, atunci Γ este inconsistentă.

Pentru demonstrarea lui 1b) presupunem antecedentul condiţionalului, adică ambii secvenţi $\Gamma \to \alpha$ şi $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt demonstrabili şi vom arăta că secventul $\Gamma \to \beta$ este demonstrabil, unde β este orice formulă. Iată demonstraţia, unde $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ sunt demonstraţiile celor doi secvenţi presupuşi în antecedent:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_1}{\Gamma \to \alpha}}{\neg\alpha, \Gamma \to}\,(\neg_s)}{\Gamma \to \neg\neg\alpha}\,(\neg_d) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma \to \neg\alpha}}{\neg\neg\alpha, \Gamma \to}\,(\neg_s)}{\neg\neg\alpha, \Gamma \to \beta}\,(\mathrm{At}_d)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \beta}\,(\text{contrageri, permutări})}\,(\text{Taiet})$$

2. Bicondiţionalul din 2 înseamnă:

2a) Pentru orice α, dacă $\Gamma \to \alpha$ nu este demonstrabil, atunci $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este o mulţime consistentă.

Reductio ad absurdum. Presupunem că $\Gamma \to \alpha$ nu este demonstrabil şi $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă. Şi va rezulta că $\Gamma \to \alpha$ este demonstrabil, ceea ce contrazice ipoteza. Deci, dacă $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă, atunci secventul $\neg\alpha, \Gamma \to \alpha$ este demonstrabil; fie $\mathcal{T}$ o demonstraţie a acestuia.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}}{\neg\alpha, \Gamma \to \alpha}}{\Gamma \to \alpha, \neg\neg\alpha}\,(\neg_d) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha}{\to \alpha, \neg\alpha}\,(\neg_d)}{\neg\neg\alpha \to \alpha}\,(\neg_s)}{\dfrac{\Gamma \to \alpha, \alpha}{\Gamma \to \alpha}\,(\mathrm{Cont}_d)}\,(\text{Taiet})$$

2b) Dacă $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este consistentă, atunci $\Gamma \to \alpha$ nu este demonstrabil.

(*Reductio ad absurdum*). Dacă $\Gamma \to \alpha$ este demonstrabil, atunci $\Gamma, \neg\alpha \to \alpha$ este demonstrabil. Însă $\neg\alpha \to \neg\alpha$ este un secvent-axiomă, este deci demonstrabil; deci şi $\Gamma, \neg\alpha \to \neg\alpha$ este demonstrabil. De unde rezultă, prin 1, că $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă, contrar asumpţiei.

Hauptsatz *pentru sistemul* LK^*

Propoziţia principală (*Hauptsatz*) a lui Gentzen pentru sistemul LK^* are următoarea formulare: *Un secvent este* LK^**-demonstrabil ddacă el este* LK^**-Taiet-demonstrabil.* Respectiv, ddacă secventul este demonstrabil în sistemul LK^* considerat *fără* regula *Taiet.*

Nu vom urmări aici demonstrația lui Gentzen[57], în schimb vom obține acest rezultat ca un corolar al demonstrației *echivalenței* celor trei sisteme: G, LK^* şi LK^*-Taiet.

Teoremă

1. Orice demonstrație a unui secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ în LK^* poate fi transformată într-o demonstrație a lui în G.

2. Orice demonstrație a unui secvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ în G poate fi transformată într-odemonstrație a lui în LK^*-Taiet.

Demonstrație

1. Presupunem că secventul $\Gamma \rightarrow \Delta$ este demonstrabil în LK^*. Atunci rezultă că $\Gamma \rightarrow \Delta$ este valid (prin teorema de corectitudine a sistemului LK^*). Fiind valid, este demonstrabil în G (prin teorema de completitudine a lui G).

2. Orice axiomă a sistemului G este un secvent de forma $\Gamma \rightarrow \Delta$, în care Γ şi Δ au o formulă comună. Însă $\Gamma \rightarrow \Delta$ poate fi obținut în LK^*-Taiet dintr-o axiomă $\alpha \rightarrow \alpha$ prin aplicări repetate ale regulilor *At* şi *Per*.

Apoi, trebuie arătat că orice aplicație a unei reguli a sistemului G poate fi înlocuită printr-un şir de aplicații ale regulilor sistemului LK^*-Taiet. Din cele 8 reguli ale lui G alegem, ca exemplu, $\wedge_s$. Pentru compatibilizarea notației redăm această regulă în formularea echivalentă:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}$$

Trebuie arătat aşadar că din premisa acestei reguli a lui G, respectiv $\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \Lambda$, obținem, cu ajutorul regulilor sistemului LK^*-Taiet, concluzia acestei reguli, respectiv $\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \rightarrow \Lambda$.

Iată derivarea:

$$\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \Lambda$$

$$\overline{\text{(aplicări repetate ale } Per_s)}$$

$$\overline{\alpha, \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda}$$

$$\overline{\alpha \wedge \beta, \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda} \quad (\wedge_s)$$

$$\overline{\beta, \alpha \wedge \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda} \quad (Per_s)$$

$$\overline{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda} \quad (\wedge_s)$$

$$\overline{\alpha \wedge \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda} \quad (Cont_s)$$

$$\overline{\text{(aplicări repetate ale } Per_s)}$$

$$\overline{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}$$

[57] Demonstrația dată de Gentzen pentru sistemul LK, în *Untersuchungen...*, Comp. şi S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland P. Co, Amsterdam, Ed. IV, 1964, G. Takeuti, *Proof Theory*, Studies in Logic, vol. 81, Amsterdam, Elsevier, North Holland, 1975.

Corolar (*Hauptsatz*). Un secvent $\Gamma \dashrightarrow \Delta$ este LK*-demonstrabil ddacă el este LK*-Taiet-demonstrabil.

Exerciții

Fie SEQ următorul sistem de tip Gentzen:

Reguli structurale

$$Ant \quad \frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma^* \to \alpha}\text{, unde } \Gamma \subseteq \Gamma^*$$

$$As \qquad \Gamma \to \alpha \text{ , dacă } \alpha \in \Gamma$$

Prima regulă structurală, *Ant*, are următorul sens intuitiv: formulele care constituie antecedentul secventului-premisă pot fi reordonate, pot fi eliminate repetițiile sau pot fi adăugate noi formule (asumpție). A doua, *As*, redă faptul elementar că asupra unei formule α se poate conchide din moment ce α face parte din mulțimea asumpțiilor.

$$Cas \quad \frac{\Gamma, \alpha \to \beta \qquad \Gamma, \neg\alpha \to \beta}{\Gamma \to \beta}$$

Cas redă regula demonstrației prin cazuri.

$$Contr \quad \frac{\Gamma, \neg\alpha \to \beta \qquad \Gamma, \neg\alpha \to \neg\beta}{\Gamma \to \alpha}\text{, regula contradicției}$$

$$(\vee_s) \quad \frac{\Gamma, \alpha \to \gamma \qquad \Gamma, \beta \to \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \to \gamma} \qquad (\vee_d) \quad \frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ ; \quad \frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \beta \vee \alpha}$$

Se cere:

1. Demonstrați corectitudinea sistemului SEQ.
2. Demonstrați în sistemul SEQ următorul secvent $\to \alpha \vee \neg\alpha$.
3. Derivați în SEQ următoarele reguli:

a) $\dfrac{\Gamma \to \beta \qquad \Gamma \to \neg\beta}{\Gamma \to \alpha}$; b) $\dfrac{\Gamma \to \alpha \qquad \Gamma, \alpha \to \beta}{\Gamma \to \beta}$; c) $\dfrac{\Gamma \to \alpha \vee \beta \qquad \Gamma \to \neg\alpha}{\Gamma \to \beta}$; d) $\dfrac{\Gamma \to \alpha \supset \beta \qquad \Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \beta}$

e) $\dfrac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \neg\neg\alpha}$ f) $\dfrac{\Gamma \to \alpha \qquad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta}$ g) $\dfrac{\Gamma, \alpha \to \beta}{\Gamma, \neg\beta \to \neg\alpha}$

Exemple

(3a) 1. $\Gamma \to \beta$; premisa reg. 3a
2. $\Gamma \to \neg\beta$; premisa reg 3a
3. $\Gamma, \neg\alpha \to \beta$; 1 *Ant*
4. $\Gamma, \neg\alpha \to \neg\beta$; 2 *Ant*
5. $\Gamma \to \alpha$; 3,4 *Contr*

(3g) 1. $\Gamma, \alpha \to \beta$; premisa reg. 3g
2. $\Gamma, \neg\beta, \alpha \to \beta$; 1 *Ant*
3. $\Gamma, \neg\beta, \alpha \to \neg\beta$; 2 *As*
4. $\Gamma, \neg\beta, \alpha \to \neg\alpha$; 2,3,3a
5. $\Gamma, \neg\beta, \neg\alpha \to \neg\alpha$; *As*
6. $\Gamma, \neg\beta \to \neg\alpha$; 4,5 *Cas*

Consistența în SEQ

1. Să se demonstreze următoarea echivalență în SEQ: *a echival b*, unde

a: O mulțime Γ de formule este *inconsistentă* ddacă există o formulă α astfel încât ambii secvenți $\Gamma \to \alpha$, $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt demonstrabili în SEQ.

b: Pentru *orice* formulă β, secventul $\Gamma \to \beta$ este demonstrabil în SEQ.

Dacă a, atunci b. Presupunem, așadar, că Γ este inconsistentă. Există deci o formulă α astfel încât, în SEQ, în *k* pași este demonstrabil secventul $\Gamma \to \alpha$, iar în *n* pași este demonstrabil secventul $\Gamma \to \neg\alpha$, astfel:

:

k $\Gamma \to \alpha$

:

n $\Gamma \to \neg\alpha$
n+1 $\Gamma, \neg\beta \to \alpha$; k *Ant*
n+2 $\Gamma, \neg\beta \to \neg\alpha$; n *Ant*
n+3 $\Gamma \to \beta$; n+1, n+2 *Contr*

Dacă b, atunci a (rezultatul este imediat).

Remarcă

Din echivalența de mai sus obținem o altă echivalență, cea dintre a și b de mai jos:
a. Γ este consistentă.
b. Există o formulă β astfel încât $\Gamma \to \beta$ nu este demonstrabil în SEQ.

2. Să se demonstreze în SEQ următoarele relații:
a. $\Gamma \to \alpha$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă.
b. Dacă Γ este consistentă, atunci $\Gamma \cup \{\alpha\}$ este consistentă sau $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este consistentă.

Demonstrație a. 1. Presupunem că secventul $\Gamma \to \alpha$ este demonstrabil. Atunci este demonstrabil și $\Gamma, \neg\alpha \to \alpha$, prin *Ant*. Însă este de asemenea demonstrabil $\Gamma, \neg\alpha \to \neg\alpha$. Și deci $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ este inconsistentă.

2. (Conversa). Din presupoziția inconsistenței mulțimii $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ rezultă demonstrabilitatea secventului $\Gamma, \neg\alpha \to \alpha$. Dar și $\Gamma, \alpha \to \alpha$ este demonstrabilă (prin *As*) și deci, prin *Cas*, $\Gamma \to \alpha$.

Demonstrație b. (*reductio ad absurdum*). Presupunem că ambele mulțimi, $\Gamma \cup \{\alpha\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ sunt inconsistente. Rezultă că secvenții $\Gamma \to \alpha$ și $\Gamma \to \neg\alpha$ sunt demonstrabili (prin a; în cazul al doilea înlocuim pe α cu $\neg\alpha$). Și astfel rezultă că Γ este inconsistentă, ceea ce contrazice antecedentul condiționalului b.

2.6. Rezoluția în $\mathcal{L}_p$

2.6.1. Ce este o rezoluție?

În 2.2 am prezentat un procedeu prin care putem arăta dacă o formulă arbitrară a logicii propozițiilor este validă sau nu. În acest capitol vom prezenta alt procedeu de demonstrare a validității unei formule (dacă formula considerată este validă!), bazat, în esență, pe același schematism: *demonstrarea validității unei formule arătând că negația formulei este nesatisfiabilă*. Este deci tot un procedeu de *respingere*. El a fost descoperit de J. Robinson[58] și este cunoscut sub numele de *metoda rezoluției*.

Avantajul acestei metode rezidă în faptul că aplicarea ei se rezumă la aplicarea unei singure reguli: *regula rezoluției*. Însă aplicarea acestei reguli se poate face, diferit, în funcție de expresiile formale cu care operăm. Mai exact, regula poate fi aplicată unei formule transformate *complet* în expresia ei clauzală (rezoluția clauzală) sau unei expresii netransformate complet în această expresie (rezoluția neclauzală). Paralelismul cu metoda tablourilor analitice motivează această diferență: un tablou analitic se poate închide, adesea, fără a executa un tablou analitic *complet*.

Alte diferențe privesc simetriile cu alte procedee și posibilitatea extrapolării teoremelor aferente. Să explicăm aceste lucruri.

Definiția 1. Un literal este un simbol propozițional sau negația lui. Dacă L este un simbol propozițional, atunci conjugatul lui, $\neg L$, *este definit astfel: dacă* $L = p$, *atunci* $\neg L = \neg p$, *iar dacă* $L = \neg p$, *atunci* $\neg L = p$[59].

Definiția 2. Orice formulă de forma $C = \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$, *unde fiecare* β_i, $0 \leq i \leq n$, *este un literal se numește clauză.*

Clauza este deci o disjuncție finită de zero sau mai mulți literali. O clauză cu *n* literali se numește clauză *n-literală* sau *n-clauză*. O clauză care nu conține nici un literal se numește clauză *vidă*. Întrucât clauza vidă n-are nici un literal care să fie satisfăcut într-o interpretare, clauza vidă este *constant* falsă; simbolic □.

Definiția 3. O clauză C este rezolventa pe L a două clauze C_1 *și* C_2 *dacă există un literal L în* C_1 *iar conjugatul său,* $\neg L$, *în* C_2 *astfel încât C se obține din* C_1 *și* C_2 *prin ștergerea tuturor ocurențelor lui L din* C_1 *și* $\neg L$ *din* C_2 *și prin combinarea clauzelor care rămân într-o singură clauză.*

O proprietate importantă a unei rezolvente a două clauze este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1. Orice rezolventă C a două clauze C_1 *și* C_2 *este o consecință semantică a lui* C_1 *și* C_2.

Demonstrație. Cum *C* este rezolventa celor două clauze C_1 și C_2, rezultă că *C* are forma $C_1^* \vee C_2^*$, unde C_1^* și C_2^* sunt disjuncții de literali, iar $C_1 = L \vee C_1^*$ iar $C_2 = \neg L \vee C_2^*$. Prin definiție, o formulă β este consecință semantică a unei formule α dacă β este adevărată în orice interpretare în care α este adevărată. Ceea ce trebuie să arătăm este următorul fapt: *C* este adevărată în orice interpretare în care C_1 și C_2 sunt adevărate. Fie *i* o interpretare arbitrară. Evident, fie *L*, fie $\neg L$ este fals în interpretarea *i*. Presupunem că *L* este fals în *i* (cazul celălalt se tratează similar). Deducem că C_1 nu este 1-clauză, căci, în caz

[58] J. A. Robinson, A machine oriented logic based on the resolution principle, *Journal of the ACM* 12/1, 1965, 23-41.

[59] În notațiile cele mai uzuale simbolurile propoziționale sunt redate cu majuscule. În simbolismul adoptat de noi în capitolele anterioare ele sunt minusculele latine *p, q, r*, ..., simbolism pe care-l vom păstra de-a lungul întregului volum.

contrar C_1 ar fi falsă în *i*. Aşadar, C_1^* este adevărată în *i*. În acest caz rezolventa $C = C_1^* \vee C_2^*$ este adevărată în *i*.

Regula rezoluţiei (Rez). Dacă o clauză C este rezolventa pe L a două clauze, C_1 şi C_2, atunci C este derivabilă din C_1 şi C_2.

Definiţie 4. O formulă α a $\mathcal{L}_p$ este în expresia ei clauzală dacă mulţimea $\{C_1,\ldots,C_n\}$ reprezintă toţi conjuncţii formulei α aflate în forma normală conjunctivă.

Exemplu. Fie α: $(p \vee \neg q) \supset (p \supset r)$.

Atunci $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee r)$ eq $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$ eq $(\neg p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ eq $(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ este α_c. Şi deci α, în expresia ei clauzală, este mulţimea $\{\neg p \vee r, \neg p \vee q \vee r\}$.

Teorema 2. Orice formulă α a $\mathcal{L}_p$ poate fi transformată în expresia ei clauzală.

Demonstraţie. Se aduce α în α_c şi se constituie mulţimea corespunzătoare [60].

Definiţie 5. O demonstraţie prin rezoluţie a unei formule α a $\mathcal{L}_p$ (abreviat r-dem) este orice derivare a clauzei vide din expresia clauzală a negaţiei formulei α. α este o teoremă (echivalent: α este o formulă validă)[61] dacă α are o r-dem.

Exemplu. Fie α: $[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset \neg(p \wedge \neg r)$. Construim α_c a formulei $\neg\alpha$.

$\neg\alpha$ eq $\neg\{[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset \neg(p \wedge \neg r)\}$ eq $\neg\{\neg[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \vee \neg(p \wedge \neg r)\}$ eq $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$.

Mulţimea, conform definiţiei 4 de mai sus, este $\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$. Cele patru formule reprezintă cei patru paşi în derivarea clauzei vide. Următorii şapte paşi reprezintă derivarea clauzei □:

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$
5. q; 1, 3, *Rez*
6. $\neg q$; 2, 4, *Rez*
7. □; 5, 6, *Rez*

Evident, această derivare nu este unică. Puteam, la fel de bine, să derivăm □ şi în alt mod: din 2 şi 5 derivam *r*, care împreună cu 4 generează □.

Faptul că acest şir de formule reprezintă o *r-dem* a formulei α îl putem argumenta în felul următor. Cele şapte formule din derivarea de mai sus (şase plus clauza vidă) se constituie într-o mulţime de clauze corespunzătoare formulei $\neg\alpha$. Întrucât clauza vidă, □, este derivabilă din această mulţime, prin *rezoluţie*, rezultă, în acord cu Teorema 1, că ea este o consecinţă semantică a acestei mulţimi de clauze. Însă, clauza vidă, □, poate fi consecinţă semantică doar a unei mulţimi *nesatisfiabile* de clauze. Aşadar, formula $\neg\alpha$, din care am construit clauzele din liniile 1, 2, 3, 4 este *nesatisfiabilă* şi deci α este *validă*.

Remarcă. Mai sus am considerat cazul unei formule α transformate în forma ei clauzală. La fel de bine putem considera, distinct, *orice* mulţime de clauze şi, corespunzător, să demonstrăm satisfiabilitatea / nesatisfiabilitatea acestei mulţimi (i.e. dacă clauza vidă este derivabilă prin *Rez*, atunci mulţimea respectivă este nesatisfiabilă).

---

[60] Comp. 2.1.4.4.

[61] Demonstrarea echivalenţei o vom face mai jos.

Exemplu. Fie următoarele clauze: $C_1 = \neg p \vee q$; $C_2 = p$; $C_3 = \neg q$; $C_4 = \neg p \vee r$.

1. $\{\neg p, q\}$
2. $\{p\}$
3. $\{\neg q\}$
4. $\{\neg p, r\}$
5. $\{\neg p\}$; 1, 3, *Rez*
6. □ ; 2, 5, *Rez*

Cum e uşor de constatat, de data aceasta acoladele din 1-5 conţin literalii clauzelor corespunzătoare.

De fapt, o *r-dem* se bazează pe următoarea echivalenţă:

$$[(\alpha \vee p) \wedge (\beta \vee \neg p)] \equiv [(\alpha \vee p) \wedge (\beta \vee \neg p) \wedge (\alpha \vee \beta)],$$

unde clauza $\alpha \vee \beta$, adică $\{\alpha, \beta\}$, este rezolventa clauzelor precedente. Cum această echivalenţă are loc, rezultă că mulţimea de clauze $\{C_1,\ldots,C_n,\{\alpha, p\},\{\beta,\neg p\}\}$ este logic echivalentă cu mulţimea $\{C_1,\ldots,C_n,\{\alpha, p\},\{\beta,\neg p\},\{\alpha,\beta\}\}$ obţinută din prima prin adăugarea rezolventei clauzelor $\{\alpha, p\},\{\beta,\neg p\}$. Şi deci, dacă una este nesatisfiabilă, atunci, echivalent, şi cealaltă este nesatisfiabilă.

Aşa cum rezultă din exemplul de mai sus, prin aplicarea *Rez* procedeul rezoluţiei construieşte un şir (de mulţimi de clauze) ce se termină cu clauza vidă. Dacă derivarea □ are loc, atunci mulţimea iniţială de clauze este nesatisfiabilă, deoarece *Rez* conservă nesatisfiabilitatea.

Exerciţii

Fie formulele:

$\alpha_1 : [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

$\alpha_2 : (p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$

$\alpha_3 : (p \supset q) \supset [(p \vee \neg q) \supset \neg p]$

$\alpha_4 : [p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

Demonstraţi, cu ajutorul metodei rezoluţiei, validitatea acestor formule.

În exemplul de mai sus am arătat cum decidem cu ajutorul metodei rezoluţiei dacă formula α, adusă în forma unei mulţimi de clauze, este o teoremă (i.e. o formulă validă) a $\mathcal{L}_p$. Menţionam însă mai sus că aducerea unei formule α la această formă nu este un demers necesar. La fel de bine putem decide asupra formulei, construind un şir de formule din *negaţia* formulei date, prin aplicarea, *simetric* corespunzător, a regulilor R_α şi R_β, din procedeul tablourilor analitice[62].

Explicaţie. Simetria, mai exact *dualitatea*, rezultă din faptul că demonstraţia cu ajutorul tablourilor analitice este construcţia unui arbore în care fiecare ramură este conjuncţia formulelor ramurii respective iar tabloul ca atare este disjuncţia ramurilor. Un arbore este deci o disjuncţie de conjuncţii. Rezoluţia, în schimb, este o reprezentare în forma conjuncţiilor de disjuncţii. De data aceasta disjuncţii sunt formulele conţinute în acolade iar conjuncţia acestor formule este redată simplu în forma unui şir vertical. Cele două reguli prin care construim acest şir sunt

[62] Comp. 2.2.1.4.

$$R_\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_1 | \alpha_2} \qquad R_\beta^* = \frac{\beta}{\begin{matrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{matrix}},$$

ceea ce înseamnă următorul lucru:

Aplicarea regulii R_α^* asupra unei formule (de tip conjunctiv, α) conduce la obținerea a două formule, α_1, α_2, înregistrate, *consecutiv*, ca două linii distincte în şirul vertical de formule.

Aplicarea regulii R_β^* asupra unei formule (de tip disjunctiv, β) conduce la obținerea a două formule, β_1, β_2, înregistrate, *alternativ*, în aceeaşi linie, între acolade, dar separate prin virgulă.

Exemplu. Fie $\alpha : [(p \supset r) \vee (q \wedge s)] \supset [((p \supset r) \vee q) \wedge ((p \supset r) \vee s)]$.

1. $\{\neg([(p \supset r) \vee (q \wedge s)] \supset [((p \supset r) \vee q) \wedge ((p \supset r) \vee s)])\}$
2. $\{(p \supset r) \vee (q \wedge s)\}$; 1, R_α^*
3. $\{\neg[((p \supset r) \vee q) \wedge ((p \supset r) \vee s)]\}$; 1, R_α^*
4. $\{p \supset r, q \wedge s\}$; 2, R_β^*
5. $\{p \supset r, q\}$; 4, R_α^*
6. $\{p \supset r, s\}$; 4, R_α^*
7. $\{\neg[(p \supset r) \vee q], \neg[(p \supset r) \vee s]\}$; 3, R_β^*
8. $\{\neg(p \supset r), \neg[(p \supset r) \vee s]\}$; 7, R_α^*
9. $\{\neg q, \neg[(p \supset r) \vee s]\}$; 7, R_α^*
10. $\{\neg(p \supset r), \neg(p \supset r)\}$; 8, R_α^*
11. $\{\neg(p \supset r), \neg s\}$; 8, R_α^*
12. $\{\neg q, \neg(p \supset r)\}$; 9, R_α^*
13. $\{\neg q, \neg s\}$; 9, R_α^*
14. $\{q, \neg s\}$; 5, 11, *Rez*
15. $\{\neg s\}$; 13, 14, *Rez*
16. $\{p \supset r\}$; 6, 15, *Rez*
17. □ ; 10, 16, *Rez*

Lectura acestei dezvoltări este cea uzuală: simbolurile care succed fiecărei linii, după închiderea acoladei, reprezintă linia din care linia respectivă a fost dedusă şi regula aplicată: R_α^*, R_β^* sau *Rez*; cu mențiunea că *Rez*, în rezoluția nonclauzală, nu are ca rezolventă strict un literal.

2.6.2. R-demonstrația şi demonstrația Gentzen

Procedeul rezoluției *clauzale*, mai sus prezentat, poate fi însă considerat şi ca o variantă a unor sisteme tip Gentzen[63]. Relația dintre r-demonstrații şi demonstrațiile Gentzen rezidă în următorul fapt: dată fiind o formulă β, dacă α este forma normală conjunctivă a lui $\neg\beta$, atunci

[63] G.A. Robinson; L. Wos, Paramodulation and theorem-proving in first-order logic with equality, *Machine Intelligence*, vol. 4, 1969, 135-150; J. Gallier, *Logic for Computer Science*, 2003.

*β este validă **ddacă** α este nesatisfiabilă **ddacă** secventul $\alpha \rightarrow$ este valid.*

Să vedem mai întâi cum arată un astfel de sistem Gentzen.

2.6.2.1. Sistemul Gentzen G^*

Acest sistem este sistemul G în care orice secvent are forma $\alpha \rightarrow$, unde α este o formulă aflată în forma normală conjunctivă. α are deci forma $C_1 \wedge ... \wedge C_n$, unde fiecare C_i este o *clauză*. Şi deci α poate fi redată în forma $C_1,...,C_n \rightarrow$. Pentru secvenţii de această formă din cele 8 reguli ale sistemului G rămân operante doar două: $\neg_s$ şi $\vee_s$. Cum orice componentă a unei clauze C_i este un literal, rezultă că prin aplicarea $\neg_s$ un literal de forma $\neg p$ apare în antecedentul concluziei regulii, pentru un p care apare în succedentul secventului din premisă. Apoi, toţi secvenţii vor avea doar simboluri propoziţionale în succedenţii lor, deoarece prin aplicarea $\vee_s$ nu se adaugă nici un fel de formule în dreapta secvenţilor. Şi deci dacă secvenţii au forma de mai sus, doar cele două reguli sunt operante în sistem.

Exemple.

Fie $\beta : [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$. Fie $\alpha \equiv \neg\beta$, formula $\neg\beta$ adusă în forma $C_1,...,C_n$:

$$\neg([(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)) \equiv \neg(\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r)) \equiv [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \wedge p \wedge \neg r$$

Vom avea, corespunzător, $\{\neg p, q\}$, $\{\neg q, r\}$, $\{p\}$, $\{\neg r\}$. În această redare simbolică acoladele reprezintă clauzele respective, virgulele care separă literalii din clauze denotă *disjuncţii*, iar care separă clauzele *conjuncţii*. În transformările pe care le efectuăm în vederea obţinerii clauzelor $C_1,...,C_n$, vom considera că literalii sunt distincţi şi clauzele sunt distincte, prin eliminarea repetiţiilor (fapt posibil, dată fiind asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operatorilor $\wedge$ şi $\vee$). Iar acolo unde clauza are un singur literal vom renunţa la acolade.

Ceea ce trebuie să demonstrăm acum, utilizând cele două reguli, $\neg_s$ şi $\vee_s$, este validitatea secventului $\{\neg p \vee q\}, \{\neg q \vee r\}, \{p\}, \{\neg r\} \rightarrow$:

$$\dfrac{\dfrac{\{\neg q, r\}, p, \neg r \rightarrow p}{\neg p, \{\neg q, r\}, p, \neg r \rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{q, p, \neg r \rightarrow q}{q, \neg q, p, \neg r \rightarrow} \qquad \dfrac{q, r, p \rightarrow r}{q, r, p, \neg r \rightarrow}}{q, \{\neg q, r\}, p, \neg r \rightarrow}}{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, p, \neg r \rightarrow}$$

Concizia poate merge însă mai departe, renunţând şi la regula $\neg_s$, prin redefinirea axiomelor sistemului G^*, în felul următor:

Definiţie. Axiomă este orice secvent de forma $r, p, \neg p \rightarrow$.

E clar, în acest caz şi demonstraţiile se scurtează. Fie

$\beta : [(p \supset r) \wedge (q \supset s)] \supset [(p \wedge q) \supset (r \wedge s)]$.

Fie $\alpha \equiv \neg\beta$. Secventul $\{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, p, q, \{\neg r, \neg s\} \rightarrow$ este valid. Demonstraţi acest lucru utilizând strict regula $\vee_s$.

Chiar şi simplificarea de mai sus poate fi continuată. Să presupunem că un secvent de forma $\Gamma, \alpha_1 \vee \beta, ..., \alpha_n \vee \beta \rightarrow$ este demonstrabil. Orice exerciţiu care exemplifică acest caz ne

va arăta că în demonstrarea acestui secvent, secventul de forma $\Gamma, \beta \to$ se repetă în cursul demonstrației. Pentru a elimina aceste repetiții se introduce următoarea regulă:

$$Reg \quad \frac{\Gamma_1, C_1, \dots, C_m \to \qquad \Gamma_2, \beta \to}{\Gamma, \alpha_1 \vee \beta, \dots, \alpha_n \vee \beta \to}$$

unde Γ_1 și Γ_2 sunt submulțimi arbitrare, nu neaparat distincte, ale mulțimii secventului din concluzie (i.e. $\{\Gamma, \alpha_1 \vee \beta, \dots, \alpha_n \vee \beta\}$), $C_1, \dots, C_m$ sunt submulțimi arbitrare *nevide* ale mulțimii $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ iar β este un *literal.*

În acest fel sistemul Gentzen considerat G^* atinge concizia maximă: are ca axiome orice secvent de forma $\Gamma, p, \neg p \to$, iar singura regulă de deducție este *Reg*. Considerăm mai jos un exemplu de demonstrație, mai întâi cu utilizarea uzuală a regulii $\vee_s$ iar apoi, în varianta ei concisă, *Reg*.

Fie $\beta: [(p|q) \wedge (r \supset s)] \supset [(r \wedge q) \supset (s \wedge q)]$. Forma normală conjunctivă a formulei $\alpha(\equiv \neg\beta)$ este: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge r \wedge q \wedge (\neg s \vee \neg q)$ (obținerea ei: exercițiu). Avem, așadar, de demonstrat validitatea secventului $\{\neg p, \neg q\}, \{\neg r, s\}, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to$.

Cu ajutorul regulii $\vee_s$ demonstrația arată astfel:

$$\dfrac{\dfrac{\neg p, \neg r, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to \qquad \dfrac{\neg p, s, r, q, \neg s \to \qquad \neg p, s, r, q, \neg q \to}{\neg p, s, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to}}{\neg p, \{\neg r, s\}, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to} \qquad \neg q, \{\neg r, s\}, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to}{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg r, s\}, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to}$$

Iar acum, cu utilizarea *Reg.*

$$\dfrac{\dfrac{\neg s, s \to \qquad \neg r, r \to}{\neg s, \{\neg r, s\}, r \to} \qquad \neg q, q \to}{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg r, s\}, r, q, \{\neg s, \neg q\} \to}$$

În această demonstrație, *Reg* se aplică clauzelor $\{\neg p, \neg q\}$ și $\{\neg s, \neg q\}$ (prima și ultima în înșiruirea secventului de mai sus). Literalul $\neg q$, comun celor două clauze, este retranscris în antecedentul secventului din dreapta, iar din mulțimea rămasă $\{\neg p, \neg s\}$ vom alege doar $\neg s$ pentru secventul din stânga. Incontestabil, această demonstrație este mai scurtă decât precedenta.

Exercițiu: Construiți demonstrații Gentzen pentru formulele $\alpha_1 - \alpha_4$ din 2.6.1.

Corectitudinea și completitudinea sistemului G^*

Teorema corectitudinii sistemului G^*.

Orice secvent demonstrabil în G^* *este valid.*

a) Orice axiomă este un secvent valid (trivial).

b) Orice aplicație a *Reg* conservă adevărul premiselor.

Echivalent: dacă *Int* este o interpretare în care concluzia regulii *Reg* este falsă, atunci cel puțin una din premisele regulii este falsă în interpretarea *Int*. Să presupunem deci că într-o interpretare oarecare *Int* secventul $\Gamma, \alpha_1 \vee \beta, \ldots, \alpha_n \vee \beta \rightarrow$ este fals. În acest caz, în *Int* sunt adevărate toate formulele din Γ și toate formulele $\alpha_1 \vee \beta, \ldots, \alpha_n \vee \beta$. Considerăm acum următoarele două subcazuri:

1. În interpretarea *Int* β este adevărată. Și deci în interpretarea *Int* Γ și β sunt adevărate și astfel și Γ_2 și β sunt adevărate (pentru că $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$) și deci secventul $\Gamma_2, \beta \rightarrow$ este fals.

2. În interpretarea *Int* β este fals. Atunci, în interpretarea *Int* toate formulele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ trebuie să fie adevărate. Și astfel formulele din Γ_1 sunt adevărate (pentru că $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$) și formulele $C_1, \ldots, C_m$ sunt adevărate (pentru că $\{C_1, \ldots, C_m\}$ este o submulțime nevidă arbitrară a lui $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$). Și astfel, în interpretarea *Int* secventul $\Gamma_1, C_1, \ldots, C_m \rightarrow$ este fals.

Dacă premisele regulii *Reg* sunt adevărate în *orice* interpretare (i.e. valide), atunci concluzia regulii este validă.

Completitudinea sistemului G*

În demonstrarea completitudinii sistemului G^* vom recurge la sistemul G, arătând, prin inducție pe arbori deductivi în G, că orice secvent valid $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$ are o demonstrație în G^*. Pentru aceasta va trebui să aducem demonstrațiile în G la o formă normală, dată în lema de mai jos.

Lema formei normale. Fie $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$ *un secvent în care fiecare* C_i *este o clauză. Orice demonstrație în G a unui secvent de această formă este echivalentă în G cu o demonstrație în care toate aplicațiile* $\neg_s$ *preced toate aplicațiile* $\vee_s$ *(citind demonstrația de la secvenții finali spre origine).*

Exemplu:

Subarbore de tipul 1

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathcal{T}_1}{\Gamma, \alpha \rightarrow p} \qquad \cfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma, \beta \rightarrow p}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \rightarrow p}}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \neg p \rightarrow}$$

Subarbore de tipul 2

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathcal{T}_1}{\Gamma, \alpha \rightarrow p}}{\Gamma, \alpha, \neg p \rightarrow} \qquad \cfrac{\cfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma, \beta \rightarrow p}}{\Gamma, \beta, \neg p \rightarrow}}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \neg p \rightarrow}$$

Demonstrație (inducție pe arbori demonstrativi). Fie $\mathcal{T}$ un arbore demonstrativ.

1. $\mathcal{T}$ are un singur punct. $\mathcal{T}$ este deci o axiomă și lema are loc (trivial).

2. Numărul punctelor lui $\mathcal{T}$ este mai mare decât 1. În acest caz deosebim:

a) Regula aplicată originii lui $\mathcal{T}$ este $\vee_s$. Rezultă că $\mathcal{T}$ are doi subarbori, $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$, cu originile O_1 și O_2. Însă, prin ipoteza inducției, lema are loc pentru $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ și deci există arborii demonstrativi $\mathcal{T}_1^*$ și $\mathcal{T}_2^*$, cu originile O_1 și O_2 care satisfac enunțul lemei. Acum, dacă în arborele demonstrativ $\mathcal{T}$ înlocuim subarborii $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ cu $\mathcal{T}_1^*$, respectiv $\mathcal{T}_2^*$, obținem un arbore demonstrativ care satisface lema.

b) Regula aplicată originii lui $\mathcal{T}$ este $\neg_s$. Fie $\mathcal{T}_1$ subarborele lui $\mathcal{T}$ care are ca origine secventul $\Gamma, \alpha \vee \beta \rightarrow p$. Acum deosebim următoarele situații:

b_1 $\mathcal{T}_1$ este o axiomă. Și deci lema are loc (trivial).

b_2 Regula aplicată originii lui $\mathcal{T}_1$ este $\neg_s$. Și deci, prin ipoteza inducției, există un arbore $\mathcal{T}_1^*$ care satisface lema. Aici avem următoarele două subcazuri:

$b_{2.1.}$ $\mathcal{T}_1^*$ conține numai aplicații ale $\neg_s$. Lema are loc deoarece există un simbol propozițional q astfel încât q și $\neg q$ aparțin secventului $\Gamma, \alpha \vee \beta, \neg p \rightarrow$.

$b_{2.2.}$ Arborele $\mathcal{T}^*$, obținut din $\mathcal{T}$ prin înlocuirea lui $\mathcal{T}_1$ cu $\mathcal{T}_1^*$ este de tipul 1, de mai sus, și deci poate fi înlocuit cu unul de tipul 2. Și astfel, prin ipoteza inducției aplicată celor doi subarbori ai lui $\mathcal{T}^*$, rezultatul are loc.

b_3 Regula aplicată originii lui $\mathcal{T}_1$ este $\vee_s$. Și deci $\mathcal{T}$ este de tipul 1 și conchidem ca mai sus.

Teorema de completitudine a sistemului G*

Orice secvent valid $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$ este demonstrabil în G^*.

Demonstrație. Presupunem că secventul $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$ este valid. Este deci demonstrabil în G (prin completitudinea lui G). Și deci în demonstrația acestui secvent orice aplicare a $\vee_s$ este o aplicare (i.e. exemplificare) a *Reg.* Prin *Lema formei normale*, în demonstrația secventului $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$ orice aplicație a $\neg_s$ precede toate aplicațiile $\vee_s$. Completitudinea sistemului G^* o facem prin inducție pe arborii demonstrativi în G. Ideea demonstrației este următoarea: orice demonstrație din G poate fi simulată în G^*.

Fie $\mathcal{T}$ o demonstrație în G pentru secventul $C_1, \ldots, C_n \rightarrow$. Presupunem că secventul este netrivial (i.e. nu conține două clauze C_i, C_j astfel că $C_i = p$ iar $C_j = \neg p$). Există deci o clauză, fie ea C_1, de forma $\alpha \vee \beta$ iar inferența de la baza lui $\mathcal{T}$ este $\vee_s$. $\mathcal{T}$ are deci forma

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_1}{\alpha, C_2, \ldots, C_n \rightarrow} \qquad \dfrac{\mathcal{T}_2}{\beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow}}{\alpha \vee \beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow}$$

a) $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ conțin doar aplicații ale $\neg_s$. În acest caz α trebuie să fie un literal, iar vreuna din clauzele $C_2, \ldots, C_n$ trebuie să fie conjugatul său. Căci dacă n-ar fi așa, atunci secventul $C_2, \ldots, C_n \rightarrow$ ar fi trivial și deci și secventul $\alpha \vee \beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow$ ar fi trivial, contrar asumpției de mai sus. Similar, β este un literal. Fie $\neg\alpha$ conjugatul lui α, iar $\neg\beta$ conjugatul lui β. În acest caz demonstrarea secventului $\alpha \vee \beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow$ arată astfel:

$$\dfrac{\alpha, \neg\alpha \rightarrow \qquad \beta, \neg\beta \rightarrow}{\alpha \vee \beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow}$$

unde $\Gamma_1 = \neg\alpha$ iar $\Gamma_2 = \neg\beta$.

b) $\mathcal{T}_1$ sau $\mathcal{T}_2$ nu conțin doar aplicații ale $\neg_s$. În acest caz cel puțin unul dintre secvenții $\alpha, C_2, \ldots, C_n \rightarrow$; $\beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow$ este netrivial. Să presupunem că $\beta, C_2, \ldots, C_n \rightarrow$ este

trivial iar $\alpha, C_2,..., C_n \rightarrow$ este netrivial. Atunci β este un literal iar una din clauzele $C_2,..., C_n$ este conjugatul său, $\neg\beta$. Cum $\alpha, C_2,..., C_n \rightarrow$ este netrivial, rezultă, prin ipoteza inducției, că are o demonstrație S_1 în G^*, care conține încă o aplicație a $\vee_s$ și care arată astfel:

$$\frac{\dfrac{S_1}{\alpha, C_2,..., C_n \rightarrow} \qquad \beta, \neg\beta \rightarrow}{\alpha \vee \beta, C_2,..., C_n \rightarrow}$$

În cazurile în care secventul $\beta, C_2,..., C_n \rightarrow$ este netrivial sau ambii secvenți sunt netriviali raționăm analog.

2.6.2.2. Conversia demonstrațiilor

Un rezultat interesant cu privire la rezoluția în $\mathcal{L}_p$ și sistemul Gentzen G^* este următorul: *orice r-dem poate fi convertită într-o* G^**-dem și reciproc.*

Demonstrarea nesatisfiabilității unei mulțimi de clauze $\{C_1,..., C_n\}$ se poate face și în alt mod decât cel prezentat mai sus, prin aplicații repetate ale *Rez*. Respectiv, se poate construi un arbore a cărui origine este clauza vidă. Cum asemenea arbori, în general, pot conține cópii ale unor subarbori identici, este de preferat ca procedeul rezoluției să-i reprezinte în forma lor „condensată", ca arbori colapsați, respectiv ca *grafuri orientate aciclic.*

Conversia reciprocă *r-dem* – G^**-dem* va fi astfel prezentată în forma transformării unei demonstrații prin rezoluție utilizând grafurile orientate aciclic (abreviat: rezoluția *g.a*) într-o demonstrație în G^* utilizând arborii demonstrativi, și reciproc. Să definim mai întâi conceptele.

Clase de echivalență. Stringuri. Arbori.

Fie N mulțimea numerelor naturale $\{0,1,2,...\}$. O mulțime *M* este *infinit numărabilă* ddacă există o bijecție $f : \mathrm{N} \rightarrow M$; în caz contrar este *nenumărabilă*. Fie N_+ mulțimea întregilor pozitivi. Pentru orice $n \in \mathrm{N}_+$, fie $\boldsymbol{n}$ mulțimea $\{1,..., n\}$, fie $\boldsymbol{0}$ mulțimea vidă, *M* este o mulțime *finită* dacă există o bijecție $f : \boldsymbol{n} \rightarrow M$, unde $n \in \mathrm{N}$. Cardinalitatea mulțimii *M*, denotată |*M*|, este numărul $n \in \mathrm{N}$.

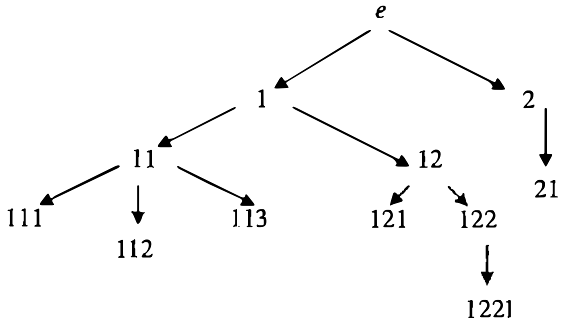
Fie *R* e relație de echivalență (i.e. reflexivă, simetrică și tranzitivă) pe o mulțime *M*. Atunci pentru orice $x \in M$, mulțimea $\{y \in M | (x, y) \in R\}$ este *clasa (de) echivalență a lui x modulo R* (abrev. *x mod R*). Dacă, de exemplu, $M = \{C_1,..., C_7\}$, iar C_2, C_3 și C_7 sunt astfel încât $(C_1, C_2) \in R$, $(C_1, C_3) \in R$, $(C_1, C_7) \in R$, atunci $x \bmod R = \{C_2, C_3, C_7\}$.

Fie *M* o mulțime finită sau infinită. Un *string* peste *M* este orice șir finit $s : \boldsymbol{n} \rightarrow M$, unde $n \in \mathrm{N}$ și se numește *lungimea* stringului. Dacă $n = 0$, atunci stringul este *nul*, denotat prin *e*. Fie M^S mulțimea tuturor stringurilor peste *M*. Fie $s : \boldsymbol{n} \rightarrow M$ un string, astfel că *n*>0; atunci pentru orice $i \in \boldsymbol{n}$, $s(i)$ este un element al mulțimii *M*. Dat fiind un string s_1, un string s_2 este un *prefix* al lui s_1 dacă există un string s_3 astfel că $s_1 = s_2 s_3$, unde prin $s_2 s_3$ înțelegem concatenarea (i.e. juxtapunerea) în modul indicat a celor două stringuri. s_2 este un *sufix* al lui s_1 dacă există un string s_3 astfel încât $s_1 = s_3 s_2$.

Fie $\mathcal{T}$[64] un arbore. Prin *domeniul lui* $\mathcal{T}$, $D_{\mathcal{T}}$, vom înțelege o submulțime nevidă de stringuri din $\mathbf{N}_{+}^{*}$, astfel încât:

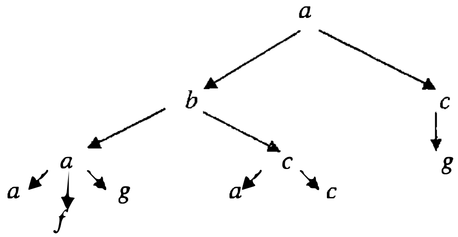
1. Pentru orice $s \in D_{\mathcal{T}}$, orice prefix al lui s se află în $D_{\mathcal{T}}$.
2. Pentru orice $s \in D_{\mathcal{T}}$, pentru orice $i \in \mathbf{N}_{+}$, dacă $si \in D_{\mathcal{T}}$, atunci pentru orice j, $1 \le j \le i$, sj se află în $D_{\mathcal{T}}$.

Exemplu. Fie $D_{\mathcal{T}} = \{e,1,2,11,12,111,112,113,121,122,1221,21\}$. $D_{\mathcal{T}}$ poate fi reprezentat astfel:



Corespunzător, dacă în locul elementelor (i.e. punctelor) din $D_{\mathcal{T}}$, din reprezentarea de mai sus, vom pune elementele unei mulțimi $E = \{a,b,c,d,f,g\}$ de *etichete*, atunci funcția $\mathcal{T} : D_{\mathcal{T}} \to E$, al cărei graf este

$\{(e,a),(1,b),(2,c),(11,a),(12,c),(111,a),(112,f),(113,g),(121,a),(122,c),(21,g)\}$ este arborele $\mathcal{T}$:

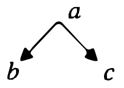


Prin *ramificarea* unui punct s, *ram(s)*, înțelegem cardinalitatea mulțimii $\{\, i | si \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}} \,\}$. Dacă s este un punct final, atunci $ram(s) = 0$.

Două puncte sunt *independente* dacă nici unul nu este prefixul celuilalt. Fie $\mathcal{T}$ un arbore iar $s \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. *Subarborele* cu originea s este arborele $\mathcal{T}/s$ al cărui domeniu este mulțimea $\{\, u | su \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}} \,\}$ astfel că $\mathcal{T}/s(u) = \mathcal{T}(su)$ pentru orice $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}/s}$.

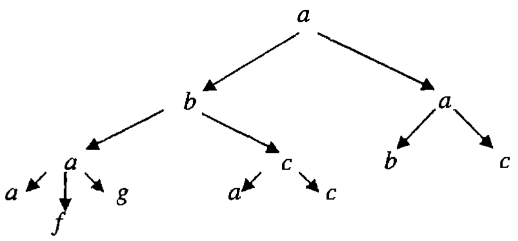
Fie $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ doi subarbori iar $s \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}_1}$. Rezultatul *înlocuirii* în punctul s al lui $\mathcal{T}_1$ cu $\mathcal{T}_2$ este funcția al cărui graf este $\{\, (u, \mathcal{T}_1(u)) \mid s$ nu este un prefix al lui $u\} \cup (su, \mathcal{T}_2(u))$.

Exemplu. Fie $\mathcal{T}_1$ arborele $\mathcal{T}$ de mai sus, iar $\mathcal{T}_2$ următorul arbore:



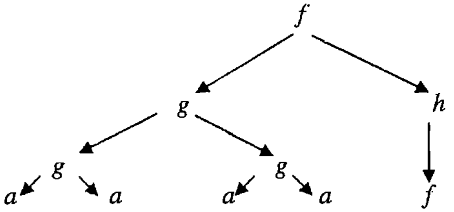
Atunci, înlocuirea în punctul 2 al arborelui $\mathcal{T}_1$ cu arborele $\mathcal{T}_2$ este arborele:

[64] Aceste concepte sunt o translație corespunzătoare a celor din 2.2.



Grafuri orientate aciclic. Rezoluție g.a.

Fie $\mathcal{T}$ următorul arbore:



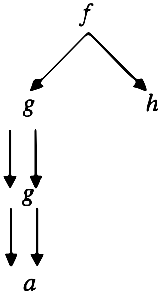
Cum uşor se poate constata, $\mathcal{T}$ conține o repetiție a subarborelui g în care subarborele a, de asemenea, se repetă.

Fie $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} = \{e,1,2,11,12,111,112,121,122,21\}$.

Definim acum R pe $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ ca următoarea mulțime de perechi:

$\{(11,12),(111,121),(112,122),(111,112)\}$

Clasele de echivalență *modulo R* sunt puncte ale unui graf care reprezintă arborele $\mathcal{T}$ ca arbore *colapsat*, graf care poate fi redat astfel:



Graful obținut se numeşte *aciclic* deoarece dacă două puncte sunt echivalente, atunci ele sunt independente şi astfel graful nu conține cicluri.

Definiția 1. Un graf orientat aciclic (g.a.) este o pereche $(\mathcal{T},R)$*, unde* $\mathcal{T}$ *este un arbore etichetat cu simboluri dintr-o mulțime E, iar R este o relație de echivalență pe* $D_{\mathcal{T}}$ *astfel încât: pentru orice pereche de puncte* $s,u \in D_{\mathcal{T}}$*, dacă* $(s,u) \in R$*, atunci fie* $s = u$*, fie s şi u sunt independente şi pentru orice i > 0 au loc*

1. $si \in D_{\mathcal{T}}$ *ddacă* $ui \in D_{\mathcal{T}}$.
2. *Dacă* $si \in D_{\mathcal{T}}$*, atunci* $(si,ui) \in R$.
3. $\mathcal{T}(s) = \mathcal{T}(u)$

Arborele $\mathcal{T}$ se numeşte arborele subiacent grafului aciclic.

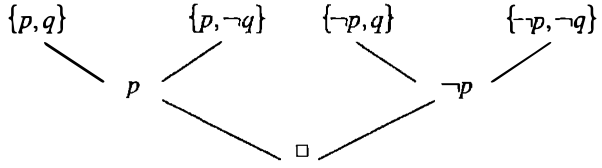
Date fiind două clase de echivalenţă, Cl_1 şi Cl_2, o muchie de la Cl_1 la Cl_2 este orice pereche (*s mod R, si mod R*) a claselor de echivalenţă ale punctelor *modulo R*, astfel că $s \in Cl_1$ şi $si \in Cl_2$.

Definiţia 2. Fie $C = \{C_1,...,C_n\}$ o mulţime de clauze. O rezoluţie g.a pentru C este orice mulţime nevidă $\{(\mathcal{T}_1, R_1),...,(\mathcal{T}_k, R_k)\}$ de grafuri orientate aciclic distincte, etichetate cu clauze, astfel că: 1. Punctele finale ale oricărui arbore subiacent $\mathcal{T}_i$ sunt etichetate cu clauze din C.

2. Orice punct non-final u al oricărui graf $(\mathcal{T}_i, R_i)$ are exact doi succesori, s_1 şi s_2, iar dacă etichetele corespunzătoare sunt clauzele C_i şi, respectiv, C_j, atunci s are eticheta rezolventei clauzelor C_i şi C_j.

Definiţia 3. O demonstraţie prin rezoluţie g.a (abreviat: r-dem g.a) este un graf orientat aciclic $(\mathcal{T}, R)$ a cărui origine are eticheta □. Punctele unei r-dem g.a, altele decât punctele terminale, se numesc paşi ai rezoluţiei (abreviat: r-paşi).

Exemplu. Fie $C = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg p,\neg q\}\}$.

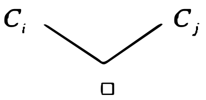


Conversia G* -demonstraţiilor în r-demonstraţii g.a

Teoremă. Orice G* *-demonstraţie se poate converti într-o r-demonstraţie g.a*

Demonstraţie (inducţie pe arbori demonstrativi în G**)*

1. Fie $C = \{C_1,...,C_m\}$. Dacă arborele demonstrativ al secventului $C_1,...,C_m \to$ are un singur punct, etichetat cu o axiomă, atunci mulţimea C conţine cel puţin un literal şi negaţia lui. Şi astfel r-demonstraţia g.a este



2. Dacă arborele demonstrativ al secventului $C_1,...,C_m \to$ are mai mult decât un punct, atunci el are forma:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_1}{\Gamma_1, \gamma_1,...,\gamma_k \to} \qquad \dfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma_2, \beta \to}}{\Gamma, \{\alpha_1, \beta\},...,\{\alpha_n, \beta\} \to}$$

unde $C = \{\Gamma, \{\alpha_1, \beta\},...,\{\alpha_n, \beta\}\}$, iar $\{\gamma_1,...,\gamma_k\} \subseteq \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$.

Prin ipoteza inducţiei, există o r_1-dem g.a obţinută din arborele $\mathcal{T}_1$ cu originea $\Gamma_1, \gamma_1,...,\gamma_k \to$ şi o r_2-dem g.a obţinută din $\mathcal{T}_2$ cu originea $\Gamma_2, \beta \to$. Punctele finale ale dem r_1 sunt clauze din mulţimea $\{\Gamma_1, \gamma_1,..., \gamma_k\}$, iar cele din r_2 sunt clauze din mulţimea $\{\Gamma_2, \beta\}$. Fie $\{\gamma_1,...,\gamma_p\}$ submulţimea clauzelor din $\{\gamma_1,...,\gamma_k\}$ care etichetează punctele finale ale dem r_1.

a) Dacă $\{\gamma_1,\dots,\gamma_p\}\subseteq C$, atunci r_1 este totodată r_1-dem g.a pentru C. Similar, dacă mulţimea clauzelor care etichetează punctele finale ale r_2, r_2 este r_2-dem g.a pentru C.

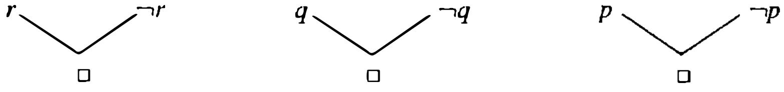
b) Dacă $\{\gamma_1,\dots,\gamma_p\}$ nu este inclusă în C, atunci fie $\{\gamma_1,\dots,\gamma_q\}$ o submulţime a mulţimii $\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}$, care etichetează punctele finale ale r_1-dem. Aşadar, $\beta\notin C$ şi β etichetează vreun punct final din r_2 (căci în caz contrar clauzele care etichetează punctele finale din r_2 ar fi în C). Fie r_1^*-dem g.a obţinută din r_1-dem g.a prin înlocuirea $\gamma_1,\dots,\gamma_q$ prin $\{\gamma_1,\beta\},\dots,\{\gamma_q,\beta\}$ cu păstrearea în r_1^*-dem g.a a aceloraşi r-paşi ca în r_1-dem g.a. Obţinem astfel fie o r-dem g.a, fie o rezoluţie în care clauza β este eticheta punctului din origine.

În cel din urmă caz, fiindcă $\beta\notin C$ iar r_1^* nu este o r-dem g.a, originea r_1^*-dem este etichetată cu β şi nici un punct final din r_1^* nu are eticheta β. Construcţia unei r-dem g.a pentru o submulţime a mulţimii $\{\Gamma,\{\alpha_1,\beta\},\dots,\{\alpha_n,\beta\}\}$ se face prin combinarea r_1^* şi r_2 astfel: se identifică originea etichetată cu β în r_1^* cu punctul final etichetat cu β în r_2 şi se identifică toate punctele finale u, v (unde $u\in r_1^*$ iar $v\in r_2$) ddacă u şi v sunt etichetate cu aceeaşi clauză.

Exemplu. Fie $C=\{(\neg p\vee\neg q),(q\vee\neg r),(q\vee r),p\}$. Fie $\mathcal{T}$ următoarea demonstraţie în G^*:

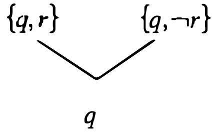
$$\dfrac{r,\neg r\rightarrow \qquad \dfrac{q,\neg q\rightarrow \qquad p,\neg p\rightarrow}{\neg p\vee\neg q,\ p,q\rightarrow}}{\{\neg p,\neg q\},\{q,\neg r\},\{q,r\},p\rightarrow}$$

Secvenţii din punctele finale pot fi redaţi, corespunzător, în următoarele rezoluţii g.a:



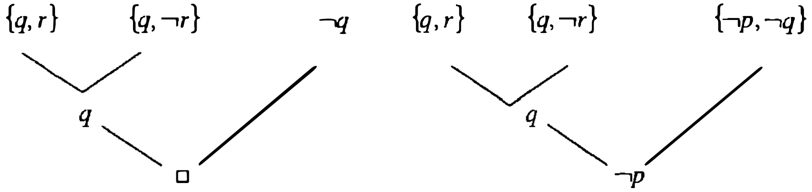
(1) (2) (3)

Fie (4) rezoluţia g.a obţinută din (1) prin adăugarea variabilei q la r şi $\neg r$ în rezoluţia g.a (1).



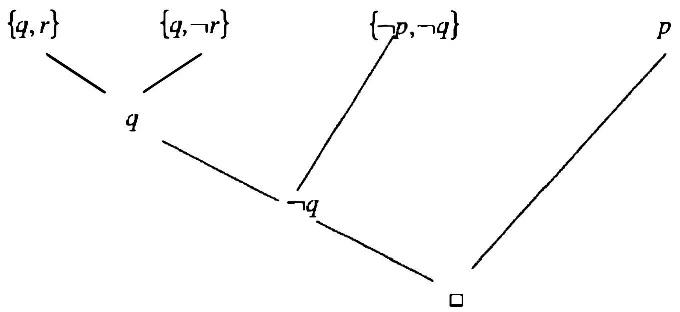
(4)

Acum, prin combinarea rezoluţiilor g.a.(4) şi (2) obţinem (5), iar prin adăugarea în (5) la $\neg q$ a variabilei $\neg p$ obţinem (6).



(5) (6)

În fine, (7) se obţine prin combinarea rezoluţiilor (6) şi (3):



Lema 1. Numărul r-paşilor în r-dem g.a este mai mic sau egal cu numărul axiomelor din $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Din 1 (din demonstrația teoremei de mai sus) *r*-dem g.a are un singur punct, etichetat cu o axiomă.

Din 2a, prin ipoteza inducției, numărul r-paşilor în r_1-dem g.a (respectiv r_2-dem g.a) este mai mic sau egal decât numărul punctelor finale ale lui $\mathcal{T}_1$ (respectiv $\mathcal{T}_2$) şi este deci mai mic decât numărul punctelor finale ale lui $\mathcal{T}$.

Din 2b, prin ipoteza inducției, numărul r-paşilor în r_1-dem g.a (şi deci în r_1^*-dem g.a), n_1, este mai mic sau egal cu numărul axiomelor din $\mathcal{T}_1$ şi numărul r-paşilor în r_2-dem g.a n_2 este mai mic sau egal cu numărul axiomelor din $\mathcal{T}_2$. În construcția r-dem g.a numărul r-paşilor este $n_1 + n_2$ şi care este mai mic sau egal cu numărul axiomelor din $\mathcal{T}$.

Lema 2. Dacă arborele demonstrativ $\mathcal{T}$ în G* *are m puncte, atunci numărul n al punctelor în r-dem g.a (din teorema de mai sus) este $r+1 \le n \le m+2$, unde r este numărul r-paşilor din r-dem g.a*

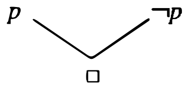
Demonstrație. Fie *k* numărul punctelor finale din $\mathcal{T}$. Atunci $m = 2k-1$, deoarece fiecare punct are doi succesori imediați. Numărul *r* al paşilor în r-dem g.a este mai mic sau egal cu numărul *k* al punctelor finale din $\mathcal{T}$. Însă $r+1 \le n \le 2r+1$, deoarece orice punct are cel mult doi succesori. Şi deci $n \le 2r+1 \le 2k+1 = m+2$.

Conversia r-demonstrațiilor g.a în G* -demonstrații

Teoremă. Orice r-demonstrație g.a se poate converti într-o G* *-demonstrație.*

Demonstrație (prin inducție pe numărul paşilor din r-dem g.a).

1. Dacă r-dem g.a are un singur pas, atunci ea are forma



Şi deci mulțimea $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ conține cel puțin un literal şi negația lui. Şi astfel arborele demonstrativ în G* este axioma $C_1, \ldots, C_m \rightarrow$.

2. Dacă r-dem g.a are mai mult decât un pas, atunci ea este un graf orientat aciclic $(\mathcal{T}, R)$ cu originea □. Şi deci succesorii n_1 şi n_2 ai originii *o* sunt etichete cu clauzele $\{p\}$, $\{\neg p\}$, unde *p* este un simbol propozițional oarecare. Sunt posibile următoarele două cazuri:

a) Unul dintre punctele n_1, n_2 este un punct final, fie acesta n_1 (cazul celălalt se tratează similar). Presupunem că $C_1 = \{p\}$. Fie $\{\alpha_1, \neg p\}, \ldots, \{\alpha_n, \neg p\}$ punctele finale ale tuturor drumurilor de la punctul n_2, astfel încât orice punct, în fiecare din aceste drumuri, conține

$\neg p$. Fie r_2-dem g.a obținută ștergând originea o și n_1, plus toate muchiile care pleacă din aceste puncte, și ștergând $\neg p$ din orice drum din n_2 în care $\neg p$ apare în fiecare punct. Originea r_2-dem g.a este □.

Prin ipoteza inducției, există un arbore demonstrativ $\mathcal{T}_2$ în G* pentru secventul $\Gamma, \alpha_1, ..., \alpha_n \to$ unde $\Gamma = \{C_2, ..., C_m\} - \{\{\alpha_1, \neg p\}, ..., \{\alpha_n, \neg p\}\}$.

Dacă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ este o submulțime a lui Γ, atunci arborele obținut din $\mathcal{T}_2$ înlocuind Γ prin $\{C_1, ..., C_m\}$ este, de asemenea, un arbore demonstrativ. Prin ipoteza inducției, numărul punctelor finale k din $\mathcal{T}_2$ este mai mic sau egal cu numărul pașilor în r_2-dem g.a, care este mai mic decât numărul pașilor în r-dem g.a.

Dacă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ nu este o submulțime a lui Γ, atunci un arbore demonstrativ $\mathcal{T}$ pentru secventul $C_1, ..., C_m \to$ arată astfel:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma, \alpha_1, ..., \alpha_n \to} \qquad\qquad p, \neg p \to}{p, \Gamma, \{\alpha_1, \neg p\}, ..., \{\alpha_n, \neg p\} \to}$$

Numărul axiomelor în $\mathcal{T}$ este $k - 1 + 1 = k$, care este mai mic sau egal cu numărul r-pașilor în r-dem g.a. Dacă $\Gamma, \alpha_1, ..., \alpha_n \to$ este o axiomă, atunci există o formulă în $\Gamma, \alpha_1, ..., \alpha_n$, conjugatul unei formule α_i. În acest caz $\mathcal{T}_2$ este axioma $\alpha_i, \neg\alpha_i \to$.

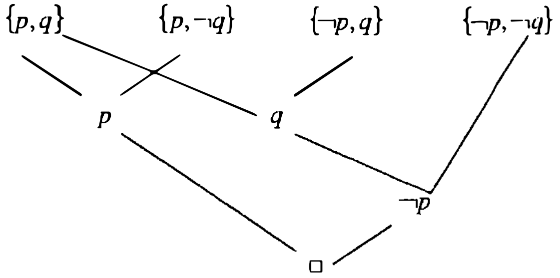
b) Nici unul din punctele n_1, n_2 nu este un punct final. Fie $\{\alpha_1, p\}, ..., \{\alpha_n, p\}$ mulțimea punctelor finale ale tuturor drumurilor de la punctul n_1, astfel că orice punct, în fiecare din aceste drumuri, conține p. Fie r_1-dem g.a care constă din succesorii punctului n_1 (inclusiv) și care se obține prin ștergerea lui p din orice punct, din orice drum din n_1 în care fiecare punct conține p. Originea r_1-dem g.a este □. Prin ipoteza inducției există un arbore demonstrativ $\mathcal{T}_1$ în G* pentru secventul $\Gamma_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \to$, unde Γ_1 este o submulțime a lui $\{C_1, ..., C_m\}$. Prin ipoteza inducției numărul axiomelor din $\mathcal{T}_1$ este mai mic sau egal cu numărul m_1 al r-pașilor în r_1-dem g.a. Similar, fie r_2-dem g.a obținută prin ștergerea tuturor succesorilor lui n_1 care nu sunt succesorii lui n_2 și prin ștergerea tuturor muchiilor care pleacă din aceste puncte, inclusiv muchiile din n_1 (n_1 devenind astfel punct final). Prin ipoteza inducției există un arbore demonstrativ $\mathcal{T}_2$ în G* cu originea $\Gamma_2, p \to$, unde Γ_2 este o submulțime a mulțimii $\{C_1, ..., C_m\}$.

Dacă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ este o submulțime a lui Γ_1, atunci $\mathcal{T}_1$ este de asemenea o demonstrație pentru $\{C_1, ..., C_m\}$. Similar, dacă p aparține lui Γ_2, atunci $\mathcal{T}_2$ este o demonstrație pentru $\{C_1, ..., C_m\}$. În caz contrar, vom avea următorul arbore demonstrativ în G*.

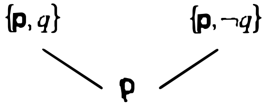
$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_1}{\Gamma_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \to} \qquad\qquad \dfrac{\mathcal{T}_2}{\Gamma_2, p \to}}{\Gamma, \{\alpha_1, p\}, ..., \{\alpha_n, p\} \to}$$

În cazul în care $\Gamma_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \rightarrow$ sau $\Gamma_2, p \rightarrow$ este o axiomă, procedăm ca la a).

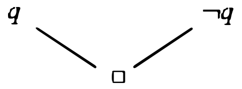
Exemplu.
Fie r următoarea rezoluție.



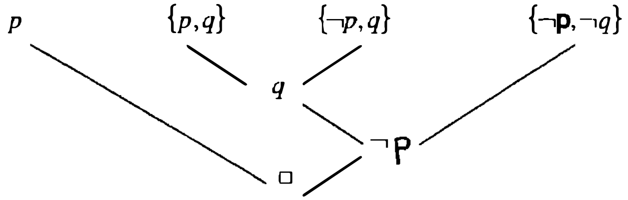
Fie r_1 mulțimea succesorilor lui p:



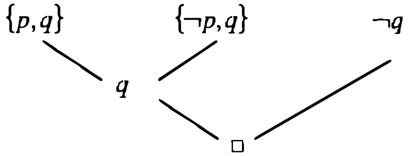
Fie r_2 rezoluția obținută prin ștergerea lui p:



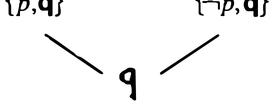
Fie r_3 -dem g.a obținută din r prin ștergerea succesorilor lui p, care nu sunt succesori ai lui $\neg p$. Fiindcă $\{p, q\}$ este un succesor al lui $\neg p$, este păstrat. Însă $\{p, \neg q\}$ este șters.



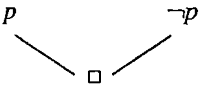
Fie r_4 rezoluția obținută ștergând $\neg p$ din toate drumurile de la $\neg p$ care-l conțin:



Fie r_5 mulțimea succesorilor lui q:



Fie r_6 rezoluția obținută din r_5 ștergându-l pe q:



Iată acum arborii demonstrativi corespunzători:

$\mathcal{T}_1$: $\quad q, \neg q \to \qquad$ (coresp. lui r_2)

$$\mathcal{T}_2: \dfrac{q, \neg q \to \qquad p, \neg p \to}{\{p,q\},\ \{\neg p, q\},\ \neg q \to} \qquad \text{(coresp. lui } r_4\text{)}$$

$$\mathcal{T}_3: \dfrac{\dfrac{q, \neg q \to \qquad p, \neg p \to}{\{p,q\},\ \{\neg p, q\},\ \neg q \to} \qquad p, \neg p \to}{p,\ \{p,q\},\ \{\neg p, q\},\ \{\neg p, \neg q\} \to} \qquad \text{(coresp. lui } r_3\text{)}$$

$$\mathcal{T}_4: \dfrac{q, \neg q \to \qquad \dfrac{\dfrac{q, \neg q \to \qquad p, \neg p \to}{\{p,q\},\ \{\neg p, q\},\ \neg q \to} \qquad p, \neg p \to}{p,\ \{p,q\},\ \{\neg p, q\},\ \{\neg p, \neg q\} \to}}{\{p,q\},\ \{p, \neg q\},\ \{\neg p, q\},\ \{\neg p, \neg q\} \to} \qquad \text{(coresp. lui } r\text{)}$$

2.6.3. Corectitudinea şi completitudinea metodei rezoluţiei

Teorema corectitudinii. *Dacă o mulţime C de clauze are o r-dem g.a, atunci C este nesatisfiabilă.*

Demonstraţie. Fie $(\mathcal{T}_1, R_1)$ o r-dem g.a pentru C. Mulţimea C' de clauze care etichetează punctele finale ale lui $\mathcal{T}_1$ este o submulţime a lui C.

Proprietate: Într-o r-dem g.a $(\mathcal{T}, R)$ mulţimea clauzelor C' care etichetează punctele finale ale lui $\mathcal{T}$ este echivalentă cu mulţimea clauzelor care etichetează toate punctele din $\mathcal{T}$.

Demonstraţie (inducţie pe numărul punctelor din $(\mathcal{T}, R)$).

Rezultatul este imediat dacă $\mathcal{T}$ are un singur punct. Dacă $\mathcal{T}$ are mai mult decât un punct, fie $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_d$ subarborele stâng, respectiv drept al lui $\mathcal{T}$. Prin ipoteza inducţiei, mulţimea C_s de clauze, care etichetează punctele lui $\mathcal{T}_s$, este echivalentă cu mulţimea S de clauze care etichetează punctele finale ale lui $\mathcal{T}_s$. Iar mulţimea $\mathcal{D}_s$ de clauze care etichetează punctele lui $\mathcal{T}_d$ este echivalentă cu mulţimea $\mathcal{D}$ de clauze care etichetează punctele finale ale lui $\mathcal{T}_d$. Fie C_1 şi C_2 clauzele care etichetează originea lui $\mathcal{T}_s$, respectiv $\mathcal{T}_d$. Prin definiţia rezoluţiei g.a, originea lui $\mathcal{T}$ este o rezolventă R a lui C_1 şi C_2. Însă mulţimea $C_s \cup C_d$ este echivalentă cu mulţimea $C_s \cup C_d \cup \{R\}$ (cf. 2.6.1). În acest fel însă $C_s \cup C_d \cup \{R\}$ este echivalentă cu $C' = S \cup \mathcal{D}$, deoarece $C_s \cup C_d$ este echivalentă cu $S \cup \mathcal{D}$.

Demonstrația teoremei corectitudinii o vom face aplicând proprietatea de mai sus la $\mathcal{T}_1$. Mulțimea C' este echivalentă cu mulțimea clauzelor care etichetează toate punctele din $\mathcal{T}_1$. Fiindcă rezolventa care etichetează originea lui $\mathcal{T}_1$ este $\square$, mulțimea C' de clauze care etichetează punctele finale ale lui $\mathcal{T}_1$ este nesatisfiabilă. Fiindcă $C' \subseteq C$, rezultă că C este nesatisfiabilă.

Teorema completitudinii. *Fie C o mulțime finită de clauze. Dacă C este nesatisfiabilă, atunci există o r-dem g.a pentru C.*

Demonstrație. Prin teorema de completitudine a sistemului G^* există un arbore demonstrativ $\mathcal{T}$ pentru $C \rightarrow$ (secvent valid!). Însă, cum orice G^*-dem se poate converti într-o r-dem g.a, rezultă că există o r-dem g.a pentru C.

Capitolul 3

Logica clasică a predicatelor ($\mathcal{L}_P$)

3.1. Sintaxa şi semantica $\mathcal{L}_P$

3.1.1. Sintaxa $\mathcal{L}_P$

Logica clasică a predicatelor[1] este logica de ordinul întâi *aşa cum este ea explicitată într-un limbaj de ordinul întâi.* Iar limbajul pe care îl elaborăm în acest sens depinde de ce anume *vrem să facem* cu acest limbaj. Mai general, depinde de ce anume înţelegem a fi menirea (destinaţia) unei logici de ordinul întâi. Să consemnăm câteva opinii.

> „În cartea de faţă trebuie tratată logica clasică a predicatelor. Această parte fundamentală a logicii, raportată la totalitatea teoriilor logice, poate fi comparată cu poziţia calculului infinitezimal în raport cu întreaga analiză. Logica predicatelor este suficientă (într-un alt mod decât silogistica aristotelică) pentru construcţia teoriilor matematice. Tocmai am constatat că logica cercetează conexiunea care există între axiomele şi teoremele teoriilor matematice. Logica tratează aşadar despre enunţurile teoriilor matematice (aşa cum geometria tratează despre puncte, drepte şi plane, iar analiza despre numere şi funcţii). Întrucât logica vorbeşte despre enunţurile matematicii, ea se mai numeşte şi *metamatematică*" [2].

Fireşte, logica nu tratează exclusiv tema demonstraţiilor în teoriile *matematice*, căci demonstraţii şi argumentări există şi în alte domenii ştiinţifice, chiar şi în viaţa de toate zilele. Însă ele nu ating rigurozitatea demonstraţiilor matematice. Iar sub aspectul conţinutului lor logic sunt mult mai greu de sesizat.

> „În starea actuală a dezvoltării ştiinţelor matematica rămâne în continuare câmpul aplicării logicii, *par excellence*" [3].

Cum matematica reprezintă „*par excellence*" domeniul aplicării logicii, în acest caz, limbajul aferent logicii va conţine în mod necesar şi simbolul „=".

Dacă vrem să vorbim despre inele, atunci mulţimea simbolurilor pentru constante va trebui să conţină un simbol pentru „zero". Limbajul astfel elaborat poartă aşadar amprenta intenţiei.

> „Dorim să construim limbaje formale în care să putem formula, spre exemplu, axiomele, teoremele şi demonstraţiile despre grupuri şi despre relaţiile de echivalenţă. [...] În acest context, conectivele, cuantificatorii şi relaţia de egalitate joacă un rol important. [...] La acestea vom adăuga variabile (pentru elementele grupurilor, elementele echivalenţei, structurilor, etc.) [...]."[4]

---

[1] Cunoscută şi sub numele de „Logica de ordinul întâi" sau „Teoria cuantificării", este logica în care singurele entităţi peste care se cuantifică sunt variabilele individuale.

[2] H. Hermes, *Einführung in die matematische Logik*, B.G. Teubner Verlagsgesell, Stuttgart 1963, 11.

[3] H. Hermes, *Einführung* ..., 11.

[4] H.D. Ebbinghauss, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Sec. ed., Springer 1994, 13-14.

Şi exemplele ar putea continua [5].

Prezentăm în cele ce urmează un limbaj în mare parte simplificat, pretabil însă la metamorfoze intenţionale foarte variate.

Alfabetul $\mathcal{L}_P$ (lista de simboluri).

1. Simboluri pentru operatorii $\mathcal{L}_p$: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, /, \downarrow$.
2. Simboluri pentru cuantificatori: $\forall$ („pentru orice" – cuantificatorul universal).
   $\exists$ („există" – cuantificatorul existenţial).
3. Simboluri pentru variabilele individuale: $x, y, z,...$ (cu sau fără indici).
4. Simboluri auxiliare:), (,], [, }, {.
5. Simboluri pentru predicate (predicative): P, Q, R,... (cu sau fără indici).
6. Simboluri pentru funcţii (funcţionale): f, g, h,... (cu sau fără indici).
7. Simboluri pentru constante: a, b, c,... (cu sau fără indici).

Dacă elementele 1-4 sunt comune oricărui limbaj de ordinul întâi, 5-7 deosebesc un limbaj de altul. Mulţimea de simboluri pentru predicate, R, poate fi finită sau infinit numărabilă. Mulţimile de simboluri pentru funcţii, F, şi pentru constante, C, pot fi vide, finite sau infinit numărabile. Fie $\mathcal{L}_P = \{R \cup F \cup C\}$ [6].

Definiţia 1. Un limbaj de ordinul întâi, $\mathcal{L}_P$, este complet determinat prin specificarea mulţimilor R, F, C.

Definiţia 2. Fie $\mathcal{T}$ mulţimea termenilor limbajului $\mathcal{L}_P$ de ordinul întâi [7]. Atunci:

a) Orice variabilă individuală [8] aparţine lui $\mathcal{T}$.

b) Orice constantă aparţine lui $\mathcal{T}$.

c) Dacă f este un simbol funcţional n-ar, iar $t_1,...,t_n \in \mathcal{T}$, atunci $f(t_1,...,t_n) \in \mathcal{T}$.

Definiţia 3. Dacă un termen nu conţine nici o variabilă, atunci este un termen închis.

Definiţia 4. O formulă F a limbajului $\mathcal{L}_P$ se numeşte elementară dacă este o expresie de forma $R(t_1,...,t_n)$, unde R este un simbol predicativ n-adic iar $t_1,...,t_n$ sunt termeni din $\mathcal{T}$.

Remarcă. Diferenţa *monadic* ($P(x_1)$), *diadic* ($P(x_1, x_2)$), ..., n-adic ($P(x_1,...,x_n)$) ($n \geq 1$) rezidă strict în numărul argumentelor predicatului *. Drept argumente pot funcţiona nu numai variabile, ci şi constante sau expresii funcţionale (adică orice termen).

Definiţia 5. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea formulelor limbajului $\mathcal{L}_P$. Atunci:

a) Orice formulă elementară a $\mathcal{L}_P$ este formulă a $\mathcal{L}_P$.

b) Dacă α este o formulă a $\mathcal{L}_P$, atunci $\neg\alpha$ este formulă a $\mathcal{L}_P$.

c) Pentru orice operator logic binar $\circ$ al $\mathcal{L}_p$ [9], dacă α şi β sunt formule ale $\mathcal{L}_P$, atunci $\alpha \circ \beta$ este formulă a $\mathcal{L}_P$.

---

[5] Ideea explicitării $\mathcal{L}_P$ în variate moduri (i.e. limbaje) nu trebuie confundată cu distincţia *limbaj obiect – metalimbaj*. Limbajul în care $\mathcal{L}_P$ este elaborată este *limbajul obiect* al acestei logici, iar limbajul *în care vorbim despre* limbajul obiect este *metalimbajul*.

[6] Cu „ $\mathcal{L}_P$ " vom desemna în continuare, similar $\mathcal{L}_p$, atât logica predicatelor de ordinul întâi cât şi limbajul aferent, semnificaţia expresiei rezultând de fiecare dată din contextul utilizării ei.

[7] În cele ce urmează prin „ $\mathcal{L}_P$ " vom înţelege *strict* un limbaj de ordinul întâi.

[8] Întrucât operăm cu o singură categorie de variabile, cele individuale, în cele ce urmează prin „variabilă" vom înţelege o variabilă individuală.

* Uneori numărul argumentelor va fi indicat doar printr-un indice superior, R^n.

[9] Oricare din operatorii menţionaţi în lista de simboluri.

d) Dacă α este o formulă a $\mathcal{L}_P$ iar x este o variabilă, atunci $\forall x\alpha$ şi $\exists x\alpha$ sunt formule ale $\mathcal{L}_P$.

Exemple de formule: $P(x)$, $\neg Q(a, y)$, $Q(x) \wedge R(x, y)$, $\forall x \exists y R(f(x, y), z)$ etc.

Să luăm acum următoarea formulă a $\mathcal{L}_P$: $P(x, y) \supset \exists x \forall y Q(x, y, z)$.

Unele variabile, x şi y în consecventul implicaţiei, sunt „acoperite" de cuantificatorii respectivi, $\exists$ şi $\forall$. Fiecare dintre ele are două ocurenţe (apariţii), una ca argument al predicatului Q, iar cealaltă ca simbol care succede imediat cuantificatorului respectiv. x, de exemplu, primul argument al lui Q, mai apare după $\exists$. În acest caz vorbim despre ocurenţele *legate* ale variabilei x prin cuantificatorul $\exists$ (în consecventul implicaţiei). La fel putem vorbi despre variabila y din consecvent, variabilă legată prin cuantificatorul $\forall$, în cele două ocurenţe ale sale.

În schimb, x şi y din antecedentul formulei şi z din consecvent sunt ocurenţe *libere* ale variabilelor respective. După cum ne arată acest exemplu, o variabilă poate să aibe atât ocurenţe libere cât şi legate în aceeaşi formulă.

Definiţia 6. O ocurenţă a unei variabile x este legată într-o formulă dacă ea este variabila unui cuantificator, $\forall x$ sau $\exists x$, sau este în domeniul unui cuantificator, $\forall x$ sau $\exists x$, în formula considerată. În caz contrar, ocurenţa se numeşte liberă.

Definiţia 7. O variabilă se numeşte legată/liberă într-o formulă dacă are cel puţin o ocurenţă legată/liberă în formula dată.

Definiţia 8. O formulă α se numeşte închisă (propoziţie) dacă nu conţine nici o variabilă liberă.

Substituţia în $\mathcal{L}_P$

Definiţia 9. Substituţia este o funcţie σ de la mulţimea variabilelor la mulţimea termenilor.

Simbolic: $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$, unde $\mathcal{V}$ este mulţimea variabilelor.

Deşi substituţiile sunt funcţii pe variabile, ele pot fi extinse la orice *termen*.

Definiţia 10. Fie σ o substituţie. Atunci:

1. $\sigma(c) = c$
2. $\sigma(f(t_1,\ldots,t_n)) = f(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n))$,

unde $\sigma(t_i)$ sunt, la rândul lor, termeni. Putem spune deci că aplicarea funcţiei σ asupra unui termen generează un alt termen.

Similar, funcţia σ poate fi aplicată şi formulelor $\mathcal{L}_P$. În acest caz aplicarea este mai complicată, deoarece o formulă poate conţine atât variabile libere cât şi variabile legate, iar substituţia nu trebuie să afecteze ocurenţele variabilelor legate.

Definiţia 11. Fie σ o substituţie. Prin σ_x vom înţelege o substituţie ca substituţia σ, exceptând faptul că nu schimbă variabila x. Adică, pentru orice variabilă y :

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} \sigma(y), \text{dacă } y \neq x \\ x, \text{dacă } y = x \end{cases}$$

Definiţia 12. Fie σ o substituţie. Atunci:

1. $\sigma(R(t_1,\ldots,t_n)) = R(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n))$.
2. $\sigma(\neg\alpha) = \neg(\sigma(\alpha))$
3. $\sigma(\alpha \circ \beta) = (\sigma(\alpha) \circ \sigma(\beta))$
4. $\sigma(\forall x\alpha) = \forall x(\sigma_x(\alpha))$

5. $\sigma(\exists x\alpha) = \exists x(\sigma_x(\alpha))$

Exemplu: Fie următoarea formulă a $\mathcal{L}_P : \forall x P(x,y)$. Fie $\sigma(x) = a$ şi $\sigma(y) = b$. Atunci $\sigma(\forall x P(x,y)) = \forall x(\sigma_x P(x,y)) = \forall x P(x,b)$.

Definiţia 13. Fie α o formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$ iar t un termen. Atunci t este liber pentru variabila x_i din formula α dacă nici o ocurenţă liberă a lui x_i din α nu se află în domeniul vreunui cuantificator $\forall x_j$ sau $\exists x_j$, unde x_j este o variabilă din t.

Exemplu. Fie termenul $f(x_1, x_2)$ şi formulele $\alpha : \forall x_3 P(x_1, x_2, x_3) \supset \exists x_3 Q x_3$ şi $\beta : \forall x_2 Q(x_1, x_2)$. În formula α termenul $f(x_1, x_2)$ este liber pentru x_1, de exemplu, nu însă şi în formula β, pentru x_1. Pentru că, în acest din urmă caz, variabila x_2 din $f(x_1, x_2)$ cade sub „acoperirea” cuantificatorului universal $\forall x_2$ şi devine astfel variabilă *legată.*

Remarcă 1. Dacă un termen nu conţine nici o variabilă, atunci el este liber pentru orice variabilă în orice formulă.

Remarcă 2. Într-o formulă α un termen este liber pentru orice variabilă dacă nici una din variabilele lui *t* nu este legată în α (construiţi un exemplu).

3.1.2. Semantica $\mathcal{L}_P$

În paragraful precedent, *Sintaxa* $\mathcal{L}_P$, am utilizat câteva concepte ca „termen”, „formulă”, „variabilă liberă” etc., concepte care implică doar proprietăţile gramaticale ale şirurilor de simboluri. Acestea erau concepte *sintactice.* Conceptele la care ne vom opri în cele ce urmează depind de *semnificaţia* şirurilor de simboluri. Acestea sunt concepte semantice, concepte operante doar prin *interpretare.*

Dacă în logica propoziţiilor a interpreta o formulă înseamnă a asigna valori de adevăr variabilelor ei propoziţionale, în $\mathcal{L}_P$ interpretarea vizează mai multe categorii sintactice. Mai precis, a elabora o semantică pentru $\mathcal{L}_P$ înseamnă a atribui semnificaţie simbolurilor *predicative*, simbolurilor *funcţionale* şi celor pentru *constante.* La interpretarea acestor simboluri se adaugă existenţa unui domeniu nevid de elemente, Ω, implicat de prezenţa cuantificatorilor. Aceste două determinaţii, domeniul şi interpretarea, laolaltă, alcătuiesc un *model* pentru limbajul $\mathcal{L}_P$.

Definiţia 1. Un model pentru limbajul $\mathcal{L}_P$ este un dublet $M = \langle \Omega, \iota \rangle$, unde:

1. Ω este o mulţime nevidă, numită domeniul lui M.

2. ι este o funcţie, numită interpretare, prin care

a) oricărui simbol predicativ n-adic R^n i se asociază o relaţie n-adică $\iota(R^n) \subseteq \Omega^n$. În loc de $\iota(R^n)$ vom scrie, simplu, R^ι.

b) oricărui simbol funcţional n-ar f^n i se asociază o funcţie $\iota(f^n)$ pe Ω, astfel: $f^\iota : \Omega^n \to \Omega$.

c) oricărei constante a_i i se asociază un element a^ι din Ω.

În fine, fiindcă formulele $\mathcal{L}_P$ pot conţine variabile libere, va trebui să interpretăm şi aceste simboluri. Interpretarea unei variabile libere este dată prin funcţia *asignare*.

Definiţia 2. Asignarea într-un model M este o funcţie μ de la mulţimea variabilelor la domeniul Ω. Simbolic: $\mu : V \to \Omega$.

Dacă dispunem de o interpretare şi o asignare, aşa cum au fost mai sus definite, atunci valoarea oricărui termen poate fi calculată. Adică, dat fiind un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ şi o asignare μ, fiecărui termen t i se asociază o valoare $t^{\iota,\mu}$, astfel:

1. *pentru orice simbol constantă:* $c^{\iota,\mu} = c^{\iota}$

2. *pentru orice variabilă x:* $x^{\iota,\mu} = x^{\mu}$

3. *pentru orice simbol funcțional* f : $(f(t_1,...,t_n))^{\iota,\mu} = f^{\iota}(t_1^{\iota,\mu},...,t_n^{\iota,\mu})$

Remarcă. Dacă un termen este închis, atunci *valoarea* lui nu depinde de asignări.

Definiția 3. Fie x o variabilă iar μ și ν două asignări în M. μ și ν se numesc x-variante (x-alternative) dacă μ și ν asignează aceleași valori oricărei variabile cu excepția posibilă a lui x.

Definiția 4. Fie $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ *un model pentru limbajul* $\mathcal{L}_P$ *iar* μ *o asignare în acest model. Fiecărei formule* α *îi asociem o valoare de adevăr* $[\alpha]^{\iota,\mu}$, *1 sau 0, astfel:*

1. $[R(t_1,...,t_n)]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle t_1^{\iota,\mu},...,t_n^{\iota,\mu} \rangle \in R^{\iota}$, unde $R(t_1,...,t_n)$ *este o formulă elementară.*

Exemplu. Fie $\Omega = \{1,2,3\}$. Prin Ω^2 vom înțelege mulțimea tuturor cuplurilor de elemente, care pot fi construite cu elementele din Ω. Adică
$\Omega^2 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

Dacă prin R^{ι} vom înțelege relația „<" (mai mic decât), atunci *identificăm pe* R^{ι} *cu o submulțime din* Ω^2 *a acelor perechi ordonate pentru care relația specificată are loc, respectiv* $R^{\iota} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

Fie acum, drept exemplu, formula elementară $R(x_1, x_2)$. Atunci $[R(x_1,x_2)]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_1^{\iota,\mu}, x_2^{\iota,\mu}\rangle \in R^{\iota}$. Însă $x_1^{\iota,\mu} = x_1^{\mu}$ iar $x_2^{\iota,\mu} = x_2^{\mu}$.

Deci $[R(x_1,x_2)]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_1^{\mu}, x_2^{\mu}\rangle \in R^{\iota}$. Fie $x_1^{\mu} = 2$ și $x_2^{\mu} = 3$. În acest caz $\langle 2,3\rangle \in R^{\iota}$.

2. $[\neg\alpha]^{\iota,\mu} = \neg[\alpha]^{\iota,\mu}$

3. $[\alpha \circ \beta]^{\iota,\mu} = ([\alpha]^{\iota,\mu} \circ [\beta]^{\iota,\mu})$

4. $[\forall x\alpha]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare ν în M, care este x-variantă a lui μ.

5. $[\exists x\alpha]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *cel puțin* o asignare ν în M, care este x-variantă a lui μ.

Remarcă 1. Chiar dacă 4 și 5 nu sunt, la prima vedere, foarte intuitive, ele conservă riguros conceptul intuitiv al adevărului unei formule cuantificate universal / existențial.
Să dăm un exemplu:

4. $[\forall xP(x)]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[P(x)]^{\iota,\nu} = 1$ pentru orice asignare ν (x-variantă a lui μ).

4^*. O formulă cuantificată universal, $\forall xP(x)$, este adevărată dacă și numai dacă predicatul desemnat de simbolul P revine tuturor obiectelor mulțimii Ω; falsă dacă există cel puțin un obiect căruia acest predicat nu-i revine.

Vom arăta, simplu, că cele două definiții, cea perfect intuitivă (4^*) și cea formală (4) sunt echivalente.

1. Presupunem că formula $\forall xP(x)$ este adevărată (în acord cu 4^*). În acest caz, P^{ι} (i.e. P interpretat, adică predicatul *desemnat* de simbolul P) revine tuturor obiectelor din Ω (altfel spus, toate obiectele din Ω cad sub conceptul P). Și deci $[P(x)]^{\iota,\mu} = 1$, indiferent de asignarea μ, așadar $[P(x)]^{\iota,\nu} = 1$ pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ) (adică valoarea asignată lui x este indiferentă).
2. *Reciproc.* Să presupunem acum că pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ) are loc $[P(x)]^{\iota,\nu} = 1$. Aceasta înseamnă că P^{ι} revine *tuturor* obiectelor din Ω. (Căci dacă ar

exista un obiect a[10] căruia nu-i revine P^ι, atunci ar exista o asignare ν (x-variantă a lui μ) astfel că $x^\nu = a$ şi deci $[P(x)]^{\iota,\nu} = 0$. Aşadar, $\forall x P(x)$ este adevărată.

Pentru $\exists x \alpha$ argumentăm similar.

Remarcă 2. Dacă formula α nu conţine variabile *libere*, atunci valoarea ei de adevăr nu depinde de nici o asignare, similar valorii unui termen care nu conţine variabile libere. În ambele cazuri, conform definiţiilor, vorbim despre expresii închise. Să exemplificăm acum conţinutul acestei remarci.

1. *Pentru termeni.*

Fie termenul *deschis* $t = f(a_1, y)$. În acest caz $[f(a_1, y)]^{\iota,\mu} = f^\iota(a_1^{\iota,\mu}, y^{\iota,\mu}) = f^\iota(a_1^\iota, y^\mu)$. Calcularea valorii acestui termen depinde simultan de funcţiile ι şi μ.

Dacă $\Omega = Z^+$ (mulţimea întregilor pozitivi), $f^\iota = \times$ (înmulţire), $a_1^\iota = 7$ iar $y^\mu = 5$, atunci $f^\iota(a_1^\iota, y^\mu) = \times(7,5) = (7 \times 5) = 35$.

Fie acum termenul *închis* $t = g(c_1, c_2)$, unde c_1, c_2 sunt constante. În acest caz $[g(c_1, c_2)]^{\iota,\mu}$ *nu* depinde de funcţia μ (exerciţiu).

2. *Pentru formule*

a) Fie $R(x, y)$ o formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$. Fie $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ un model pentru $\mathcal{L}_P$, fie μ o asignare în M.

Specificăm modelul M, specificând domeniul său Ω şi funcţia ι, respectiv $M = \langle Z^+, \leq \rangle$. Aşadar, R^ι înseamnă relaţia „$\leq$" (mai mic sau egal decât), definită pe mulţimea întregilor pozitivi. În această interpretare formula $R(x, y)$ devine, simplu, $x \leq y$. Evident, este o formulă *deschisă* a lui $\mathcal{L}_P$, valoarea ei de adevăr fiind astfel relativă la asignările făcute variabilelor libere x şi y:

1. dacă $x^\mu = 7$ şi $y^\mu = 12$, atunci obţinem propoziţia *adevărată* $7 \leq 12$.
2. dacă $x^\mu = 4$ şi $y^\mu = 2$, atunci obţinem propoziţia *falsă* $4 \leq 2$.

b) Fie acum formula $\forall y R(x, y)$. Este această formulă adevărată sau falsă în modelul de mai sus $M = \langle Z^+, \leq \rangle$?

Întrucât formula este *deschisă* (conţine variabila liberă x) adevărul ei depinde în continuare de asignările făcute lui x. În acest caz y este o variabilă legată şi deci valoarea formulei nu depinde de această variabilă. Acest fapt rezultă şi din „lectura" formulei în modelul M considerat: „Pentru orice întreg pozitiv y, x este mai mic sau egal cu y", echivalent „x este cel mai mic întreg pozitiv". Această din urmă formulare arată clar că adevărul formulei $\forall y R(x, y)$ în M nu depinde de variabila legată y, pentru că în această formulare y nici nu apare. Dar valoarea logică a propoziţiei „x este cel mai mic întreg pozitiv" depinde de asignarea făcută lui x şi este o propoziţie adevărată doar dacă $x^\mu = 1$.

c) Fie acum formula $\exists x \forall y R(x, y)$.

În M aceasta este o *propoziţie* adevărată (i.e. formulă închisă adevărată). Adevărul ei nu depinde de nici o asignare făcută variabilelor x şi y, căci ceea ce formula spune în $M = \langle Z^+, \leq \rangle$ este următorul adevăr: „există cel mai mic întreg pozitiv".

[10] Când specificarea obiectelor din Ω este irelevantă, ele vor fi menţionate, simplu, ca obiecte *a, b, c,...*, fără riscul unei confuzii cu mulţimea constantelor logice.

Lemă. Dacă μ_1 și μ_2 sunt x-variante, iar $x^{\mu_1} = y^{\mu_2}$, atunci $[\alpha(x)]^{\iota,\mu_1} \equiv [\alpha(x/y)]^{\iota,\mu_2}$, unde $\alpha(x)$ este o formulă arbitrară α a $\mathcal{L}_P$, care conține variabila liberă x iar $\alpha(x/y)$ este formula obținută din $\alpha(x)$ prin substituția lui x cu y.

Demonstrație (inducție pe gradul m al formulei $\alpha(x)$).

1. $m = 0$. Atunci $\alpha(x)$ are forma $P(x,z)$ și deci are loc: $[P(x,z)]^{\iota,\mu_1} = 1$ ddacă $\langle x^{\mu_1}, z^{\mu_1}\rangle \in P^{\iota}$, iar pentru că $y^{\mu_2} = x^{\mu_1}$ și $z^{\mu_2} = z^{\mu_1}$, ddacă $\langle y^{\mu_2}, z^{\mu_2}\rangle \in P^{\iota}$ ddacă $[P(y,z)]^{\iota,\mu_2} = 1$.

2. $\alpha(x)$ are forma $\forall z\beta(z,x)$; $z \neq x$. Dacă $[\forall z\beta(z,x)]^{\iota,\mu_1} = 0$, atunci există o z-variantă ν_1 a lui μ_1, astfel că $[\beta(z,x)]^{\iota,\nu_1} = 0$.

a) Presupunem că $z \neq y$. În acest caz punem ν_2 o z-variantă a lui μ_2 și $z^{\nu_2} = z^{\nu_1}$. Atunci au loc: ν_2 este o y-variantă a lui ν_1 și $y^{\nu_2} = x^{\nu_1}$. Și astfel, $[\beta(z,x/y)]^{\iota,\nu_2} = [\beta(z,x)]^{\iota,\nu_1} = 0$ (prin ipoteza inducției). Iar pentru că ν_2 este o z-variantă a lui μ_2 avem și $[\forall z\beta(z,x/y)]^{\iota,\mu_2} = 0$.

b) Presupunem că $z = y$. În acest caz $\alpha(x/y)$ este o formulă $\forall z^*\beta(z/z^*, x/y)$, unde z^* este o variabilă nouă. Punem acum ν_2 o y și z^* variantă a lui ν_1, $y^{\nu_1} = x^{\nu_1}$ și $z^{*\nu_2} = z^{\nu_1}$. Prin ipoteza inducției avem: $[\beta(z/z^*, x/y)]^{\nu_2} = [\beta(z,x)]^{\iota,\nu_1} = 0$. Iar pentru că ν_2 este o z^* variantă a lui μ_2, are loc și $[\forall z^*\beta(z/z^*, x/y)]^{\iota,\mu_2} = 0$.

Convers: Se raționează în mod similar de la $[\forall z^*\beta(z/z^*, x/y)]^{\iota,\mu_2} = 0$ la $[\forall z\beta(z,x)]^{\iota,\mu_1} = 0$.

Remarcă. Demonstrația lemei de mai sus este simplificată prin faptul că în α am considerat doar substituția lui x cu y; α poate conține însă n variabile distincte $x_1,\ldots,x_n$ pe care le substituim cu variabilele $y_1,\ldots,y_n$, astfel încât $x_i^{\mu_1} = y_i^{\mu_2}$ $(1 \le i \le n)$. Evident, și în acest caz, echivalența lemei are loc.

Definiția 5. O formulă α a limbajului $\mathcal{L}_P$ este adevărată într-un model $M = \langle \Omega, \iota\rangle$ dacă $\alpha^{\iota,\mu} = 1$ pentru orice asignare μ în M. În acest caz putem spune și: α este validă în $M = \langle \Omega, \iota\rangle$.

Definiția 6. O formulă α a limbajului $\mathcal{L}_P$ este satisfiabilă într-un model $M = \langle \Omega, \iota\rangle$ dacă $\alpha^{\iota,\mu} = 1$ pentru cel puțin o asignare μ în M.

Definiția 7. O formulă α a limbajului $\mathcal{L}_P$ este satisfiabilă dacă este satisfiabilă într-un model.

Definiția 8. O formulă α a limbajului $\mathcal{L}_P$ se numește validă dacă este adevărată în toate modelele limbajului $\mathcal{L}_P$. În acest caz putem spune și: α este universal validă.

Remarcă. Mai sus, am definit cele două funcții: substituția ($\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$) și asignarea ($\mu : \mathcal{V} \to \Omega$). Ambele funcții au același domeniu de definiție: mulțimea variabilelor. Însă despre domeniul Ω al unui model n-am făcut nici o presupoziție (în afara nevidității lui). N-am spus nimic despre „natura" elementelor lui. Ele pot fi orice, prin urmare Ω poate fi și mulțimea termenilor $\mathcal{T}$, ai unui limbaj $\mathcal{L}_P$. În acest caz, e ușor de văzut, asignările devin substituții și reciproc[11].

Definiția 9. Un model $M = \langle \Omega, \iota\rangle$ al limbajului $\mathcal{L}_P$ este un model Herbrand dacă:

---

[11] Dacă Ω nu este mulțimea termenilor închiși, atunci s-ar putea ca printr-o asignare în Ω făcută unei variabile să nu obținem o formulă a $\mathcal{L}_P$.

1. Ω este strict mulțimea termenilor închiși ai limbajului $\mathcal{L}_P$.

2. pentru orice termen închis t, $t^{\iota} = t$ (ι este aici funcția identitate).

Remarcă 1. Dacă $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ este un model Herbrand pentru $\mathcal{L}_P$, atunci următoarea identitate are loc: $t^{\iota,\mu} = (\mu(t))^{\iota}$, unde t este orice termen (deschis sau închis) iar $\mu(t)$ este $\sigma(t)$, adică în expresia $\mu(t)$ μ joacă rolul funcției substituție.

Argument (inducție)

a) $t = x$. Atunci $t^{\iota,\mu} = x^{\iota,\mu} = x^{\mu}$. Iar $(\mu(t))^{\iota} = (\mu(x))^{\iota} = \mu(x)$ (deoarece $\mu(x)$ este întotdeauna un termen închis iar ι este funcția identitate pe termenii închiși). Și deci $x^{\mu} = \mu(x)$.

b) $t = c$ (exercițiu).

c) $t = f(t_1,...,t_n)$. Presupunem că identitatea din remarcă are loc pentru $t_1,...,t_n$. Vom avea $t^{\iota,\mu} = (f(t_1,...,t_n))^{\iota,\mu} = f^{\iota}(t_1^{\iota,\mu},...,t_n^{\iota,\mu})$. Iar $(\mu(t))^{\iota} = (\mu(f(t_1,...,t_n)))^{\iota} = (f(\mu(t_1),...,\mu(t_n))^{\iota} = f^{\iota}((\mu(t_1))^{\iota},...,(\mu(t_n))^{\iota})$.

Similar, identitatea din remarcă are loc și pentru formule, i.e. $(\alpha)^{\iota,\mu} = (\mu(\alpha))^{\iota}$, pentru orice formulă α a $\mathcal{L}_P$ (argumentați!). Și deci, dacă M este un model Herbrand, atunci $\mu(\alpha)$ este întotdeauna o formulă *închisă* (unde μ joacă rolul unei substituții).

În fine, într-un model Herbrand condițiile de adevăr ale formulelor cuantificate devin:

$\forall x\alpha = 1$ în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ ddacă $\alpha(x/\sigma(x)) = 1$, unde $\sigma(x)$ este orice termen $t \in \Omega$.

$\exists x\alpha = 1$ în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ ddacă $\alpha(x/\sigma(x)) = 1$, unde $\sigma(x)$ este un termen $t \in \Omega$.

Exerciții

1. Fie următoarea formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$: $\exists x_2 R(x_1, f(x_2, x_2))$. Fie $M = \langle Z^+, =, + \rangle$.

   Determinați condiția de adevăr a expresiei $[\exists x_2 R(x_1, f(x_2, x_2))]^{\iota,\mu}$.

Precizare. $M = \langle Z^+, =, + \rangle$ înseamnă un model M astfel încât $\Omega = Z^+$, $R^{\iota} =$ „=" iar $f^{\iota} =$ „+".

2. Fie următoarea propoziție a limbajului $\mathcal{L}_P$: $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 R(f(x_1, x_2), x_3)$.

   Determinați valoarea de adevăr a acestei propoziții în modelul $M = \langle Z^+, >, + \rangle$.

3. Fie următoarea propoziție a limbajului $\mathcal{L}_P$:

   $\forall x_1 \forall x_2 \{R(x_1, x_2) \supset \exists x_3 [R(x_1, x_3) \wedge R(x_3, x_2)]\}$.

   Determinați valoarea de adevăr a acestei propoziții în următoarele două modele: $M_1 = \langle \mathbf{R}, > \rangle$, unde **R** reprezintă mulțimea numerelor reale și $M_2 = \langle Z^+, > \rangle$.

4. Fie următoarea formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$: $Q(g(x, y), c)$.

   Determinați valoarea logică a acestei formule în următorul model: $M = \langle Z^+, \geq, \times, 1 \rangle$.

Demonstrații de validitate în $\mathcal{L}_P$

Exemplul 1. Să se demonstreze că următoarea formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$ este validă: γ: $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x\beta)$; x nu apare liberă în α.

Demonstrație (reductio ad absurdum)

Prin definiție, o formulă este *validă* dacă este adevărată în toate modelele lui $\mathcal{L}_P$. Presupunem că γ nu este o formulă validă. Rezultă că există un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ al

limbajului $\mathcal{L}_P$ în care γ nu este adevărată. Există deci o asignare μ în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ în care γ este falsă, adică

1. $[\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x\beta)]^{\iota,\mu} = 0$, echivalent
2. $([\forall x(\alpha \supset \beta)]^{\iota,\mu} \supset [\alpha \supset \forall x\beta]^{\iota,\mu}) = 0$, cf. Def. 4(3), adică
3. $[\forall x(\alpha \supset \beta)]^{\iota,\mu} = 1$ şi 4. $[\alpha \supset \forall x\beta]^{\iota,\mu} = 0$

Din 4 deducem 5. $[\alpha]^{\iota,\mu} = 1$ şi 6. $[\forall x\beta]^{\iota,\mu} = 0$. Din 6 deducem că există o asignare v x-variantă a asignării μ, astfel că 7. $[\beta]^{\iota,\nu} = 0$; cf. Def. 4(4).

Din 5 deducem 8. $[\alpha]^{\iota,\nu} = 1$, pentru orice asignare v x-variantă a asignării μ (deoarece x nu apare liberă în α, prin restricţie). Din 7 şi 8 deducem 9. $[\alpha \supset \beta]^{\iota,\nu} = 0$. Însă din 2 deducem 10. $[\alpha \supset \beta]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare v x-variantă a lui μ (prin Def. 4(4)), rezultat care contrazice 9.

Remarcă

Formula γ este validă doar cu restricţia menţionată: „x nu apare liberă în α". Pe baza unui exemplu simplu vom arăta de ce este necesară o asemene restricţie. Mai exact, vom arăta că fără o astfel de restricţie formula γ este nevalidă.

Cum α şi β din formula γ sunt formule arbitrare ale $\mathcal{L}_P$, presupunem în cele ce urmează că α şi β sunt formula elementară $P(x)$. În acest caz formula γ este

γ^*: $\forall x(P(x) \supset P(x)) \supset (P(x) \supset \forall xP(x))$

Aici x apare *liberă* în antecedentul consecventului (încalcă deci restricţia!).

Vom arăta că γ^* este nevalidă. Adică există un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ în care γ^* nu este adevărată.

Vom considera succesiv două modele, unul, $M_1\langle \Omega_1, \iota \rangle$, în care domeniul conţine un singur element, a, iar celălalt, $M_2\langle \Omega_2, \iota \rangle$, în care Ω_2 are două elemente, a, b. Transformăm acum formula γ^* în acord cu semnificaţia cuantificării pe domenii finite, adică:

$\forall xP(x)$ *eq* $[P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)]$.

În primul caz obţinem:

$$\gamma_1^* : [P(a) \supset P(a)] \supset [P(a) \supset P(a)]$$

Într-un astfel de model, indiferent de interpretarea lui P, formula nu poate fi falsă.

Ce se întâmplă însă cu γ^* în $M_2\langle \Omega_2, \iota \rangle$? Transformăm formula, ca mai sus, şi obţinem:

$$\gamma_2^* : \{[P(a) \supset P(a)] \wedge [P(b) \supset P(b)]\} \supset [P(a) \supset (P(a) \wedge P(b))]$$

Această formulă am obţinut-o din γ^*, prin transformări echiveridice, astfel încât în antecedentul consecventului (i.e. formula α în care x apare liberă) pentru x am luat valoarea a (la fel de bine puteam alege b!).

Poate fi γ_2^* falsă în M_2?

Este suficient să găsim acele *categorii de asignări* de valori de adevăr pentru formulele elementare $P(a)$ şi $P(b)$ pentru care implicaţia (i.e. γ_2^*) să fie falsă. Acestea sunt: $P(a) = 1$ şi $P(b) = 0$.

Explicităm modelul M_2, construind funcţia interpretare (ι) şi găsind două elemente astfel încât unul are proprietatea P^{ι} iar celălalt nu.

Dacă $P' =$„prim“, atunci $a=3$ şi $b=4$. În acest model $M_2\langle\{3,4\},\text{prim}\rangle$, $\gamma_2{}^*$ este falsă (verificarea: exerciţiu).

Exemplul 2. Demonstraţi validitatea următoarei fonnule a limbajului $\mathcal{L}_P$:

$\delta : \forall x(\alpha(x) \supset \beta(x)) \supset (\forall x\alpha(x) \supset \forall x\beta(x))$

Reductio ad absurdum. Presupunem că δ este nevalidă. Există deci un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ şi o asignare μ în M astfel încât

$[\forall x(\alpha(x) \supset \beta(x)) \supset (\forall x\alpha(x) \supset \forall x\beta(x))]^{\iota,\mu} = 0$, echivalent

$([\forall x(\alpha(x) \supset \beta(x))]^{\iota,\mu} \supset [(\forall x\alpha(x) \supset \forall x\beta(x))]^{\iota,\mu}) = 0$, echivalent

$([\forall x(\alpha(x) \supset \beta(x))]^{\iota,\mu} \supset ([\forall x\alpha(x)]^{\iota,\mu} \supset [\forall x\beta(x)]^{\iota,\mu})) = 0$, adică

I. $[\forall x(\alpha(x) \supset \beta(x))]^{\iota,\mu} = 1$ şi II. $[\forall x\alpha(x)]^{\iota,\mu} = 1$ şi III. $[\forall x\beta(x)]^{\iota,\mu} = 0$

Din I, $[\forall x(\alpha(x) \supset \beta(x))]^{\iota,\mu} = 1$, deducem $[\alpha(x) \supset \beta(x)]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare ν (x-variantă a asignării μ); echivalent $([\alpha(x)]^{\iota,\nu} \supset [\beta(x)]^{\iota,\nu}) = 1$, pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ).

Din II, $[\forall x\alpha(x)]^{\iota,\mu} = 1$, deducem $[\alpha(x)]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ).

Din I şi II deducem $[\beta(x)]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ).

Din III, $[\forall x\beta(x)]^{\iota,\mu} = 0$, deducem că *există* o asignare ν (x-variantă a lui μ), astfel că $[\beta(x)]^{\iota,\nu} = 0$, ceea ce contrazice deducţia de mai sus, conform căreia $[\beta(x)]^{\iota,\nu} = 1$, pentru *orice* asignare ν (x-variantă a lui μ).

Exemplul 3. $\forall x\alpha(x) \supset \alpha(x/t)$; t este orice termen liber pentru x în $\alpha(x)$.

Demonstraţie. Presupunem că formula este nevalidă. Fie $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ şi μ o asignare în M. Presupunem că $\alpha(x/t)$ este falsă în asignarea μ în M. Aşadar, $[\alpha(x/t)]^{\iota,\mu} = 0$. Fie ν o asignare x-variantă a lui μ, astfel că $x^{\nu} = t^{\iota,\mu}$. În acest caz $[\alpha(x)]^{\iota,\nu} = 0$, prin *Lemă*, şi deci $[\forall x\alpha(x)]^{\iota,\mu} = 0$ (cf. Def. 4(4)).

Exerciţii

1. Demonstraţi validitatea următoarelor formule ale limbajului $\mathcal{L}_P$:
   $\gamma_1 : \forall x(\alpha(x) \supset \beta(x)) \supset (\exists x\alpha(x) \supset \exists x\beta(x))$
   $\gamma_2 : \forall xQ(x) \supset \exists xQ(x)$
   $\gamma_3 : \exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \equiv (\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x))$
   $\gamma_4 : (\forall x\alpha(x) \wedge \forall x\beta(x)) \supset \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$
   $\gamma_5 : \forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \supset (\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x))$
2. Construiţi modele în care următoarele fonnule nu sunt adevărate:
   $\delta_1 : \forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$
   $\delta_2 : (\forall xP(x) \supset \forall xQ(x)) \supset \forall x(P(x) \supset Q(x))$
3. Este validă următoarea formulă a limbajului $\mathcal{L}_P$?
   $\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \supset \forall x\alpha(x)$
4. Să se demonstreze următoarea aserţiune a $\mathcal{L}_P$:
   α este o formulă validă *ddacă* $\neg\alpha$ nu este satisfiabilă.

3.2. Tablourile analitice în $\mathcal{L}_P$

Metoda tablourilor analitice în $\mathcal{L}_P$ este un analogon al metodei corespunzătoare din logica propozițiilor. Formulele logicii propozițiilor, aduse într-o notație uniformă, se constituie, am văzut, în două tipuri distincte: formule *tip α* și formule *tip β*. Și în $\mathcal{L}_P$ avem o notație similară, în raport cu care formulele cuantificate și negațiile lor se grupează în formule *tip γ* (universale) și formule *tip δ* (existențiale), astfel:

formule γ: $\forall x\alpha$;	$\gamma(t): \alpha(x/t)$
$\neg\exists x\alpha$;	$\gamma(t): \neg\alpha(x/t)$
formule δ: $\exists x\alpha$;	$\delta(t): \alpha(x/t)$
$\neg\forall x\alpha$;	$\delta(t): \neg\alpha(x/t)$

Expresiile simbolice $\alpha(x/t)$ și $\neg\alpha(x/t)$ denotă instanțieri (exemplificări) ale formulelor respective, obținute prin substituirea variabilei x din α cu un termen t.

În vederea expunerii modului în care metoda tablourilor analitice este operantă în $\mathcal{L}_P$ vom recurge la o mică modificare a limbajului logicii predicatelor. Mai precis, vom adăuga limbajului $\mathcal{L}_P$, prezentat în cadrul *Sintaxei* $\mathcal{L}_P$, o nouă categorie de *constante*, numite *parametri*. Prin $\mathcal{L}_P^+$ vom înțelege așadar $\mathcal{L}_P$ reunit cu mulțimea infinit numărabilă a parametrilor. Așadar, $\mathcal{L}_P^+ = \mathcal{L}_P \cup \{\text{Par}\}$. Simbolurile pentru parametri vor fi $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$.

Utilizarea parametrilor este o practică curentă în matematică. Demonstrată fiind, de exemplu, o teoremă de forma $\exists x\alpha$, putem conchide asupra existenței a ceva care este α. În acest caz nu vom utiliza, pentru desemnarea acelui „ceva", un simbol deja utilizat, cu o semnificație strict determinată (cunoscută), ci vom spune simplu: „fie p un astfel de x care este α". O asemenea constantă „p", nume *nou* introdus în urma demonstrației enunțului de existență $\exists x\alpha$, se numește *parametru*.

Așa cum pentru formulele *α* și *β* aveam regulile corespunzătoare, tot astfel în $\mathcal{L}_P^+$ vom avea, pentru formulele *γ* și *δ*, regulile respective.

$R_\gamma : \dfrac{\gamma}{\gamma(t)}$ sau $\dfrac{\forall x\alpha}{\alpha(x/t)}$; $\dfrac{\neg\exists x\alpha}{\neg\alpha(x/t)}$, unde t este *orice* termen *închis* al limbajului $\mathcal{L}_P^+$, chiar și un parametru sau un termen care conține parametri.

$R_\delta : \dfrac{\delta}{\delta(p)}$ sau $\dfrac{\exists x\alpha}{\alpha(x/p)}$; $\dfrac{\neg\forall x\alpha}{\neg\alpha(x/p)}$, unde p este un parametru *nou* [12].

Sensul restricției din regula R_δ este următorul. Presupunem că într-o demonstrație matematică expresia $\exists xP(x)$ este o teoremă. O dată demonstrată propoziția $\exists xP(x)$ putem deci conchide asupra existenței unui x care are proprietatea P și spunem: „fie p un astfel de x". Dacă în decursul demonstrației și expresia $\exists xQ(x)$ este o teoremă, vom spune „fie q un astfel de x". În acest al doilea caz nu putem folosi încă o dată parametrul p, deoarece p a fost *deja* angajat în primul enunț de existență și nu știm dacă acel x care este p are atât proprietatea P cât și proprietatea Q.

---

[12] Prin introducerea parametrilor vom avea, corespunzător, formule fără parametri (pure), cele specificate în 3.1.1, și formule cu parametri.

Altfel spus, restricția din R_δ înseamnă: un parametru din $\mathcal{L}_P^+$ nu poate fi introdus prin aplicarea regulii R_δ dacă el a fost deja introdus printr-o aplicare a regulii R_δ. Însă dacă parametrul respectiv a fost deja introdus într-o formulă prin aplicarea regulii R_γ asupra unei formule universale, atunci el poate fi din nou utilizat prin aplicarea regulii R_δ asupra altei formule (existențiale). În acest din urmă caz explicația este simplă: o dată demonstrată propoziția $\forall x P(x)$, putem conchide asupra $P(t)$, unde t este *orice* termen închis, chiar și un parametru. În acest caz P are loc despre *orice t*. Cum t nu este „unul anume", el poate fi din nou utilizat prin aplicarea regulii R_δ asupra unei propoziții $\exists x Q(x)$.

În practica rezolvării de exerciții regula R_δ poate fi aplicată într-o formă mai „lastă". În sensul că restricția cerută de această regulă, „p este un parametru nou", admite alternativa următoarelor 3 condiții simultan satisfăcute:

1. p nu apare în formula δ (din care facem deducția $\delta(p)$).
2. p n-a fost introdus anterior printr-o regulă R_δ.
3. nici un parametru introdus anterior printrt-o regulă R_δ nu apare în δ.

Exemplu.
Demonstrăm că formula α de mai jos este o formulă validă a $\mathcal{L}_P$.

$\alpha: \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$

1. $\neg(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x)))$
2. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ (1), R_α
3. $\neg(\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$ (1), R_α
4. $\forall x P(x)$ (3), R_α
5. $\neg \forall x Q(x)$ (3), R_α
6. $\neg Q(p)$ (5), R_δ
7. $P(p)$ (4), R_γ
8. $P(p) \supset Q(p)$ (2), R_γ

9. $\neg P(p)$ 10. $Q(p)$ (8), R_β

* *

Coloana din dreapta indică pașii corespunzători din care s-a obținut formula respectivă, prin aplicarea regulii specificate. În pasul 6, $\neg Q(p)$ este formula obținută din formula δ (existențială) $\neg \forall x Q(x)$, unde p este un parametru nou. În pasul 7, $P(p)$ se obține din formula γ din 4, prin aplicarea regulii R_γ. Întrucât formula este *universală*, P este valabil despre orice termen închis, deci și despre parametrul p, deja utilizat. Formula din pasul 8, $P(p) \supset Q(p)$, se obține din 2, tot prin aplicarea regulii R_γ.

După cum se poate observa cu ușurință, demonstrația cu ajutorul metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_P$ este similară demonstrației din logica propozițiilor. Respectiv, o formulă α a $\mathcal{L}_P^+$ este o formulă validă în $\mathcal{L}_P$ dacă tabloul analitic al *negației* ei, $\neg\alpha$, este unul *închis*. Mai sus am arătat că formula α este o formulă validă în $\mathcal{L}_P$. La același rezultat se putea ajunge

construind tabloul analitic al lui $\neg\alpha$ şi în alt fel. Respectiv, în pasul 4 puteam pune $P(p) \supset Q(p)$, prin aplicarea R_γ asupra pasului 2, după care ramificam tabloul astfel obţinut. Sau aplicam regula R_γ înaintea aplicării regulii R_δ ş.a.m.d. Aceasta înseamnă că regulile tabloului sunt *non-deterministe*, în sensul că *noi* suntem cei care alegem formula căreia îi aplicăm o regulă sau alta. Tot noi suntem cei care putem utiliza o formulă de mai multe ori prin aplicarea unei reguli sau putem omite aplicarea unor reguli în cazul în care tabloul analitic se închide mai repede (adică nu la nivelul unei formule elementare). Pe scurt, regulile sunt non-deterministe pentru că ne spun ce putem face, nu ce trebuie să facem.

Spre deosebire de logica propoziţiilor, în $\mathcal{L}_P$, deşi formula pe care o demonstrăm este validă (i.e. există un tablou închis pentru $\neg\alpha$) se întâmplă ca acest rezultat să nu poată fi atins întotdeauna. Sursa acestui fapt o reprezintă regula R_γ. Căci, de exemplu, dacă pe aceeaşi ramură a tabloului analitic avem atât formula $\exists x \neg R(x)$ cât şi formula $\forall z R(z)$, prin aplicarea R_δ asupra formulei existenţiale putem continua construcţia tabloului adăugând $\neg R(p)$, unde p este un parametru nou, iar prin aplicarea repetată a R_γ asupra formulei universale putem adăuga succesiv $R(t_1)$, $R(t_2)$,..., unde t_1, t_2,... sunt termeni închişi *diferiţi de p* din $\mathcal{L}_P^{+}$. Evident, în acest caz, deşi *există* un tablou închis pentru $\neg\alpha$, acest lucru nu poate fi obţinut. În cazurile relativ simple, inspiraţia ne face să dobândim rezultatul. Similar logicii propoziţiilor, în $\mathcal{L}_P$ câteva indicaţii ne ajută la o construcţie mai uşoară şi mai rapidă a tabloului analitic. Ordinea în care aplicăm cele patru reguli este (de preferinţă!) următoarea: R_α, R_δ, R_γ, R_β. Şi în $\mathcal{L}_P$ vom întâlni teoreme similare teoremelor din logica propoziţiilor. Redăm mai jos, fără demonstraţie, două dintre cele mai importante.

Teorema corectitudinii*. Orice formulă α a $\mathcal{L}_P$ demonstrabilă cu ajutorul metodei tablourilor analitice este o formulă validă a $\mathcal{L}_P$.*

Teorema completitudinii*. Orice formulă validă a $\mathcal{L}_P$ este o formulă demonstrabilă cu ajutorul metodei tablourilor analitice.*

Simultan, cele două teoreme admit echivalenţa (şi deci substituirea reciprocă a) conceptelor „demonstrabil" şi „valid".

Exemple (aplicaţii ale metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_P$)

1. Să se demonstreze că următoarea formulă este o formulă validă în $\mathcal{L}_P$

$\alpha_1 : \exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))$

1. $\neg\{\exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))\}$
2. $\exists x(P(x) \vee Q(x))$
3. $\neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
4. $\neg\exists x P(x)$
5. $\neg\exists x Q(x)$
6. $P(p) \vee Q(p)$, din 2, R_δ, p nou
7. $\neg P(p)$
8. $\neg Q(p)$

9. $P(p)$ 10. $Q(p)$

*   *

2. Este următoarea formulă o formulă *validă* în $\mathcal{L}_P$?

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_2 : \exists x \forall y R(x,y) \supset \forall y \exists x R(x,y) & & \\
1. & \neg\{\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall y \exists x R(x,y)\} & \\
2. & \exists x \forall y R(x,y) & (1),\ R_\alpha \\
3. & \neg \forall y \exists x R(x,y) & (1),\ R_\alpha \\
4. & \forall y R(\mathbf{p}, y) & (2),\ R_\delta \\
5. & R(\mathbf{p}, p) & (4),\ R_\gamma \\
6. & \neg \exists x R(x, \mathbf{q}) & (3),\ R_\delta \\
7. & \neg R(p, \mathbf{q}) & (6),\ R_\gamma \\
8. & R(p, \mathbf{q}) & (4),\ R_\gamma \\
 & * &
\end{array}
$$

În acest exemplu **p** şi **q** (culese bold) reprezintă cei doi parametri, distincţi, introduşi prin două aplicaţii succesive ale R_δ asupra formulelor 2 şi 3.

Exerciţii

1. Să se demonstreze, cu ajutorul metodei tablourilor analitice, validitatea / nevaliditatea următoarelor formule:

$\alpha_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

$\alpha_2 : \exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

$\alpha_3 : \exists x(P(x) \supset \forall x P(x))$

$\alpha_4 : \forall x \exists y \forall z \exists w (R(x,y) \vee \neg R(w,z))$

$\alpha_5 : \exists y(\exists x P(x) \supset P(y))$

$\alpha_6 : \forall y(\forall x P(x) \supset P(y))$

$\alpha_7 : \forall x P(x) \supset \exists x P(x)$

$\alpha_8 : \neg \exists y P(y) \supset \forall y(\exists x P(x) \supset P(y))$

$\alpha_9 : \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

$\alpha_{10} : (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$

$\alpha_{11} : \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

$\alpha_{12} : \exists x P(x) \vee \forall x P(x)$

$\alpha_{13} : \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

$\alpha_{14} : \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))$

$\alpha_{15} : (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x(P(x) \supset Q(x))$

$\alpha_{16} : \forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

$\alpha_{17} : (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$

2. Pentru formulele nevalide construiţi modele în care sunt false.

3.3. $\mathcal{L}_P$ axiomatizată

Sisteme axiomatice ale $\mathcal{L}_P$

3.3.1. Sistemul Q

Sistemul axiomatic *Q* de logică a predicatelor, prezentat mai jos, se obține adăugând sistemului axiomatic *S* de logică a propozițiilor, din 2.3.2., „ingredientele" specifice logicii predicatelor. Mai exact, el conține cinci *scheme de axiome* și două reguli de deducție.

Ax 1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

Ax 2. $[\alpha \supset (\beta \supset \gamma)] \supset [(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)]$

Ax 3. $(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \alpha)$

Univ 1. $\forall x\alpha(x) \supset \alpha(x/t)$[13]; *t* este orice termen liber pentru *x* în $\alpha(x)$

Univ 2. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x\beta)$; *x* nu apare liberă în α

Reguli de deducție

Modus Ponens (MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \supset \beta}{\beta}$

Regula generalizării universale (Gen) $\dfrac{\alpha}{\forall x\alpha}$

Celor trei definiții ale lui *S*, din 2.3.2., li se adaugă definiția cuantificatorului existențial.

Def $\exists$: $\exists x\alpha(x) =_{df} \neg\forall x\neg\alpha(x)$

Exemple de axiome.

Pentru Univ 1: $\forall xR(x) \supset R(x)$, $\forall xP(x) \supset P(c)$, $\forall x[Q(x,y) \supset P(x)] \supset (Q(z,y) \supset P(z))$.

Pentru Univ 2: $\forall x(P(y) \supset R(x,z)) \supset (P(y) \supset \forall xR(x,z))$,

$\forall x(\exists zQ(z) \supset P(x,y)) \supset (\exists zQ(z) \supset \forall xP(x,y))$.

Teoreme ale sistemului Q.

Th1. $\alpha(x/y) \supset \exists x\alpha$

1. $\forall x\neg\alpha \supset \neg\alpha(x/y)$; *Univ 1.*
2. $\neg\neg\alpha(x/y) \supset \neg\forall x\neg\alpha$; 1, $\mathcal{L}_p$[14]
3. $\alpha(x/y) \supset \exists x\alpha$; 2, $\mathcal{L}_p$, Def $\exists$.

Th2. $\forall x\alpha \supset \exists x\alpha$

1. $\forall x\alpha \supset \alpha$; *Univ 1.*
2. $\alpha \supset \exists x\alpha$; *Th1.*
3. $\forall x\alpha \supset \exists x\alpha$; 1, 2 $\mathcal{L}_p$

Th3. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)$

1. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$; *Univ 1.*

---

[13] Notația „$\alpha(x/t)$" are următoarea semnificație: în formula α, care conține variabila liberă *x* (α poate conține și alte variabile) se substituie această variabilă (în toate ocurențele ei!) cu un termen *t*. (Acolo unde substituția este clară vom scrie, simplu, $\alpha(t)$ sau α).

[14] Notația „$\mathcal{L}_p$" indică faptul că la baza transformării unei (unor) formule din pasul (pașii) anteriori stă o formulă *validă* (și deci o *teoremă*) a logicii propoziționale și care cel mai adesea este subînțeleasă. În cazul de față este vorba despre contrapoziție: $(\alpha \supset \beta) \equiv (\neg\beta \supset \neg\alpha)$.

2. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$; $\mathcal{L}_p$

3. $\neg\alpha \supset \exists x \neg\alpha$; *Th1*

4. $(\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\neg\beta \supset \exists x \neg\alpha)$; 3, $\mathcal{L}_p$ $(\alpha \supset \beta) \supset [(\gamma \supset \alpha) \supset (\gamma \supset \beta)]$ + *Subst*

5. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\beta \supset \exists x \neg\alpha)$; 2, 4 $\mathcal{L}_p$

6. $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg\exists x \neg\alpha \supset \neg\neg\beta)$; 5 $\mathcal{L}_p$

7. $(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)$; 6, *Def* $\exists$, $\mathcal{L}_p$

8. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)$; 1, 7 $\mathcal{L}_p$

Th4. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$

1. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)$; *Th3*
2. $\forall x(\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta))$; 1, *Gen*
3. $\forall x(\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)) \supset [\forall x(\alpha \supset \beta) \supset \forall x(\forall x\alpha \supset \beta)]$; *Univ 2*.
4. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset \forall x(\forall x\alpha \supset \beta)$; 2, 3 *MP*
5. $\forall x(\forall x\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$; *Univ 2*.
6. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$; 4, 5 *MP*

Th5. $(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$ (exercițiu)

Th6. $\forall x(\alpha \equiv \beta) \supset (\forall x\alpha \equiv \forall x\beta)$

1. $((\alpha \equiv \beta) \supset (\alpha \supset \beta))$; $\mathcal{L}_p$
2. $\forall x((\alpha \equiv \beta) \supset (\alpha \supset \beta))$; 1 *Gen*
3. $\forall x(\alpha \equiv \beta) \supset \forall x(\alpha \supset \beta)$; 2, *Th4*, *MP*
4. $\forall x(\alpha \equiv \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$; 3, *Th4*, $\mathcal{L}_p$
5. $(\alpha \equiv \beta) \supset (\beta \supset \alpha)$; $\mathcal{L}_p$
6. $\forall x(\alpha \equiv \beta) \supset (\forall x\beta \supset \forall x\alpha)$; Se parcurg pașii 2-4 în raport cu 5.
7. $\forall x(\alpha \equiv \beta) \supset (\forall x\alpha \equiv \forall x\beta)$; 4, 6, $\mathcal{L}_p$

Th7. $\forall x\alpha(x) \equiv \forall y\alpha(y)$; unde $\alpha(x)$ și $\alpha(y)$ sunt *similare* (i.e. diferă strict prin faptul că ocurențele libere ale lui x în formula $\alpha(x)$ sunt exact ocurențele libere ale lui y în formula $\alpha(y)$). Formulele $\forall x\alpha(x)$ și $\forall y\alpha(y)$ se numesc *variante alfabetice legate*.

1. $\forall x\alpha \supset \alpha$; *Univ 1*
2. $\forall y(\forall x\alpha \supset \alpha)$; 1 *Gen*
3. $\forall y(\forall x\alpha \supset \alpha) \supset (\forall x\alpha \supset \forall y\alpha)$; *Univ 2*
4. $\forall x\alpha \supset \forall y\alpha$; 2, 3 *MP*
5. $\forall y\alpha \supset \alpha$; *Univ 1*
6. $\forall x(\forall y\alpha \supset \alpha)$; 5, *Gen*
7. $\forall x(\forall y\alpha \supset \alpha) \supset (\forall y\alpha \supset \forall x\alpha)$; *Univ 2*
8. $\forall y\alpha \supset \forall x\alpha$; 6, 7 *MP*
9. $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha$; 4, 8 $\mathcal{L}_p$

Th8. $\neg\exists x\alpha \supset \forall x\neg\alpha$

1. $\forall x\neg\alpha \supset \forall x\neg\alpha$; $\mathcal{L}_P$ [15]
2. $\neg\neg\forall x\neg\alpha \supset \forall x\neg\alpha$; $\mathcal{L}_p$
3. $\neg\exists x\alpha \supset \forall x\neg\alpha$; 2 *Def* $\exists$

Th9. $\forall x\neg\alpha \supset \neg\exists x\alpha$

1. $\forall x\neg\alpha \supset \neg\neg\forall x\neg\alpha$; $\mathcal{L}_p$
2. $\forall x\neg\alpha \supset \neg\exists x\alpha$; 1 *Def* $\exists$

Th10. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$, *Th8*, *Th9*, $\mathcal{L}_P$

Th11. $\forall x\alpha \equiv \neg\exists x\neg\alpha$; *Th10*, $\mathcal{L}_P$, *Def* $\exists$

Th12. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ (exercițiu).

Teorema deducției

Spre deosebire de teorema deducției din $\mathcal{L}_p$, în logica predicatelor aplicarea teoremei deducției reclamă o restricție anume, determinată de următorul fapt: este adevărat, pentru orice formulă α, că $\alpha \vdash \forall x\alpha$, dar nu întotdeauna are loc $\vdash \alpha \supset \forall x\alpha$.

Prin teorema de corectitudine a sistemului Q (pe care o vom demonstra mai jos), dacă $\vdash \alpha \supset \forall x\alpha$, atunci $\models \alpha \supset \forall x\alpha$. Însă $\alpha \supset \forall x\alpha$ nu este o formulă validă a $\mathcal{L}_P$. Există așadar un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ și o asignare μ în M în care formula este falsă. Fie, ca exemplu, $\alpha = P(x)$. Fie $M = \langle \{a, b\}, \iota \rangle$, fie $x^{\mu} = a$ și $[P(x)]^{\iota,\mu} = 1$. Fie $x^{\nu} = b$ (ν este o x-variantă a lui μ) și $[P(x)]^{\iota,\nu} = 0$. În acest caz vom avea $[\forall x P(x)]^{\iota,\mu} = 0$ și deci *non* $\models P(x) \supset \forall x P(x)$. Nefiind validă, formula nu este demonstrabilă (i.e. nu este teoremă a sistemului Q).

Definiție. Fie Γ *o mulțime de formule ale* $\mathcal{L}_P$. *Fie* $\alpha \in \Gamma$. *Fie* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *o deducție din* Γ, *plus justificarea fiecărui pas al deducției. În această deducție* β_i *depinde de* α *dacă:*

1. β_i *este formula* α *(*β_i *se justifică prin apartenența la* Γ*) sau*

2. β_i *este o consecință directă, prin MP sau Gen, a unor formule precedente ale șirului deductiv, unde cel puțin una din aceste formule precedente depinde de* α.

Exemplu. α, $\forall x\alpha \supset \gamma \vdash \forall x\gamma$

β_1: α; as

β_2: $\forall x\alpha$; 1 *Gen*

β_3: $\forall x\alpha \supset \gamma$; as

β_4: γ; β_2, β_3 *MP*

β_5: $\forall x\gamma$; β_4 *Gen*

Aici, β_1 (adică α) depinde de α (cf. def.); β_2 depinde de β_1; β_3 depinde de $\forall x\alpha \supset \gamma$ (cf. def.); β_4 depinde de α și de $\forall x\alpha \supset \gamma$ iar β_5 depinde de α și de $\forall x\alpha \supset \gamma$.

---

[15] „$\mathcal{L}_P$": prin logica predicatelor, adică implicația din 1 este o instanțiere în logica predicatelor a formulei valide $\alpha \supset \alpha$.

Teorema deducției. Fie Γ, $\alpha \vdash \beta$ *cu restricția: nici o aplicare a Gen vreunei formule care depinde de* α *nu cuantifică o variabilă liberă din* α. *Atunci* $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Remarcă. Mai uzual, restricția din această teoremă poate fi astfel formulată: în deducția Γ, $\alpha \vdash \beta$ regula *Gen*, în nici o aplicație a ei, nu cuantifică vreo variabilă liberă din α. În acest caz $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$. Firește, dacă α n-are nici o variabilă liberă (i.e. este formulă închisă), atunci dacă Γ, $\alpha \vdash \beta$, atunci $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Demonstrație (prin inducție). Presupunem că există o deducție a formulei β din Γ, α, care conține n formule: $\beta_1,...,\beta_n$, ultima formulă, β_n, fiind formula dedusă, β. Pentru a obține rezultatul, $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$, prin inducție se arată că $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, pentru orice $i \leq n$. Avem de considerat următoarele cazuri:

1. β_i este o axiomă. Rezultatul este imediat, căci $\beta_i \supset (\alpha \supset \beta_i)$ este Ax1.

2. $\beta_i \in \Gamma$; similar.

3. $\beta_i = \alpha$. Atunci, $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, pentru că $\alpha \supset \alpha$ este deductibilă în sistemul Q.

4. Există $j,k < i$, astfel că $\beta_k = \beta_j \supset \beta_i$. Prin ipoteza inducției, relația are loc pentru orice indice *mai mic* decât i. Așadar, vom avea $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_j$ și $\Gamma \vdash \alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)$, pentru că, în acest din urmă caz, $\beta_j \supset \beta_i$ este β_k, iar $k < i$. Și astfel vom avea $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, prin Ax2 și o dublă aplicare a *MP*.

5. Există $j < i$, astfel că $\beta_i = \forall x \beta_j$. Avem aici două subcazuri:

a) β_j *nu depinde de* α. În acest subcaz vom arăta mai întâi că dacă Γ, $\alpha \vdash \beta_j$, atunci $\Gamma \vdash \beta_j$.

Argument. Presupunem antecedentul acestui condițional: Γ, $\alpha \vdash \beta_j$. Există, așadar, un șir de formule ale deducției $\beta_1,...,\beta_m = \beta_j$, astfel că β_j nu depinde de α. Presupunem (i.e. ipoteza inducției) că expresia condițională din enunț are loc pentru orice $k < m$. Dacă β_j este o axiomă sau dacă $\beta_j \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \beta_j$. Iar dacă β_j rezultă din formule anterioare ale șirului, prin aplicarea celor două reguli de deducție, atunci fiindcă β_j nu depinde de α, nici aceste formule nu depind de α. Iar fiindcă aceste formule sunt deductibile doar din Γ (prin ipoteză), rezultă că și β_j este deductibilă doar din Γ.

Însă din $\Gamma \vdash \beta_j$ obținem $\Gamma \vdash \forall x \beta_j$ (prin *Gen*), adică $\Gamma \vdash \beta_i$. Însă $\beta_i \supset (\alpha \supset \beta_i)$ este demonstrabilă (fiind Ax1). Și astfel $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, prin *MP*.

b) *x nu este o variabilă liberă a formulei* α. Atunci, prin *Univ 2* vom avea $\vdash \forall x(\alpha \supset \beta_j) \supset (\alpha \supset \forall x \beta_j)$. Însă $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_j$ (prin ipoteză) și deci $\Gamma \vdash \forall x(\alpha \supset \beta_j)$ prin *Gen*. De unde, prin *MP*, obținem $\Gamma \vdash \alpha \supset \forall x \beta_j$, adică tocmai $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$. Pentru $i = n$ vom avea $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_n$, adică $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Remarcă. Restricția din formularea problemei deducției este *necesară*. Să arătăm acest lucru printr-un exemplu simplu.

Prin regula *Gen*, $\alpha \vdash \forall x \alpha$. De aici nu putem conchide $\vdash \alpha \supset \forall x \alpha$ (am văzut mai sus că aceasta nu este o formulă validă) pentru că aplicarea Th. deducției în acest caz nu este permisă. Într-adevăr, dată fiind acum $\forall x \alpha$, în Q putem deriva α (din *Univ 1* și *MP*). Și deci au loc $\alpha \vdash \forall x \alpha$ și $\forall x \alpha \vdash \alpha$; de unde conchidem că formula α este *la fel de tare* ca formula $\forall x \alpha$. Și deci dacă regula *Gen* am transcrie-o în formă implicativă, ar trebui redată astfel: $\forall x \alpha \supset \forall x \alpha$.

Exerciții. Să se demonstreze că:

1. $\forall x\alpha, \forall x(\alpha \supset \beta) \vdash \forall x\beta$.
2. $\forall x(\alpha \supset \beta), \exists x\alpha \vdash \exists x\beta$.

Reguli de deducție derivate în Q

Aceste reguli se numesc „derivate" deoarece ele pot fi *deduse* într-un sistem axiomatic. Așadar, utilizarea lor nu este neparat necesară, însă aplicațiile lor simplifică adesea demonstrațiile.

Rd1.
$$\frac{\alpha \supset \beta}{\alpha \supset \forall x\beta}$$
; x nu apare liberă în α

Demonstrație. 1. $\alpha \supset \beta$; as

2. $\forall x(\alpha \supset \beta)$; 1 *Gen*
3. $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x\beta)$; *Univ* 2 ($x$ nu apare liberă în α)
4. $\alpha \supset \forall x\beta$; 2, 3 *MP*

Rd2.
$$\frac{\forall x\alpha(x)}{\alpha(t)}$$
; t este liber pentru x în $\alpha(x)$

(regula particularizării)

Demonstrație. 1. $\forall x\alpha(x)$; as

2. $\forall x\alpha(x) \supset \alpha(t)$; *Univ 1*
3. $\alpha(t)$; 1, 2 *MP*

Rd3.
$$\frac{\alpha(t)}{\exists x\alpha(x)}$$
; t este liber pentru x în $\alpha(x)$

(regula generalizării existențiale)

Demonstrație. 1. $\alpha(t)$; as

2. $\forall x\neg\alpha(x) \supset \neg\alpha(t)$; *Univ 1*
3. $\alpha(t) \supset \neg\forall x\neg\alpha(x)$; 2 contrapoz.
4. $\alpha(t) \supset \exists x\alpha(x)$; 3, Def $\exists$
5. $\exists x\alpha(x)$; 1, 4 *MP*

Regula δ^*

Această regulă redă simbolic o practică curentă de raționare în matematică. Dacă, de exemplu, am demonstrat că există un element x care are o proprietate P (i.e. am demonstrat $\exists xP(x)$), atunci vom spune: fie a un astfel de obiect încât $P(a)$. Aceasta nu înseamnă că P este valabil despre orice a, deși ceea ce am făcut este o alegere arbitrară [16]. Demonstrația o vom face însă în continuare într-un asemenea mod încât formula demonstrată *nu* conține simbolul a, adică demonstrația nu implică nicidecum alegerea arbitrară de mai sus.

$R\delta^*$
$$\frac{\exists x\alpha(x)}{\alpha(a)}$$

[16] Comp. $R\delta$, din 3.2.

Exemplu. Să se demonstreze că din formulele $\exists x(\alpha(x) \supset \beta(x))$ şi $\forall x\alpha(x)$ formula $\exists x\beta(x)$ poate fi dedusă.

1. $\exists x(\alpha(x) \supset \beta(x))$; as
2. $\forall x\alpha(x)$; as
3. $\alpha(a) \supset \beta(a)$; 1 pentru un a arbitrar astfel că $\alpha(a) \supset \beta(a)$ are loc.
4. $\alpha(a)$; 2 Rd2
5. $\beta(a)$; 4, 3 MP
6. $\exists x\beta(x)$; 5 Rd3 (gen. ex.)
7. $\exists x(\alpha(x) \supset \beta(x)),\ \forall x\alpha(x) \vdash \exists x\beta(x)$

Remarcă 1. Regula $R\delta^*$ este dispensabilă în următorul sens: orice formulă demonstrabilă cu ajutorul acestei reguli este demonstrabilă şi fără ea. Să vedem acum cum arată exerciţiul din exemplul de mai sus fără aplicarea $R\delta^*$.

1. $\forall x\alpha(x)$; as
2. $\forall x\neg\beta(x)$; as
3. $\alpha(x)$; 1 Rd2
4. $\neg\beta(x)$; 2 Rd2
5. $\neg(\alpha(x) \supset \beta(x))$; 3, 4 $\mathcal{L}_p$
6. $\forall x\neg(\alpha(x) \supset \beta(x))$; 5 Gen
7. $\forall x\alpha(x),\ \forall x\neg\beta(x) \vdash \forall x\neg(\alpha(x) \supset \beta(x))$; 1-6
8. $\forall x\alpha(x) \vdash \forall x\neg\beta(x) \supset \forall x\neg(\alpha(x) \supset \beta(x))$; 7, Th. ded.
9. $\forall x\alpha(x) \vdash \neg\forall x\neg(\alpha(x) \supset \beta(x)) \supset \neg\forall x\neg\beta(x)$; 8, $\mathcal{L}_p$ (contrapoz)
10. $\forall x\alpha(x) \vdash \exists x(\alpha(x) \supset \beta(x)) \supset \exists x\beta(x)$; 9 Def $\exists$
11. $\exists x(\alpha(x) \supset \beta(x)),\ \forall x\alpha(x) \vdash \exists x\beta(x)$; 10

Remarcă 2. Aşa cum în metoda tablourilor semantice regula $R\delta$ cerea precauţii cu privire la aplicarea ei, tot astfel $R\delta^*$ reclamă câteva restricţii:

1. Atunci când dintr-o formulă de genul $\exists x\alpha(x)$ derivăm $\alpha(a)$, de exemplu, a trebuie să fie o constantă *nouă*.

2. Regula *Gen* nu se aplică niciodată asupra unei variabile libere dintr-o formulă de forma $\exists x\alpha(x)$, asupra căreia s-a aplicat *deja* regula $R\delta^*$.

Să ilustrăm modul în care restricţia 2 este încălcată, respectiv: din $\forall x\exists yP(x,y)$ se deduce (eronat!) $\exists y\forall xP(x,y)$.

1. $\forall x\exists yP(x,y)$; as
2. $\exists yP(x,y)$; 1 Rd2
3. $P(x,a)$; 2 $R\delta^*$
4. $\forall xP(x,a)$; 3 Gen
5. $\exists y\forall xP(x,y)$; 4 Rd3
6. $\forall x\exists yP(x,y) \vdash \exists y\forall xP(x,y)$; 1, 5

Eroarea conţinută în acest şir deductiv rezidă în faptul că regula *Gen* s-a aplicat variabilei libere x din formula cuantificată existenţial, din pasul 2, căreia, în pasul 3, i s-a aplicat deja $R\delta^*$.

Teorema echivalenței

Teorema echivalenței. Dacă β *este o subformulă a formulei* α *iar* α' *rezultă din* α *prin înlocuirea a zero sau mai multe ocurențe ale lui* β *printr-o formulă* γ *și orice variabilă liberă din* β *și* γ, *care este o variabilă legată a lui* α, *apare în lista* $y_1,...,y_k$, *atunci* $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha \equiv \alpha')$.

Demonstrație (inducție pe gradul lui α). În cazul în care nu este înlocuită nici o ocurență a formulei β, atunci α' este formula α iar teorema este o instanțiere a formulei valide $\gamma_1 \supset (\gamma_2 \equiv \gamma_2)$. Dacă β este identică cu α, iar această ocurență a lui β este înlocuită prin γ, atunci ceea ce trebuie demonstrat este: $\forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\beta \equiv \gamma)$; rezultat derivabil prin *Univ 1*. În fine, considerăm că $\beta \neq \alpha$ și cel puțin o ocurență a lui β este înlocuită cu γ. Presupunem că teorema are loc pentru o formulă al cărei grad este mai mic decât gradul lui α.

1. α este o formulă elementară a $\mathcal{L}_P$. Și deci nu există o subformulă $\beta \neq \alpha$ a formulei α.

2. α este formula $\neg\delta$. Fie α' formula $\neg\delta'$. Prin ipoteza inducției, are loc $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\delta \equiv \delta')$. Și astfel are loc și $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha \equiv \alpha')$ (prin echivalența $(\gamma_1 \equiv \gamma_2) \equiv (\neg\gamma_1 \equiv \neg\gamma_2)$.

3. α este formula $\delta \supset \varepsilon$. Fie α' formula $\delta' \supset \varepsilon'$. Prin ipoteza inducției are loc $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\delta \equiv \delta')$ și $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\varepsilon \equiv \varepsilon')$. Și deci,

$\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset [(\delta \equiv \delta') \wedge (\varepsilon \equiv \varepsilon')]$. Însă, în logica propozițiilor

$\vdash [(\delta \equiv \delta') \wedge (\varepsilon \equiv \varepsilon')] \supset [(\delta \supset \varepsilon) \equiv (\delta' \supset \varepsilon')]$. Și deci,

$\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset [(\delta \supset \varepsilon) \equiv (\delta' \supset \varepsilon')]$ (prin tranzit $\supset$); i.e.

$\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha \equiv \alpha')$.

4. α este formula $\forall x\delta$. Fie α' formula $\forall x\delta'$. Prin ipoteza inducției are loc $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\delta \equiv \delta')$. Și deci $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset \forall x(\delta \equiv \delta')$ (prin *Univ* 2) (căci x nu apare liberă în $\forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma)$; fiindcă, în caz contrar, x ar fi liberă în β sau γ și, fiindcă este variabilă legată în α, x ar fi una din variabilele $y_1,...,y_k$ și astfel n-ar fi liberă în $\forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma)$). Însă $\vdash \forall x(\delta \equiv \delta') \supset (\forall x\delta \equiv \forall x\delta')$ (Th6). Și astfel, ca mai sus, $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\forall x\delta \equiv \forall x\delta')$, adică $\vdash \forall y_1,...,\forall y_k(\beta \equiv \gamma) \supset (\alpha \equiv \alpha')$.

Corolar 1 (Teorema înlocuirii echivalenților)

1. Dacă $\vdash \beta \equiv \gamma$, atunci $\vdash \alpha \equiv \alpha'$.

2. Dacă $\vdash \beta \equiv \gamma$ și $\vdash \alpha$, atunci $\vdash \alpha'$, unde α, β, γ, α' sunt formule din *Teorema echivalenței.*

Acest corolar rezultă din teorema echivalenței. Tot teorema echivalenței permite derivarea următorului corolar.

Corolar 2 (Schimbarea variabilelor legate)

Dacă $\forall x\beta(x)$ este o subformulă a lui α iar $\beta(y)$ diferă de $\beta(x)$ strict prin faptul că ocurențele libere ale lui x din $\beta(x)$ sunt exact ocurențele libere ale lui y din $\beta(y)$, iar α' se obține din α înlocuind una sau mai multe ocurențe ale formulei $\forall x\beta(x)$ prin $\forall y\beta(y)$, atunci $\vdash \alpha \equiv \alpha'$

Demonstrație. Th 7 plus Th înlocuirii.

Th 13. $(\forall x\alpha(x) \supset \beta) \equiv \exists y(\alpha(y) \supset \beta)$; y nu este liberă în β, iar $\alpha(x)$ și $\alpha(y)$ sunt similare.

a. $(\forall x\alpha(x) \supset \beta) \supset \exists y(\alpha(y) \supset \beta)$

1. $\forall x\alpha(x) \supset \beta$; as
2. $\neg\exists y(\alpha(y) \supset \beta)$; as
3. $\forall y\neg(\alpha(y) \supset \beta)$; 2, Th 10
4. $\forall y(\alpha(y) \wedge \neg\beta)$; 3, $\mathcal{L}_p$, Corol. 1
5. $\alpha(y) \wedge \neg\beta$; 4 Rd2
6. $\alpha(y)$; 5, $\mathcal{L}_p$
7. $\forall y\alpha(y)$; 6, Gen
8. $\forall x\alpha(x)$; 7, Th 7
9. β; 1, 8 MP
10. $\neg\beta$; 5, $\mathcal{L}_p$
11. $\beta \wedge \neg\beta$, 9, 10, $\mathcal{L}_p$
12. $(\forall x\alpha(x) \supset \beta), \neg\exists y(\alpha(y) \supset \beta) \vdash \beta \wedge \neg\beta$; 1-11
13. $(\forall x\alpha(x) \supset \beta) \vdash \neg\exists y(\alpha(y) \supset \beta) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$; 12, Th. ded.
14. $(\forall x\alpha(x) \supset \beta) \vdash \exists y(\alpha(y) \supset \beta)$; 13, $\mathcal{L}_p$
15. $\vdash (\forall x\alpha(x) \supset \beta) \supset \exists y(\alpha(y) \supset \beta)$; 14, Th. ded.

b. $\exists y(\alpha(y) \supset \beta) \supset (\forall x\alpha(x) \supset \beta)$

1. $\exists y(\alpha(y) \supset \beta)$; as
2. $\forall x\alpha(x)$; as
3. $\alpha(a) \supset \beta$; 1 $R\delta^*$
4. $\alpha(a)$; 2 Rd2
5. β; 3, 4 MP
6. $\exists y(\alpha(y) \supset \beta)$, $\forall x\alpha(a) \vdash \beta$; 1-5 [17]
7. $\vdash \exists y(\alpha(y) \supset \beta) \supset (\forall x\alpha(x) \supset \beta)$; 6, Reg. ded. aplicată de două ori.

Th 13 rezultă din a şi b prin $\mathcal{L}_p$.

Th 14. $(\exists x\alpha(x) \supset \beta) \equiv \forall y(\alpha(y) \supset \beta)$; y nu este liberă în β, iar $\alpha(x)$ şi $\alpha(y)$ sunt similare.

Demonstraţie (similar, exerciţiu).

Th 15. $(\beta \supset \forall x\alpha(x)) \equiv \forall y(\beta \supset \alpha(y))$; y nu este liberă în β, iar $\alpha(x)$ şi $\alpha(y)$ sunt similare.

a. $(\beta \supset \forall x\alpha(x)) \supset \forall y(\beta \supset \alpha(y))$

1. $\beta \supset \forall x\alpha(x)$; as
2. $\neg\forall y(\beta \supset \alpha(y))$; as
3. $\exists y\neg(\beta \supset \alpha(y))$; 2, Th 12
4. $\exists y(\beta \wedge \neg\alpha(y))$; 3, $\mathcal{L}_p$
5. $\beta \wedge \neg\alpha(a)$; 4, $R\delta^*$

---

[17] Comp. *Remarcă 1*, Regula δ^*

6. β; 5, $\mathcal{L}_p$

7. $\forall x\alpha(x)$; 1, 6, MP

8. $\neg\alpha(a)$; 5, $\mathcal{L}_p$

9. $\alpha(a)$; 7, Rd2

10. $\alpha(a) \wedge \neg\alpha(a)$; 9, 8, $\mathcal{L}_p$

11. $\beta \supset \forall x\alpha(x), \neg\forall y(\beta \supset \alpha(y)) \vdash \alpha(a) \wedge \neg\alpha(a)$; 1-10

12. $\beta \supset \forall x\alpha(x) \vdash \neg\forall y(\beta \supset \alpha(y)) \supset (\alpha(a) \wedge \neg\alpha(a))$; 11, Th. ded.

13. $\beta \supset \forall x\alpha(x) \vdash \forall y(\beta \supset \alpha(y))$; 12, $\mathcal{L}_p$

14. $\vdash (\beta \supset \forall x\alpha(x)) \supset \forall y(\beta \supset \alpha(y))$; 13 Th. ded

b. $\forall y(\beta \supset \alpha(y)) \supset (\beta \supset \forall x\alpha(x))$

1. $\forall y(\beta \supset \alpha(y))$, as

2. β; as

3. $\beta \supset \alpha(a)$; 1, Rd2

4. $\alpha(a)$; 2, 3 MP

5. $\forall x\alpha(x)$; 4, Gen

6. $\forall y(\beta \supset \alpha(y)), \beta \vdash \forall x\alpha(x)$; 1-5

7. $\vdash \forall y(\beta \supset \alpha(y)) \supset (\beta \supset \forall x\alpha(x))$; 6, Th. ded aplicată de două ori

Th 16. $(\beta \supset \exists x\alpha(x)) \equiv \exists y(\beta \supset \alpha(y))$; y nu este liberă în β, iar $\alpha(x)$ şi $\alpha(y)$ sunt similare.

Demonstraţie (similar, exerciţiu).

Formele normale prenexe

Definiţie. O formulă α a $\mathcal{L}_P$ este în forma normală prenexă dacă α are forma $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha^*$, unde Q_ix_i sunt cuantificatori, iar α^* este o formulă care nu conţine cuantificatori.

$Q_1x_1,...,Q_nx_n$ formează *prefixul*, iar α^* *matricea* formulei α.

Teorema formei normale prenexe. Orice formulă α a $\mathcal{L}_P$ poate fi adusă la o formă normală prenexă β, echivalentă ei.

Demonstraţie (inducţie pe gradul k al formulei α). Demonstrarea acestei teoreme presupune indicarea unui *procedeu efectiv* de obţinere a formei normale prenexe a formulei α.

Dacă $k = 0$, atunci $\beta = \alpha$. Presupunem acum că α are gradul n şi că pentru orice formulă al cărei grad k este strict mai mic decât n (i.e. $k < n$) putem construi forma ei normală prenexă β.

1. Presupunem că α este $\neg\gamma$. Atunci, prin ipoteză, putem construi o formulă δ, care este forma normală prenexă a formulei γ şi $\gamma \equiv \delta$. Şi deci $\neg\gamma \equiv \neg\delta$ (prin $\mathcal{L}_p$). Şi deci $\alpha \equiv \neg\delta$. Şi astfel, prin *Th 10, Th 12* şi *Th înloc. echival.* putem construi o formulă β în forma normală prenexă, astfel că $\neg\delta \equiv \beta$ şi deci $\alpha \equiv \beta$.

2. Presupunem acum că α are forma $\gamma \supset \delta$. Prin ipoteza inducţiei putem construi formulele γ^* şi δ^* în forma normală prenexă, astfel că $\gamma \equiv \gamma^*$ şi $\delta \equiv \delta^*$. Din faptul că

$(\gamma \supset \delta) \equiv (\gamma^* \supset \delta^*)$ deducem $\alpha \equiv (\gamma^* \supset \delta^*)$. Prin *Th 13-16* şi *Th. Înlocuirii echival.* mutăm cuantificatorii din prefixul formulelor γ^* şi δ^* în faţa formulei implicative şi obţinem formula β în forma normală prenexă, astfel că $\alpha \equiv \beta$.

3. α este formula $\forall x \gamma$. Prin ipoteza inducţiei, există o formulă γ^* în forma normală prenexă astfel că $\gamma \equiv \gamma^*$. Şi deci $\forall x \gamma \equiv \forall x \gamma^*$, adică $\alpha \equiv \forall x \gamma^*$. Însă $\forall x \gamma^*$ este în forma normală prenexă.

Exemplu. Fie α formula: $\exists x \neg \exists z (P(x) \supset Q(y,z)) \supset \forall y (P(y) \supset \neg \forall x Q(x,z))$

$\forall x[\neg \exists z(P(x) \supset Q(y,z)) \supset \forall y(P(y) \supset \neg \forall x Q(x,z))]$; formulă obţinută din α prin aplicarea Th 14.

$\forall x[\forall z \neg (P(x) \supset Q(y,z)) \supset \forall y(P(y) \supset \neg \forall x Q(x,z))]$; Th 10, $\mathcal{L}_p$, Th înloc

$\forall x \exists z^*[(\neg (P(x) \supset Q(y,z^*))) \supset \forall y(P(y) \supset \neg \forall x Q(x,z))]$; Th 13 (pentru respectarea restricţiei impuse de teoremă, întrucât z apare liberă în consecventul $\forall y(P(y) \supset \neg \forall x Q(x,z))$, redenumim variabila cuantificată, z, din formula $\forall z \neg (P(x) \supset Q(y,z))$ în z^*; schimbând variabilele legate).

$\forall x \exists z^* \forall y^*[\neg (P(x) \supset Q(y,z^*)) \supset (P(y^*) \supset \neg \forall x Q(x,z))]$; *Th. 15* (cu redenumirea variabilei y în y^*, ca mai sus).

$\forall x \exists z^* \forall y^*[\neg (P(x) \supset Q(y,z^*)) \supset (P(y^*) \supset \exists x \neg Q(x,z))]$; *Th. 12*

$\forall x \exists z^* \forall y^*[\neg (P(x) \supset Q(y,z^*)) \supset \exists x(P(y^*) \supset \neg Q(x,z))]$; *Th 16*, se aplică consecventului implicaţiei din parantezele drepte.

$\forall x \exists z^* \forall y^* \exists x^*[\neg (P(x) \supset Q(y,z^*)) \supset (P(y^*) \supset \neg Q(x^*,z))]$; *Th 16* (cu redenumirea variabilei legate x, în x^*, din consecvent).

Exerciţii. Aduceţi următoarele formule ale $\mathcal{L}_P$ la forma normală prenexă.

1. $\forall x(P(x) \supset Q(x,y)) \supset (\exists y P(y) \supset \exists z Q(y,z))$
2. $\neg \forall x(\exists y P(x,y) \supset Q(x,z)) \supset \exists z(P(x,z) \wedge \neg \forall y Q(y,x))$

Forme normale Skolem

Dacă din limbajul $\mathcal{L}_P$ al logicii predicatelor de ordinul întâi eliminăm simbolurile pentru constante şi pentru expresii funcţionale şi reţinem doar mulţimea infinit numărabilă a simbolurilor predicative, atunci pentru formulele acestui limbaj (fie el $\mathcal{L}_P^-$) putem construi o formă normală prenexă specială, în care *toţi cuantificatorii existenţiali preced toţi cuantificatorii universali*, numită *formă normală Skolem.*

Teorema formei normale Skolem. Orice formulă α a $\mathcal{L}_P^-$ admite o formă normală Skolem, β, astfel că $\vdash \alpha$ ddacă $\vdash \beta$.

Demonstraţie (inducţie pe rangul lui α). Vom pune în evidenţă un procedeu efectiv de construcţie a formei normale Skolem a unei formule date. Considerăm în cele ce urmează o formulă arbitrară α adusă deja în forma normală prenexă. Prin *rangul r* al unei formule α înţelegem numărul cuantificatorilor universali din α care preced cuantificatorii existenţiali. Dacă $r = 0$, atunci formula este deja în forma normală Skolem. Presupunem că pentru orice rang mai mic decât r se poate construi forma normală Skolem a formulei α. Fie r rangul lui α. α are aşadar forma: $\exists x_1,\ldots,\exists x_n \forall u \beta(x_1,\ldots,x_n,u)$, astfel încât singurele variabile libere din

β sunt cele specificate: $x_1,...,x_n,u$. Fie P^{n+1} un simbol predicativ $n+1$-adic care nu apare în α. Fie acum $\alpha_1 : \exists x_1,...,\exists x_n\, [(\forall u\beta(x_1,...,x_n,u) \supset P^{n+1}(x_1,...,x_n,u)) \supset \forall uP^{n+1}(x_1,...,x_n,u)]$.

Atunci următoarea relație are loc: $\vdash \alpha$ *ddacă* $\vdash \alpha_1$.

Presupunem $\vdash \alpha_1$. În demonstrația formulei α_1 înlocuim toate ocurențele formulelor elementare $P^{n+1}(z_1,...,z_n,w)$ cu $\beta^*(z_1,...,z_n,w)$[18], unde β^* se obține din β prin înlocuirea tuturor variabilelor legate, dar care au ocurențe libere în demonstrație, prin variabile noi (care nu apar în demonstrație) și obținem:

$\exists x_1,...,\exists x_n\, [(\forall u\beta^*(x_1,...,x_n,u) \supset \beta^*(x_1,...,x_n,u)) \supset \forall u\beta^*(x_1,...,x_n,u)]$.

Însă prin înlocuirea variabilelor legate, prin Corol. 2, Th. echival, din această formulă, obținem din nou,

$\exists x_1,...,\exists x_n\, [(\forall u\beta(x_1,...,x_n,u) \supset \beta(x_1,...,x_n,u)) \supset \forall u\beta(x_1,...,x_n,u)]$.

Însă $\forall u\beta(x_1,...,x_n,u) \supset \beta(x_1,...,x_n,u)$ este *Univ 1* și este deci demonstrabilă. Și astfel obținem $\vdash \exists x_1,...,\exists x_n \forall u\beta(x_1,...,x_n,u)$, adică $\vdash \alpha$ (prin Th. înloc. echival.)

Presupunem $\vdash \alpha$. Prin $R\delta^*$ obținem $\forall u\beta(a_1,...,a_n,u)$.

Însă $\vdash \forall u\gamma_1 \supset [\forall u(\gamma_1 \supset \gamma_2) \supset \forall u\gamma_2]$, pentru orice γ_1, γ_2 (cf. exerc 1, § Th. Ded. plus Th. ded). Așadar, obținem

$(\forall u\beta(a_1,...,a_n,u) \supset P^{n+1}(a_1,...,a_n,u)) \supset \forall uP^{n+1}(a_1,...,a_n,u)$ (prin MP). De unde, prin Rd3, $\exists x_1,...,\exists x_n\, [(\forall u\beta(x_1,...,x_n,u) \supset P^{n+1}(x_1,...,x_n,u)) \supset \forall uP^{n+1}(x_1,...,x_n,u)]$, adică α_1.

Forma normală prenexă a lui α_1 este o formulă α_2 de forma $\exists x_1,...,\exists x_n, \exists_u$ $Q_1 z_1,...,Q_s z_s \forall v\gamma$, unde γ n-are cuantificatori iar $Q_1 z_1,...,Q_s z_s$ este prefixul formulei β.

Evident, α_2 are rangul mai mic cu o unitate decât α. Însă, prin teorema formei normale, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Însă $\vdash \alpha$ ddacă $\vdash \alpha_1$. Și deci $\vdash \alpha$ ddacă $\vdash \alpha_2$. Prin ipoteza inducției, putem construi o formă normală Skolem pentru α_2, care este și formă normală Skolem pentru α.

Exemplu. Fie $\alpha : \forall x \forall y \exists z \gamma(x,y,z)$, unde γ nu conține cuantificatori.

α_1: 1. $\forall x(\forall y \exists z\gamma(x,y,z) \supset P(x)) \supset \forall xP(x)$, unde $P(x)$ nu apare în γ

Construim forma normală prenexă a formulei α_1:

2. $\exists x\{[\forall y\exists z\gamma(x,y,z) \supset P(x)] \supset \forall xP(x)\}$; Th 13
3. $\exists x\{\exists y[\exists z\gamma(x,y,z) \supset P(x)] \supset \forall xP(x)\}$; Th 13
4. $\exists x\{\exists y\forall z[\gamma(x,y,z) \supset P(x)] \supset \forall xP(x)\}$; Th 14
5. $\exists x\forall y\{\forall z[\gamma(x,y,z) \supset P(x)] \supset \forall xP(x)\}$; Th 14
6. $\exists x\forall y\exists z\{(\gamma(x,y,z) \supset P(x)) \supset \forall xP(x)\}$; Th 13
7. $\exists x\forall y\exists z\forall v\{(\gamma(x,y,z) \supset P(x)) \supset P(v)\}$; Th 15

Repetăm acum aceste operații în raport cu formula nou obținută. Fie $\delta(x,y,z,v)$ matricea formulei de mai sus (i.e. $(\gamma(x,y,z) \supset P(x)) \supset P(v)$). Fie acum Q un simbol predicativ diadic care nu apare în δ.

$\exists x[\forall y[\exists z\forall v\delta(x,y,z,v) \supset Q(x,y)] \supset \forall yQ(x,y)]$

$\exists x\exists y\, [(\exists z\forall v\delta(x,y,z,v) \supset Q(x,y)) \supset \forall yQ(x,y)]$; Th 13

$\exists x\exists y\ \exists z\forall v\, ([\delta(x,y,z,v) \supset Q(x,y)] \supset \forall yQ(x,y))$; Th 13, Th 14

[18] Pentru substituția unei formule elementare a $\mathcal{L}_P$ cu o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_P$ comp. 3.3.2., reg. a3.

$\exists x \exists y \exists z \forall v \forall w([\delta(x,y,z,v) \supset Q(x,y)] \supset Q(x,w))$; Th 15.

Şi deci forma normală Skolem a formulei α este:

$$\exists x \exists y \exists z \forall v \forall w([((\gamma(x,y,z) \supset P(x)) \supset P(v)) \supset Q(x,y)] \supset Q(x,w))$$

Remarcă.

Dată fiind formula α, am construit mai întâi formula α_1 după cum urmează. Întrucât prexiful formulei α (aflată deja în forma normală prenexă) nu începe cu un cuantificator „$\exists$", avem, corespunzător $n=0$ şi deci vom considera un predicat monadic $P(x)$ care nu apare în formula γ şi construim astfel α_1. Întrucât α_1 are forma echivalentului stâng din Th 13, prin aplicarea acestei teoreme obţinem, corespunzător, formula din 2, în care, în locul „$\forall$" apare „$\exists$". Apoi, în *primul* condiţional din formula care succede cuantificatorului existenţial (i.e. formula din acolade) considerăm cuantificatorul universal „$\forall y$" ca prefixând formula β (i.e. $\exists z \gamma(x,y,z)$). Condiţionalul are, din nou, forma echivalentului stâng din Th 13. De unde, prin aplicarea Th 13 asupra *acestui* condiţional obţinem formula din 3. Acum, formula care succede cuantificatorului „$\exists y$" din primul condiţional din formula 3 (adică formula $\exists z \gamma(x,y,z) \supset P(x)$) are forma echivalentului stâng din Th 14. De unde, prin aplicarea Th 14 asupra *acestui* condiţional obţinem formula din 4, prin schimbarea lui „$\exists z$" cu „$\forall z$". Însă în 4 domeniul cuantificatorului „$\exists x$" este o formulă de forma echivalentului stâng din Th 14 (i.e. formula din acolade). Şi deci încă o aplicaţie a acestei teoreme asupra formulei din acolade transformă cuantificatorul „$\exists y$" în „$\forall y$". Apoi, printr-o nouă aplicare a Th 13 asupra formulei din acolade, din 5, obţinem formula din 6, al cărei prefix este prefixul formulei α în care primul $\forall$ devine $\exists$. Iar formula din acolade, din 6, are forma echivalentului stâng al Th 15. De unde, prin aplicarea Th 15 scoatem cuantificatorul universal din subformula $\forall x P(x)$ în prefix şi redenumim variabila x, pe care o leagă acest cuantificator, în v (deoarece x apare liberă în $\gamma(x,y,z) \supset P(x)$). Obţinem astfel formula din 7, al cărei rang este cu o unitate *mai mic* decât rangul formulei α. Această formulă, fie α_2, este în forma normală prenexă, în care $n=1$ şi astfel considerăm acum un predicat *diadic*, $Q(x,y)$, care nu apare în δ şi repetăm algoritmul de mai sus, obţinând, în fine, forma normală Skolem a formulei α.

Corectitudinea şi completitudinea sistemului axiomatic Q

Teorema corectitudinii. *Dacă* $\vdash \alpha$, *atunci* $\models \alpha$.

Demonstraţie. Ceea ce trebuie demonstrat este următorul fapt: axiomele sunt formule valide ale $\mathcal{L}_P$ iar cele două reguli de deducţie conservă în concluzie adevărul premiselor.

Demonstrarea validităţii axiomelor.

Demonstrarea validităţii axiomelor Ax1-Ax3 este cea din 2.3.3. cu menţiunea că formulele considerate sunt formule ale logicii predicatelor, deoarece, aşa cum am văzut în 3.1.2., aceste formule pot fi doar adevărate sau false într-un model M şi o asignare μ în M, iar regulile de adevăr ale operatorilor logici ai logicii propoziţiilor sunt înglobate în $\mathcal{L}_P$ (logica predicatelor fiind o extensie a logicii propoziţiilor).

Univ 1: $\forall x \alpha(x) \supset \alpha(x/t)$; t este liber pentru x în $\alpha(x)$ (comp. exemplul 3 din 3.1.2.).

Univ 2: $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x \beta)$; x nu apare liberă în α (comp. exemplul 1 din 3.1.2.).

Demonstrarea validității regulilor de deducție

Trebuie arătat că orice formulă obținută prin aplicarea unei reguli de deducție conservă în concluzie validitatea premisei (premiselor).

Modus ponens. Dacă α și $\alpha \supset \beta$ sunt formule valide atunci β este validă, fapt ce rezultă imediat din regulile semantice ale operatorului $\supset$.

Gen. Fie $\alpha(x)$ o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_P$ care conține variabila liberă x. Fie $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ un model arbitrar. Presupunem că $\alpha(x)$ este adevărată în M. Atunci, prin definiție $[\alpha(x)]^{\iota,\mu} = 1$ pentru orice μ în M. Respectiv, dacă μ este o asignare arbitrară iar ν este o x-variantă a lui μ, atunci $[\alpha(x)]^{\iota,\nu} = 1$, pentru orice ν (x-variantă a lui μ). Și deci $[\forall x\alpha(x)]^{\iota,\mu} = 1$, pentru orice μ. Cum M este un model arbitrar, rezultă că $\forall x\alpha(x)$ este adevărată în *orice* model (i.e. validă) (Și reciproca poate fi similar argumentată).

Remarcă. Dacă $\alpha(x)$ este formula de mai sus, atunci $\forall x\alpha(x)$ este *închiderea ei universală* (Dacă x nu este liberă în α, atunci $\forall x\alpha(x) = \alpha(x)$). Prin închidere universală a unei formule a $\mathcal{L}_P$ înțelegem, în general, prefixarea formulei respective cu cuantificatori universali pentru *toate* variabilele ei libere. În acord cu cele spuse mai sus avem: α *este validă ddacă închiderea ei universală este validă.*

Completitudinea sistemului axiomatic Q

Lema 1. Orice instanțiere α a unei formule valide a $\mathcal{L}_P$ este o teoremă a sistemului Q.

Demonstrație. α rezultă deci dintr-o formulă validă β a $\mathcal{L}_P$ prin substituție. Fie S sistemul axiomatic (corect și complet) de logică propozițională din 2.3.2. Prin teorema de completitudine, β este o teoremă a lui S. Există deci o demonstrație a acestei formule în S. În această demonstrație facem aceleași substituții de formule ale logicii predicatelor pentru variabilele propoziționale ca acele substituții făcute în obținerea lui α din β, iar pentru toate celelalte variabile propoziționale din demonstrație, care nu apar în β, punem formule arbitrare. Șirul de formule care rezultă este o demonstrație a formulei α. E ușor de constatat, această demonstrație nu utilizează decât schemele de axiome 1-3 și MP.

Lema 2. Dacă non $\vdash \neg\alpha$ (unde $\neg\alpha$ este o formulă închisă), atunci sistemul Q', obținut din Q prin adăugarea formulei α ca o nouă axiomă, este consistent.

Demonstrație (contrapoziție). Presupunem că sistemul Q' este inconsistent. Rezultă că există o formulă β, astfel încât $\vdash_{Q'} \beta$ și $\vdash_{Q'} \neg\beta$. Însă $\vdash_{Q'} \beta \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$ (prin Lema 1, deoarece este o instanțiere a formulei valide a $\mathcal{L}_P$: $q \supset (\neg q \supset p)$). Și astfel $\vdash_{Q'} \neg\alpha$ (printr-o dublă aplicare a MP). Și deci $\alpha \vdash_Q \neg\alpha$ (fiindcă $\vdash_{Q'} \neg\alpha$, iar Q' este Q plus α). Cum $\neg\alpha$ este o formulă închisă (prin presupoziție), rezultă că și α este o formulă închisă. Și astfel, prin *Teorema deducției*, $\vdash_Q \alpha \supset \neg\alpha$. Însă $\vdash_Q (\alpha \supset \neg\alpha) \supset \neg\alpha$, prin *Lema 1*. Și deci, ca mai sus, $\vdash_Q \neg\alpha$, ceea ce contrazice ipoteza lemei.

Similar, dacă *non* $\vdash_Q \alpha$, atunci Q' (i.e. Q plus $\neg\alpha$) este un sistem consistent.

Definiție. Un sistem axiomatic Q este (sintactic) complet ddacă pentru orice formulă închisă α are loc: $\vdash_Q \alpha$ sau $\vdash_Q \neg\alpha$.

Lema lui Lindenbaum. Orice sistem axiomatic Q admite o extensie consistentă și completă Q^*.

Demonstrație. Considerăm mai întâi o listă a tuturor formulelor închise ale sistemului Q, fie acestea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Definim apoi un șir de sisteme $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ în felul următor:

$Q_0 = Q$

$Q_{n+1} = Q_n \cup \alpha_{n+1}$, dacă sistemul astfel obținut este consistent (i.e. *non* $\vdash_{Q_n} \neg\alpha_{n+1}$)

$Q_{n+1} = Q_n$, în caz contrar.

Fie acum $Q^* = \cup Q_i \, (i = 0,1,2,\ldots)$

a) Q^* *este consistent.*

Demonstrația se rezumă la a arăta că toate sistemele Q_i sunt consistente (pentru că orice demonstrație de inconsistență, fiind un șir *finit* de formule, este o demonstrație în vreun Q_i).

Inducție 1. $Q_0 (= Q)$ este consistent (prin asumpție)

2. Dacă Q_n este consistent, atunci Q_{n+1} este consistent, deoarece Q_{n+1} se obține din Q_n prin adăugarea formulei α_{n+1}, cu condiția că $\neg\alpha_{n+1}$ nu este demonstrabilă în Q_n. De unde, prin *Lema 2*, obținem rezultatul.

b) Q^* *este complet.*

Aceasta rezultă din definirea sistemelor Q_i, căci pentru orice formulă închisă α_{i+1}, dacă $\neg\alpha_{i+1}$ nu este demonstrabilă în Q_i, atunci α_{i+1} se adaugă ca o nouă axiomă sistemului Q_i și se obține Q_{i+1}.

Formulele sistemului Q și deci și formulele extensiilor Q_i sunt formule ale aceluiași limbaj $\mathcal{L}_P$. Fie acum $\mathcal{L}_P^+ = \mathcal{L}_P \cup C$, unde C este o mulțime infinit numărabilă de constante noi (i.e. care nu apar în $\mathcal{L}_P$). Fie Q^+ sistemul Q ale cărui formule sunt formule ale $\mathcal{L}_P^+$.

a) Q^+ *este consistent.*

Reductio. Dacă Q^+ ar fi inconsistent, atunci ar exista o formulă β astfel încât $\vdash_{Q^+} \beta$ și $\vdash_{Q^+} \neg\beta$. Și deci $\vdash_{Q^+} \beta \wedge \neg\beta$. Această demonstrație conține un număr finit de constante și de variabile individuale. Înlocuim fiecare constantă din demonstrație cu o variabilă care nu apare în demonstrație. În felul acesta axiomele sistemului Q^+ devin axiome ale sistemului Q iar regulile de deducție își conservă aplicabilitatea. Și deci ceea ce obținem prin înlocuirea de mai sus este o demonstrație în Q a unei formule de genul $\beta^* \wedge \neg\beta^*$, unde β^* este formula β în care nu apar constante din C. Și deci și sistemul Q ar fi inconsistent.

b) Q^+ *este ω-complet*[19]

Fie $\alpha_1(x_{i_1}), \alpha_2(x_{i_2}), \ldots$ o enumerare a tuturor formulelor sistemului Q^+, în care apare cel mult o variabilă liberă. Considerăm acum o ordonare a acestor variabile, astfel încât x_{i_m} este variabilă liberă a formulei α_m, dacă α_m are o variabilă liberă; în caz contrar fie $x_{i_m} = x_1$. Fie acum formula:

$$\gamma_m = \neg\forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m}) \supset \neg\alpha_m(c_{j_m})$$

unde c_{j_m} este o constantă nouă, neconținută în formulele $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ și este diferită de toate constantele $c_{j_1}, \ldots, c_{j_{m-1}}$.

Fie $Q_0^+ = Q^+$, fie $Q_n^+ = Q_0^+ \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, fie $Q_{\inf}^+ = Q^+ \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$.

a) $Q_{\inf}^+$ *este consistent.*

[19] Comp. *Definiție* (mai jos).

Trebuie să arătăm că fiecare $Q_i^+ (i = 0,1,2,...)$ este consistent.

Inducție. 1. Q_0^+ este consistent (prin ipoteză).

2. Dacă Q_n^+ este consistent, atunci Q_{n+1}^+ este consistent; unde $Q_{n+1}^+ = Q_n^+ \cup \{\gamma_{n+1}\}$.

Demonstrăm 2 prin *reductio*. Presupunem că sistemul Q_n^+ este consistent iar Q_{n+1}^+ este inconsistent. Avem aşadar

1. $Q_{n+1}^+ \vdash \delta$ (i.e. în Q_{n+1}^+ este demonstrabilă o formulă δ)[20].
2. $Q_{n+1}^+ \vdash \neg\delta$
3. $Q_{n+1}^+ \vdash \delta \supset (\neg\delta \supset \varepsilon)$, unde ε este o formulă arbitrară (prin *Lema 1*).
4. $Q_{n+1}^+ \vdash \neg\gamma_{n+1}$; unde ε este formula $\neg\gamma_{n+1}$, adică $\neg[\neg\forall x_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}(x_{i_{n+1}}) \supset \neg\alpha_{n+1}(c_{j_{n+1}})]$
5. $Q_n^+, \gamma_{n+1} \vdash \neg\gamma_{n+1}$
6. $Q_n^+ \vdash \gamma_{n+1} \supset \neg\gamma_{n+1}$ (γ_{n+1} fiind o formulă închisă)
7. $Q_n^+ \vdash \neg\gamma_{n+1}$; prin $(\delta \supset \neg\delta) \supset \neg\delta$ şi MP, adică

   $Q_n^+ \vdash \neg[\neg\forall x_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}(x_{i_{n+1}}) \supset \neg\alpha_{n+1}(c_{j_{n+1}})]$, respectiv

   în Q_n^+ este demonstrabilă o formulă de forma $\neg[\neg\varepsilon_1 \supset \neg\varepsilon_2]$,

   echivalent $Q_n^+ \vdash \neg\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, ceea ce implică

   $Q_n^+ \vdash \neg\varepsilon_1$ (prin $(\neg\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \supset \neg\varepsilon_1$) şi

   $Q_n^+ \vdash \varepsilon_2$ (prin $(\neg\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \supset \varepsilon_2$); ceea ce înseamnă
8. $Q_n^+ \vdash \neg\forall x_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}(x_{i_{n+1}})$ şi
9. $Q_n^+ \vdash \alpha_{n+1}(c_{j_{n+1}})$
10. $Q_n^+ \vdash \alpha_{n+1}(x_q)$; 9, deoarece constanta $c_{j_{n+1}}$ nu apare în formulele $\gamma_1,...,\gamma_n$ iar x_q este o variabilă care nu apare în demonstrația formulei $\alpha_{n+1}(c_{j_{n+1}})$ în Q_n^+.
11. $Q_n^+ \vdash \forall x_q \alpha_{n+1}(x_q)$; 10, *Gen*
12. $Q_n^+ \vdash \forall x_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}(x_{i_{n+1}})$; 11, Th 7,

rezultat care contrazice 8.

Şi cum toate Q_i^+ sunt consistente, rezultă că sistemul Q_{inf}^+ este, de asemenea, consistent. Q_{inf}^+ este însă o extensie consistentă a sistemului Q^+. Şi deci, prin *Lema lui Lindenbaum*, Q_{inf}^+ admite o extensie maximal consistentă, fie aceasta Q'.

Th. χ_0 satisfiabilității. α este adevărată în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ ddacă $\vdash_{Q^+} \alpha$.

Trebuie să arătăm, aşadar, că există un model M astfel încât echivalența dintre adevărul unei formule α în M şi demonstrabilitatea formulei α în sistemul Q' are loc.

Remarcă. Fie, în cele ce urmează, $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ un model Herbrand, adică un model în care domeniul Ω este mulțimea infinit numărabilă a tuturor termenilor închişi iar ι este funcția identitate (i.e. pentru orice termen închis t are loc: $t^\iota = t$)[21]. Cum într-un asemenea

---

[20] Din motive tipografice sistemul în care se face demonstrația este menționat în frontul simbolului „ $\vdash$ ”.
[21] Comp. 3.1.2.

model asignările şi substituţiile coincid, vom avea, pentru orice termen t_i (închis sau nu): $(t_i)^{\iota,\mu} = (\mu(t_i))^{\iota}$. Iar ceea ce obţinem în urma acestor operaţii este întotdeauna un termen *închis*. La fel stau lucrurile şi cu formulele $\mathcal{L}_P$. Dacă, de exemplu, α este formula elementară $P(t_1,\ldots,t_n)$, atunci $(P(t_1,\ldots,t_n))^{\iota,\mu} = P^{\iota}(t_1^{\iota,\mu},\ldots,t_n^{\iota,\mu})$. Respectiv,
$(\mu(P(t_1,\ldots,t_n)))^{\iota} = (P(\mu(t_1),\ldots,\mu(t_n)))^{\iota} = P^{\iota}((\mu(t_1))^{\iota},\ldots,(\mu(t_n))^{\iota})$, şi deci
$P^{\iota}(t_1^{\iota,\mu},\ldots,t_n^{\iota,\mu}) = P^{\iota}((\mu(t_1))^{\iota},\ldots,(\mu(t_n))^{\iota})$, unde termenii argumente $t_i^{\iota,\mu}$, echivalent $(\mu(t_i))^{\iota}$ sunt termeni *închişi*. Şi astfel şi formulele elementare care-i conţin sunt formule *închise*, fiind astfel adevărate sau false în modelul $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ (i.e. valoarea lor de adevăr în M depinde doar de funcţia ι a modelului).

Pentru formulele elementare $P(t_1,\ldots,t_n)$ vom considera în cele ce urmează că $[P(t_1,\ldots,t_n)]^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\vdash_{Q^+} P(t_1^{\iota,\mu},\ldots,t_n^{\iota,\mu})$ şi va trebui să arătăm că această echivalenţă are loc pentru orice formulă. Însă cum toate teoremele sistemului Q^+ sunt teoreme ale sistemului Q' este suficient să demonstrăm echivalenţa: α este adevărată în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ ddacă $\vdash_{Q'} \alpha$.

Presupunem că echivalenţa teoremei are loc pentru orice formulă al cărei grad este mai mic decât gradul formulei α şi arătăm că ea are loc şi pentru α.

1. Teorema are loc pentru formulele elementare (prin ipoteza făcută mai sus).
2. a) Formula α are forma $\neg\beta$

   $\neg\beta = 1$ ddacă $\beta = 0$ ddacă *non* $\vdash_{Q'} \beta$ (prin ipoteza inducţiei) ddacă $\vdash_{Q'} \neg\beta$ (prin compl. sint.).

   b) Formula α are forma $\beta \supset \gamma$.

   $\beta \supset \gamma = 0$ ddacă $\beta = 1$ şi $\gamma = 0$ ddacă $\vdash_{Q'} \beta$ şi *non* $\vdash_{Q'} \gamma$ (prin ipot. ind.) ddacă $\vdash_{Q'} \beta$ şi $\vdash_{Q'} \neg\gamma$ (prin compl. sint.) ddacă $\vdash_{Q'} \neg(\beta \supset \gamma)$ (prin $\beta \supset (\neg\gamma \supset \neg(\beta \supset \gamma))$ şi MP. Şi deci $\beta \supset \gamma = 1$ ddacă *non* $\vdash_{Q'} \neg(\beta \supset \gamma)$ (contrapoz) ddacă $\vdash_{Q'} \beta \supset \gamma$(prin compl. sint.).

   c) Formula α are forma $\forall x \beta$.

   Fie α formula $\forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m})$. Şi deci $x = x_{i_m}$ iar β este $\alpha_m(x_{i_m})$.

   1. Dacă α este adevărată în M, atunci $\vdash_{Q'} \alpha$.

   Reductio. Presupunem că α este adevărată şi *non* $\vdash_{Q'} \alpha$. Rezultă că $\vdash_{Q'} \neg\alpha$ (prin compl. sint.), adică $\vdash_{Q'} \neg\forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m})$. Însă, prin γ_m, obţinem $\vdash_{Q'} \neg\alpha_m(x_{i_m})$. Însă $\forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m})$ (i.e. formula α) este adevărată (prin presupoziţie). Şi astfel este adevărată în M şi formula $\alpha_m(c_{j_m})$ (prin Exemplul 3, 3.1.2). Şi deci $\vdash_{Q'} \alpha_m(x_{i_m})$, ceea ce contrazice ideea consistenţei sistemului Q'.

   2. Dacă $\vdash_{Q'} \alpha$, atunci α este adevărată în M.

   Reductio. Presupunem că $\vdash_{Q'} \alpha$ şi $\alpha = 0$ în M. Din falsitatea formulei α, adică $\forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m})$, în modelul Herbrand $M = \langle \Omega, t \rangle$ conchidem că există un termen $t \in \Omega$, astfel încât $\alpha_m(x_{i_m}/t)$ este falsă (comp. Remarcă 3.1.2). Însă $\vdash_{Q'} \forall x_{i_m} \alpha_m(x_{i_m})$ (prin presupoz).

Şi deci $\vdash_{Q'} \alpha_m(x_{i_m}/t)$ (prin *Univ. 1*). Aşadar, formula $\alpha_m(x_{i_m}/t)$ este adevărată în *M* (prin ipot. ind), ceea ce contrazice propria-i falsitate, mai sus obţinută.

Cum echivalenţa teoremei are loc pentru Q', rezultă că ea are loc pentru Q^+ şi deci pentru *Q*.

Corolar (completitudinea sistemului Q). Dacă $\vDash \alpha$, *atunci* $\vdash_Q \alpha$.

Demonstraţie (*reductio*). Cum orice formulă este validă/demonstrabilă dacă şi numai dacă închiderea ei universală este validă/demonstrabilă, e suficient să considerăm doar formulele închise. Fie, aşadar, α o formulă validă închisă. Presupunem *non* $\vdash_Q \alpha$, atunci prin adăugarea formulei $\neg\alpha$ ca o nouă axiomă la sistemul *Q* obţinem un sistem Q' consistent (prin *Lema 2*). Şi deci următoarea echivalenţă are loc (prin teorema χ_0-satisfiabilităţii)

$$\neg\alpha \text{ este adevărată în } M = \langle \Omega, \iota \rangle \text{ ddacă } \vdash_{Q'} \neg\alpha$$

Însă, cum α este o formulă validă, α este adevărată în $M = \langle \Omega, \iota \rangle$. Imposibil, α şi $\neg\alpha$ nu pot fi simultan adevărate într-un model. Şi deci α este o teoremă a sistemului *Q*.

Corolar (Teorema Löwenheim/Skolem). Dacă α *este satisfiabilă, atunci* α *este* χ_0-*satisfiabilă.*

Demonstraţie. Presupunem că α este satisfiabilă. Există deci un model *M* în care α este adevărată. Cum pentru un model *M* are loc: $\alpha = 1$ ddacă $\neg\alpha = 0$, rezultă că α şi $\neg\alpha$ nu pot fi simultan adevărate. Şi deci, dacă α este satisfiabilă, atunci α este consistentă. Şi astfel, prin Th. χ_0-satisfiabilităţii, α este χ_0-satisfiabilă.

Remarcă. Demonstraţia de mai sus a completitudinii sistemului axiomatic *Q* este o demonstraţie tip Henkin[22]. Aceste demonstraţii se bazează pe construcţia unor mulţimi consistente şi deci satisfiabile de formule ale $\mathcal{L}_P$, aşa cum, într-o formă simplificată, am procedat în demonstrarea completitudinii în logica propoziţiilor (comp. 2.3.3). Prezentăm, mai jos, o altă demonstraţie de completitudine (tip Henkin) a sistemului axiomatic *Q*. De data aceasta vom utiliza mecanismul teoretic din 2.3.3.

Completitudinea sistemului axiomatic *Q* (variantă)

Prin $\mathcal{L}_P$ vom înţelege în continuare un limbaj al logicii predicatelor, similar celui descris în 3.1 cu următoarea menţiune: mulţimea $\mathcal{T}$ a termenilor logici conţine doar variabile individuale. Extindem acest limbaj în limbajul $\mathcal{L}_P^+ = \mathcal{L}_P \cup C$ unde C este o mulţime infinit numărabilă de constante $\{c_1, c_2, ...\}$. Corespunzător, formulele $\mathcal{L}_P^+$ vor conţine ca argumente şi elemente ale mulţimii C. *Univ 1*, de exemplu, are acum forma $\forall x\alpha \supset \alpha(x/t)$, unde *t* este orice variabilă *y* sau orice constantă $c \in C$. Similar, *Th. 1* are acum forma $\alpha(x/t) \supset \exists x\alpha$. Dacă *t* este o constantă $c \in C$, atunci vom avea $\alpha(c) \supset \exists x\alpha$ (unde *x* este o variabilă care nu apare în α) etc.

Fie Q^+ sistemul axiomatic *Q*, dar ale cărui formule sunt formule ale $\mathcal{L}_P^+$.

Lemă. Dacă Q este consistent, atunci Q^+ *este consistent.*

Demonstraţie (contrapoziţie). Presupunem că sistemul Q^+ este inconsistent. Există deci o formulă α^+ astfel încât $\vdash_{Q^+} \alpha^+$ şi $\vdash_{Q^+} \neg\alpha^+$ şi deci $\vdash_{Q^+} \alpha^+ \wedge \neg\alpha^+$. Cum orice

[22] Comp. L. Henkin, The completeness of the first-order functional calculus, *The Journal of Symbolic Logic*, 14/1949, 159-166.

demonstrație este un șir finit de formule, demonstrația în Q^+ a formulei $\alpha^+ \wedge \neg\alpha^+$ va conține un număr finit de constante, fie acestea $c_{i_1},\dots,c_{i_n}$, și un număr finit de variabile individuale. Alegem acum n variabile individuale din $\mathcal{L}_P$, în care este construit sistemul Q, și care nu apar în demonstrația formulei $\alpha^+ \wedge \neg\alpha^+$. Fie acestea $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$. Înlocuim acum, *corespunzător*, fiecare constantă c_k, care apare în demonstrația formulei $\alpha^+ \wedge \neg\alpha^+$, cu variabila x_k din șirul ales $(i_1 \leq k \leq i_n)$. Această înlocuire transformă axiomele sistemului Q^+ în axiome ale sistemului Q. Fie α formula care rezultă din formula α^+, în urma acestei înlocuiri. E clar, în acest fel demonstrația formulei $\alpha^+ \wedge \neg\alpha^+$ din sistemul Q^+ trece în demonstrația formulei $\alpha \wedge \neg\alpha$ în sistemul Q. Și astfel sistemul Q este inconsistent.

Demonstrarea *Lemei lui Lindenbaum* este, în esență, cea din 2.3.3. Însă, în logica predicatelor această demonstrație reclamă anumite precauții. Respectiv, din faptul că o formulă de forma $\forall x\alpha$ nu aparține unei mulțimi maximal consistente Γ trebuie să putem conchide că o formulă $\alpha(x/c)$, unde $c \in C$, nu aparține mulțimii Γ. Însă acest lucru nu are loc pentru orice mulțime maximal consistentă de formule, motiv pentru care, în cele ce urmează, vom avea în vedere doar mulțimi *ω-complete*.

Definiție. O mulțime de formule Δ se numește ω-completă dacă are loc: dacă formulele $\alpha(x/c)$ aparțin mulțimii Δ, pentru orice constantă $c \in C$, atunci și formula $\forall x\alpha$ aparține mulțimii Δ.

Echivalent: Dacă formula $\forall x\alpha$ nu aparține mulțimii Δ, atunci există o constantă $c \in C$ astfel încât $\alpha(x/c)$ nu aparține mulțimii Δ.

Remarcă. Uneori ideea ω-completitudinii apare exprimată astfel: dacă o formulă de forma $\exists x\alpha$ aparține mulțimii Δ, atunci există o constantă $c \in C$, astfel încât formula $\alpha(x/c)$ este un element al mulțimii Δ (sens care rezultă din definiția de mai sus).

Lema lui Lindenbaum (variantă). Orice mulțime Q^+-consistentă Δ de formule admite o extensie maximal Q^+-consistentă și ω-completă Γ, astfel încât $\Delta \subseteq \Gamma$[23].

Demonstrație. Mulțimea de formule ale $\mathcal{L}_P^+$ este infinit numărabilă și deci putem presupune o ordonare a lor în lista: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Considerăm că toate formulele din Δ sunt *închise*[24]. Alcătuim apoi un șir infinit de mulțimi de formule $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$, în modul indicat mai jos. Plecând de la mulțimea Δ, construim mai întâi șirul $\Delta_0^0, \Delta_0^1, \Delta_0^2, \dots$, astfel:

$\Delta_0^0 = \Delta$

$\Delta_0^{n+1} = \Delta_0^n \cup \{\alpha(x/c) \supset \forall x\alpha\}$, dacă cea de-a $(n+1)$-a formulă din listă este $\forall x\alpha$; unde c este prima constantă a șirului $c_1, c_2, \dots$ care nu apare nici în $\forall x\alpha$, nici în formulele din Δ_0^n.

$\Delta_0^{n+1} = \Delta_0^n$, dacă cea de-a $(n+1)$-a formulă din listă are altă formă logică.

Fie acum $\Delta_0 = \cup \Delta_0^i \ (i = 0,1,2,\dots)$

1. Fiecare din mulțimile Δ_0^i este Q^+-consistentă.

Argument (inducție).

[23] Comp. 2.3.3.

[24] Fapt care nu restrânge generalitatea demonstrației, căci dacă admitem ca Δ să conțină variabile libere, atunci înlocuim toate constantele (diferite între ele), care apar în aceste formule, cu variabile (diferite între ele).

a) Mulţimea $\Delta_0^0 = \Delta$ este Q^+-consistentă (prin presupoziţie).

b) Dacă mulţimea Δ_0^n este Q^+-consistentă, atunci şi Δ_0^{n+1} este Q^+-consistentă. Cazul în care cele două mulţimi coincid este evident. Să considerăm celălalt caz, în care $\Delta_0^{n+1} = \Delta_0^n \cup \{\alpha(x/c) \supset \forall x\alpha\}$. Presupunem că Δ_0^{n+1} este Q^+-inconsistentă. Rezultă că există o formulă β astfel încât

1. $\Delta_0^n,\ \alpha(x/c) \supset \forall x\alpha \vdash \beta$ şi
2. $\Delta_0^n,\ \alpha(x/c) \supset \forall x\alpha \vdash \neg\beta$, respectiv
3. $\Delta_0^n,\ \alpha(x/c) \supset \forall x\alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta$; $\mathcal{L}_p$
4. $\Delta_0^n \vdash (\alpha(x/c) \supset \forall x\alpha) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$; Th. ded.
5. $\Delta_0^n \vdash (\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$; din 4, prin înlocuirea constantei c din $\alpha(x/c)$ cu o variabilă y care nu apare anterior în nici o formulă.
6. $\Delta_0^n \vdash \forall y[(\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha) \supset (\beta \wedge \neg\beta)]$; 5, Gen
7. $\Delta_0^n \vdash \exists y(\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$; 6, prin Th 14, MP.
8. $\Delta_0^n \vdash (\forall y\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha) \supset (\beta \wedge \neg\beta)$; 7, prin Th 13, Th. Înloc.
9. $\Delta_0^n \vdash \beta \wedge \neg\beta$; 8, Th 7, MP.

Şi astfel, din presupoziţia Q^+-inconsistenţei mulţimii Δ_0^{n+1} a rezultat Q^+-inconsistenţa mulţimii Δ_0^n. De unde, prin contrapoziţie, rezultă b).

Remarcă. Trecerea de la 4 la 5 este perfect justificată, deoarece prin înlocuirea într-o demonstraţie a unei constante cu o variabilă *nouă* axiomele se transformă în axiome iar regulile de deducţie îşi conservă valabilitatea. Şi deci dacă este deductibilă o formulă care conţine o variabilă c, atunci este deductibilă şi formula obţinută prin înlocuirea constantei cu o nouă variabilă.

2. *Mulţimea* Δ_0 *este* Q^+*-consistentă.*

Argument. Dacă Δ_0 ar fi Q^+-inconsistentă, ar exista o submulţime finită a acestei mulţimi, care ar fi Q^+-inconsistentă. Însă, am văzut mai sus, acest lucru nu este posibil, deoarece toate mulţimile Δ_0^i sunt Q^+-consistente.

Acum, construcţia şirului de mulţimi de formule $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ are loc exact ca în cazul logicii propoziţionale. Respectiv, construită fiind mulţimea Δ_n, mulţimea Δ_{n+1} se obţine prin adăugarea la Δ_n, a formulei α_{n+1}, dacă rezultatul obţinut este o mulţime Q^+-consistentă; în caz contrar cele două mulţimi, Δ_{n+1} şi Δ_n, coincid.

Fie $\Gamma = \cup\Delta_i (i = 0,1,2,\ldots)$, adică Γ este mulţimea tuturor mulţimilor $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Acum, demonstrarea *Lemei lui Lindenbaum* se desfăşoară ca în logica propoziţiilor. Mulţimea Γ este aşadar maximală şi Q^+-consistentă. Mai mult, Γ este ω*-completă*. Respectiv, dacă toate formulele $\alpha(x/c)$ aparţin mulţimii Γ, atunci şi formula $\forall x\alpha$ aparţine lui Γ. Echivalent, dacă $\forall x\alpha$ nu aparţine lui Γ, atunci există $c \in C$ astfel încât $\alpha(x/c)$ nu este în Γ.

Argument. Presupunem că $\forall x\alpha \notin \Gamma$. Rezultă că $\neg\forall x\alpha \in \Gamma$ (prin maximalitatea lui Γ). Presupunem că $\forall x\alpha$ este a n-a formulă a şirului considerat. În acest caz, pentru o constantă $c \in C$, formula $\alpha(x/c) \supset \forall x\alpha$ aparţine mulţimii Δ_0^n (în acord cu construcţia acestei

mulțimi) și deci aparține mulțimii Γ. Din faptul că formulele $\alpha(x/c) \supset \forall x\alpha$ și $\neg\forall x\alpha$ aparțin lui Γ rezultă că $\neg\alpha(x/c) \in \Gamma$ și astfel $\alpha(x/c) \notin \Gamma$.

Teorema satisfiabilității. Orice mulțime Q^+-consistentă de formule Δ este χ_0-satisfiabilă (i.e. satisfiabilă în domeniul numerelor naturale).

Demonstrație. Demonstrația este similară celei aferente din logica propozițiilor [25], i.e. aceasta rezidă a a arăta că echivalența dintre adevărul unei formule și apartenența ei la o mulțime consistentă are loc.

În acord cu *Lema lui Lindenbaum*, mulțimea Q^+-consistentă Δ admite o extensie maximal Q^+-consistentă și ω-completă Γ. Va trebui să arătăm că pentru orice α are loc:

$$\alpha = 1 \text{ ddacă } \alpha \in \Gamma$$

Inducție (pe gradul formulei α)

1.Cazul $n = 0$. Considerăm toate formulele elementare care aparțin mulțimii Γ și le atribuim valoarea logică *adevărat;* cele care nu aparțin acestei mulțimi le asignăm valoarea logică fals.

2.Cazul $n > 0$. Formula α are una din următoarele forme: $\neg\beta$, $\beta \supset \gamma$ sau $\forall x\beta$. Presupunem că teorema are loc pentru β și γ, al căror grad este strict mai mic decât gradul lui α (ipoteza inducției) și arătăm că ea are loc și pentru α.

a) α are forma $\neg\beta$

$\neg\beta = 1$ ddacă $\beta = 0$ (prin definiția semantică a $\neg$) ddacă $\beta \notin \Gamma$ (prin ipoteza inducției) ddacă $\neg\beta \in \Gamma$ (prin max lui Γ).

b) α are forma $\beta \supset \gamma$

$\beta \supset \gamma = 1$ ddacă $\beta = 0$ sau $\gamma = 1$ (def. sem. a $\supset$) ddacă $\beta \notin \Gamma$ sau $\gamma \in \Gamma$ (prin ip. ind.) ddacă $\beta \supset \gamma \in \Gamma$.

c) α are forma $\forall x\beta$.

1. Presupunem că $\forall x\alpha \in \Gamma$. Și deci $\beta(x/c) \in \Gamma$, pentru orice $c \in C$ (prin *Univ. 1* și *MP*). Însă gradul formulelor $\beta(x/c)$ este strict mai mic decât gradul lui α și deci toate aceste formule sunt adevărate (prin ipoteza inducției). Însă, în acest caz, și formula $\forall x\beta$ este adevărată (în acord cu semantica formulelor cuantificate universal). Așadar, are loc: Dacă $\forall x\beta \in \Gamma$, atunci $\forall x\beta = 1$.

2. (Conversa lui 1). Dacă $\forall x\beta = 1$, atunci $\forall x\beta \in \Gamma$. Prin contrapoziție obținem: Dacă $\forall x\beta \notin \Gamma$, atunci $\forall x\beta = 0$. Presupunem că $\forall x\beta \notin \Gamma$. Există deci un $c \in C$ astfel încât $\beta(x/c) \notin \Gamma$ (prin ω-completitudinea lui Γ). Și deci $\beta(x/c) = 0$ (prin ipoteza inducției). Și astfel $\forall x\beta = 0$.

Teoremă. Dacă non $\vdash_{Q^+} \alpha$, atunci $\neg\alpha$ este χ_0-satisfiabilă.

Demonstrație. Presupunem că *non* $\vdash_{Q^+} \alpha$. Rezultă că $\{\neg\alpha\}$ este Q^+-consistentă (în caz contrar $\vdash_{Q^+} \neg\neg\alpha$, adică $\vdash_{Q^+} \alpha$, ceea ce contrazice asumpția nondemonstrabilității formulei α). De unde, prin *Teorema satisfiabilității*, $\neg\alpha$ este χ_0-satisfiabilă.

Teorema de completitudine a sistemului Q^+. Dacă $\models \alpha$, atunci $\vdash_{Q^+} \alpha$.

Demonstrație. Dacă α este o formulă validă, atunci negația ei, $\neg\alpha$, este nesatisfiabilă. Și deci α este Q^+-demonstrabilă (rezultat obținut din *Teorema* de mai sus).

---

[25] Comp. 2.3.3, Lema 2.

Din faptul că teoremele sistemului Q sunt teoreme ale sistemului Q^+ rezultă completitudinea sistemului axiomatic Q.

3.3.2. Sistemul Hilbert-Ackermann

Logica predicatelor, aşa cum a fost ea elaborată de Hilbert şi Ackermann în *Grundzüge...*[26], utilizează următoarele categorii de simboluri: $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ (simboluri pentru variabilele propoziţionale), $x, y, z, \ldots, x_1, x_2 \ldots$ (simboluri pentru variabile individuale), $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(x_1,x_2,x_3),\ldots$ (simboluri pentru predicate)[27], la care se adaugă simbolurile operatorilor logici: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists$.

Formulă a $\mathcal{L}_P$

a) Orice variabilă propoziţională este o formulă.

b) Orice simbol predicativ (secondat de variabile individuale) este o formulă.

c) Dacă α este o formulă, atunci $\neg\alpha$ este o formulă.

d) Dacă α şi β sunt formule, astfel încât nici o variabilă individuală nu apare simultan legată în una şi liberă în cealaltă, atunci $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \supset \beta$ şi $\alpha \equiv \beta$ sunt formule.

e) Dacă $\alpha(x)$ este o formulă în care variabila individuală x apare liberă, atunci $\forall x\alpha(x)$ şi $\exists x\alpha(x)$ sunt formule.

Sistemul H$\mathfrak{A}$

Axiome. A_1. $(p \vee p) \supset p$

A_2. $p \supset (p \vee q)$

A_3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

A_4. $(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$

A_5. $\forall x P(x) \supset P(y)$

A_6. $P(y) \supset \exists x P(x)$

Reguli de deducţie.

a) Regulile substituţiei

a1. Dacă α este o formulă care conţine o variabilă propoziţională p iar β este o formulă arbitrară, atunci p poate fi înlocuită cu β în formula α, cu următoarele condiţii: înlocuirea se face în toate ocurenţele variabilei p iar cele două formule, α şi β, n-au variabile individuale comune.

a2. Dacă α este o formulă care conţine o variabilă individuală liberă x, atunci x poate fi înlocuită cu o altă variabilă individuală y, cu următoarele condiţii: înlocuirea se face în toate ocurenţele lui x în formula α, iar variabila y nu apare legată în α.

a3. Dacă α este o formulă iar P este un simbol predicativ n-adic care apare în α, atunci P poate fi înlocuit în α cu o formulă β care are cel puţin n variabile libere. Înlocuirea se face astfel: fie $z_1,\ldots,z_{n+k}$ ($k \geq 0$) variabilele libere din β, fie $z_1,\ldots,z_n$ n variabile alese din toate variabilele libere din β. Dacă $P(w_1,\ldots,w_n)$ este o ocurenţă arbitrară a lui P în formula

[26] Cf. Hilbert şi Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, New York, Dover Publ., 1946.

[27] Strict vorbind, pentru variabile propoziţionale Hilbert şi Ackermann utilizează majusculele latine, pentru variabilele predicative majusculele latine cu argumente şi câteva categorii de simboluri ale alfabetului gotic pentru diferite categorii de metavariabile. Simbolismul adoptat aici este simbolismul uzual al lucrării noastre, tocmai pentru o mai uşoară conexiune a acestor rezultate cu cele din capitolele precedente.

α, atunci înlocuim $P(w_1,...,w_n)$ cu $\beta(w_1,...,w_n,z_{n+1},...,z_{n+k})$. Substituţia trebuie să satisfacă următoarele condiţii: înlocuirea lui P cu β se realizează în toate ocurenţele lui P în α iar α şi β nu au variabile individuale în comun.

b) Modus ponens (MP)

$$\frac{\alpha,\ \alpha \supset \beta}{\beta}$$

c) Reguli pentru cuantificatori

c1. Dacă $\alpha \supset \beta(x)$ este o formulă arbitrară, astfel că x este variabilă liberă în β şi nu apare deloc în α, iar y este variabila x sau o altă variabilă care nu apare liberă în α sau nu apare deloc în $\beta(x)$, atunci formula $\alpha \supset \forall y \beta(y)$ poate fi dedusă.

Schematic: $$\frac{\alpha \supset \beta(x)}{\alpha \supset \forall y \beta(y)}$$

c2. Sub aceleaşi restricţii din c1, din $\beta(x) \supset \alpha$ se poate deriva $\exists x \beta(x) \supset \alpha$.

Schematic: $$\frac{\beta(x) \supset \alpha}{\exists x \beta(x) \supset \alpha}$$

d) Regula redenumirii variabilelor legate.

Dacă într-o formulă α variabila individuală x este variabilă legată, atunci x poate fi înlocuită cu o variabilă arbitrară y, cu următoarele condiţii: înlocuirea se face în toate ocurenţele legate ale variabilei x (i.e. în cuantificator şi în întreg domeniul său) iar y este fie o variabilă nouă în α, fie apare în α dar ca variabilă legată printr-un cuantificator al cărui domeniu nu se intersectează cu domaniul cuantificatorului iniţial.

Exemplu. $\alpha: \forall x Q(x,y) \supset \exists z R(y,z)$

Variabila legată x din antecedentul formulei α poate fi redenumită cu z, deoarece deşi z apare în α, apare ca variabilă legată prin cuantificatorul existenţial, al cărui domeniu nu interferă cu cel al cuantificatorului universal.

Remarcă. Sistemul H$\mathfrak{K}$ este o extensie a sistemului HA de logică a propoziţiilor, format din primele 4 axiome plus regula MP şi regula substituţiei pentru variabile propoziţionale. Operatorii primitivi sunt $\neg$ şi $\vee$, redarea primelor 4 axiome cu ajutorul $\supset$ fiind doar o formă abreviată[28]. Regulile de deducţie ale sistemului H$\mathfrak{K}$ sunt cele expuse de autori dar cu corecţiile ulterioare reclamate de incorecta lor formulare în primele două ediţii ale lucrării *Grundzüge*...[29].

Teoreme şi reguli de deducţie derivate ale sistemului H$\mathfrak{K}$

Regula c_1^* $$\frac{\alpha(x)}{\forall y \alpha(y)}$$

1. $\alpha(x)$; as
2. $\alpha(x) \supset [\alpha(x) \vee \neg(p \vee \neg p)]$; 1 prin A_2
3. $\alpha(x) \vee \neg(p \vee \neg p)$; 1, 2 MP

[28] Cf. Hilbert; Ackermann, op. cit., Cap. 1, § 10.

[29] Cf. A. Church, *Introduction to Math. Logic*, Princeton, 1956, 289 nota 459; G.T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics*, London, 1963, 66.

4. $\neg(p \vee \neg p) \vee \alpha(x)$; 3 prin A_3
5. $(p \vee \neg p) \supset \alpha(x)$; 4, $\mathcal{L}_p$
6. $(p \vee \neg p) \supset \forall y \alpha(y)$; 5 c1
7. $p \vee \neg p$; $\mathcal{L}_p$
8. $\forall y \alpha(y)$; 6, 7 MP

Remarcă. În paşii 5 şi 7 am indicat "$\mathcal{L}_p$", ceea ce înseamnă: orice teoremă a logicii propoziţiilor (echivalent, prin corectitudinea $\mathcal{L}_p$: orice formulă validă a $\mathcal{L}_p$) poate fi utilizată în demonstraţiile din $H\mathcal{A}^{\mathcal{Q}}$ (întrucât $H\mathcal{A}^{\mathcal{Q}}$ este o extensie a unui sistem axiomatic de logică propoziţională).

Regula d^* $$\frac{\forall x P(x) \supset P(y)}{\forall y P(y) \supset P(x)}$$

1. $\forall x P(x) \supset P(y)$; as
2. $\forall x P(x) \supset P(z)$; 1, a2
3. $\forall y P(y) \supset P(z)$; 2, d
4. $\forall y P(y) \supset P(x)$; 3, a2

Th. 1. $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$
1. $p \vee \neg p$; $\mathcal{L}_p$
2. $P(x) \vee \neg P(x)$; 1 a1
3. $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$; 2 c_1^*

Th. 2. $\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$ ($A_5, A_6, \mathcal{L}_p$)

Th. 3. $\forall x(p \vee P(x)) \supset (p \vee \forall x P(x))$
1. $\forall y(p \vee P(y)) \supset (p \vee P(x))$; A_5, a3, d^*
2. $\forall y(p \vee P(y)) \supset (\neg\neg p \vee P(x))$; 1, $\mathcal{L}_p$
3. $\forall y(p \vee P(y)) \supset (\neg p \supset P(x))$; 2, $\mathcal{L}_p$
4. $[\forall y(p \vee P(y)) \wedge \neg p] \supset P(x)$; 3, $\mathcal{L}_p$
5. $[\forall y(p \vee P(y)) \wedge \neg p] \supset \forall x P(x)$; 4, *c*
6. $\forall x(p \vee P(x)) \supset (p \vee \forall x P(x))$; 5 $\mathcal{L}_p$, *d.*

Th. 4. $\forall x(p \supset P(x)) \supset (p \supset \forall x P(x))$ (Th. 3, $p / \neg p$)

Th. 5. $p \supset \forall x(p \vee P(x))$ (exerciţiu)

Th. 6. $\forall x(p \vee P(x)) \equiv (p \vee \forall x P(x))$
1. $\forall y P(y) \supset P(x)$; A_5, d^*
2. $(p \vee \forall y P(y)) \supset (p \vee P(x))$; 1 prin a3

3. $(p \vee \forall x P(x)) \supset (p \vee P(x))$; 2, *d*

4. $(p \vee \forall x P(x)) \supset \forall x(p \vee P(x))$; 3, c

De unde, prin Th. 3 obținem Th. 6.

Th. 7. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$

1. $\forall y(P(y) \supset Q(y)) \supset (P(x) \supset Q(x))$; din A_5
2. $P(x) \supset [\forall y(P(y) \supset Q(y)) \supset Q(x)]$; 1 prin $\mathcal{L}_p$: $[p \supset (q \supset r)] \equiv [q \supset (p \supset r)]$
3. $\forall y P(y) \supset P(x)$; prin A_5
4. $\forall y P(y) \supset [\forall y(P(y) \supset Q(y)) \supset Q(x)]$; 3, 2 $\mathcal{L}_p$
5. $[\forall y P(y) \wedge \forall y(P(y) \supset Q(y))] \supset Q(x)$; 4 $\mathcal{L}_p$: $[p \supset (q \supset r)] \equiv [(p \wedge q) \supset r]$
6. $[\forall x P(x) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))] \supset Q(x)$; 5, *d*
7. $[\forall x P(x) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))] \supset \forall x Q(x)$; 6, c
8. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$; 7; prin echiv. $\mathcal{L}_p$ din 5.

Th. 8. a) $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

b) $\exists x \neg P(x) \equiv \neg \forall x P(x)$

c) $\neg \exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x)$

d) $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

(exerciții)

Th. 9. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))$

1. $(P(x) \supset Q(x)) \supset (\neg Q(x) \supset \neg P(x))$; $\mathcal{L}_p$, a1
2. $\forall x[(P(x) \supset Q(x)) \supset (\neg Q(x) \supset \neg P(x))]$; 1, c_1^*
3. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x(\neg Q(x) \supset \neg P(x))$; 2, Th. 7
4. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x \neg Q(x) \supset \forall x \neg P(x))$; 3, Th. 7, $\mathcal{L}_p$
5. $(\forall x \neg Q(x) \supset \forall x \neg P(x)) \equiv (\neg \forall x \neg P(x) \supset \neg \forall x \neg Q(x))$; $\mathcal{L}_p$, al
6. $\neg \forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$; $\neg \forall x \neg Q(x) \equiv \exists x Q(x)$; Th. 8 a
7. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))$; 5, Înloc. Echival.

Th. 10. $\forall x(P(x) \equiv Q(x)) \supset (\exists x P(x) \equiv \exists x Q(x))$

Rd $\dfrac{\alpha(x) \supset \beta(x)}{\exists x \alpha(x) \supset \exists x \beta(x)}$ (exercițiu)

Th. 11. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$ (exercițiu)

Th. 12. $\forall x(P(x) \equiv Q(x)) \supset (\forall x P(x) \equiv \forall x Q(x))$

Th. 13. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$

1. $\forall x(\neg P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x \neg P(x) \supset \exists x Q(x))$; Th. 9, $P(x) / \neg P(x)$
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\neg \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x))$; 1, Th. 8 d, $\mathcal{L}_p$

3. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \exists x Q(x))$; 2, Th. 8 c
4. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$; 3, Reg. *d*

Consistența și completitudinea sistemului axiomatic HA

Consistența sistemului HA

Ceea ce trebuie arătat este următorul lucru: *nu există nici o formulă β a $\mathcal{L}_P$ astfel încât în sistemul HA sunt demonstrabile ambele formule, β și $\neg\beta$.*

Demonstrația consistenței acestui sistem Hilbert și Ackermann o fac printr-o interpretare aritmetică a entităților sintactice ale sistemului: *p, q, r...* sunt aici variabile aritmetice care iau valoarea 1 sau 0. $p \vee q$ este produsul aritmetic $p \cdot q$; $\neg p = 0$ dacă $p = 1$ și $\neg p = 1$ dacă $p = 0$. Din expresiile cuantificate eliminăm cuantificatorii, iar simbolurile predicative sunt considerate, aidoma variabilelor propoziționale, variabile aritmetice care pot lua valorile 1 sau 0.

Pe baza acestei interpretări aritmetice putem arăta că toate formulele α demonstrabile în system (i.e. toate teoremele) au o proprietate comună: *iau constant valoarea 0* (abreviat: $id_0(\alpha)$). A arăta acest lucru se reduce la a arăta că toate axiomele au această proprietate și că orice formulă obținută din axiome cu ajutorul regulilor de deducție are această proprietate.

De exemplu, prima axiomă $A_1 : (p \vee p) \supset p$, în notația neabreviată $\neg(p \vee p) \vee p$, devine $\neg p \cdot p$ și care are valoarea 0. Așadar, $id_0(A_1)$. La fel celelalte (exercițiu).

Regula de deducție MP în notația neabreviată: *din α și $\neg\alpha \vee \beta$ se obține β*, conservă în concluzie proprietatea id_0 a premiselor. Presupunem că $id_0(\alpha)$ și $id_0(\neg\alpha \vee \beta)$. De aici deducem $id_1(\neg\alpha)$ (i.e. dacă α ia constant valoarea 0, atunci $\neg\alpha$ ia constant valoarea 1). Și deci valoarea formulei $\neg\alpha \vee \beta$ este identică cu valoarea formulei β (deoarece $1 \cdot \beta = \beta$). Însă, cum $id_0(\neg\alpha \vee \beta)$ rezultă că $id_0(\beta)$.

Prin interpretarea de mai sus, regulile substituției a1 și a3 ilustrează substituția din logica propozițiilor[30]. a2 și *d* nu afectează în nici un fel o formulă în interpretarea aritmetică, iar c1 și c2 conservă, trivial, proprietatea id_0.

Cu aceasta *consistența* sistemului HA poate fi astfel argumentată: întrucât două formule, din care una este negația celeilalte, nu pot avea simultan valoarea 0, rezultă că în sistemul HA nu poate fi demonstrată atât o formulă cât și negația ei. Și deci HA este *consistent.*

Completitudinea sistemului HA

Hilbert și Ackermann deosebesc două sensuri în care se poate defini completitudinea unui sistem axiomatic:

1. Sistemul este complet dacă demonstrează toate formulele valide.
2. (Un sens "mai tare"). Sistemul este complet dacă prin adăugarea la axiomele sistemului a unei formule nedemonstrabile în sistem consistența sistemului se deconstruiește.

Să ne oprim mai întâi la sensul 2.

***Teoremă**. Sistemul HA este incomplet în sensul 2.*

Demonstrarea acestei teoreme se rezumă la indicarea unei formule α care, în interpretarea aritmetică mai sus menționată, are proprietatea id_0, dar care nu este teoremă a

[30] Comp. 2.3.3.

sistemului. O astfel de formulă este $\alpha: \exists xP(x) \supset \forall xP(x)$. (Cum uşor se poate constata, această formulă este constant adevărată doar pentru un domeniu format dintr-un singur element).

Pentru demonstrarea faptului că α nu este teoremă a sistemului H$\mathcal{A}$ Hilbert şi Ackermann indică un procedeu de transformare a formulelor logicii predicatelor în formule ale logicii propoziţiilor. Dacă domeniul cuantificării conţine n elemente (este deci finit), atunci transformăm cuantificatorii astfel:

a) $\forall xP(x) \equiv [P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(n)]$

b) $\exists xP(x) \equiv [P(1) \vee P(2) \vee ... \vee P(n)]$; $\Omega = \{1,2,...,n\}$,

după care înlocuim expresiile $P(i)$ cu variabile propoziţionale distincte. Fie, în cele ce urmează, $\Omega = \{1,2\}$.

Lemă. *Orice formulă demonstrabilă în H$\mathcal{A}$ devine, prin transformarea de mai sus, o formulă validă a logicii propoziţiilor.*

Demonstrarea acestei leme se reduce la a arăta că prin transformarea de mai sus axiomele devin formule valide ale logicii propoziţiilor iar regulile de deducţie conservă în concluzie validitatea premiselor.

Axiomele $A_1 - A_4$ sunt deja formule valide ale $\mathcal{L}_P$.

Axioma $A_5: \forall xP(x) \supset P(y)$. Din A_5 obţinem, prin închiderea ei universală, $\forall y(\forall xP(x) \supset P(y))$. Transformăm această formulă în acord cu echivalenţa a) de mai sus şi obţinem $(\forall xP(x) \supset P(1)) \wedge (\forall xP(x) \supset P(2))$, echivalent

$[(P(1) \wedge P(2)) \supset P(1)] \wedge [(P(1) \wedge P(2)) \supset P(2)]$, respectiv

$[(p \wedge q) \supset p] \wedge [(p \wedge q) \supset q]$, formulă validă a logicii propoziţiilor.

Axioma A_6 (exerciţiu).

Regulile sistemului. a1 şi a3 conservă validitatea (pe baza teoremei substituţiei din logica propoziţiilor), căci după transformare ele pot fi redate ca formule ale logicii propoziţiilor. Regulile a2 şi *d*, prin transformare, repetă formulele.

În cazul regulii b) *modus ponens* deosebim:

1. Formulele care apar în această regulă *nu* conţin variabile libere. În acest caz regula îşi păstrează forma şi deci prin transformare obţinem aplicaţii ale acestei reguli în logica propoziţiilor.

2. Formulele care apar în această regulă *conţin* variabile libere. În acest caz vom construi închiderile lor universale, caz în care regula îşi pierde forma, obţinându-se o nouă regulă:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\alpha(x)\\ \forall x(\alpha(x) \supset \beta(x))\end{array}}{\forall x\beta(x)}$$

respectiv,

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha(1) \wedge \alpha(2)\\ (\alpha(1) \supset \beta(1)) \wedge (\alpha(2) \supset \beta(2))\end{array}}{\beta(1) \wedge \beta(2)} \qquad \frac{\begin{array}{c}p_1 \wedge p_2\\ (p_1 \supset q_1) \wedge (p_2 \supset q_2)\end{array}}{q_1 \wedge q_2}$$

Însă, formula $\{(p_1 \wedge p_2) \wedge [(p_1 \supset q_1) \wedge (p_2 \supset q_2)]\} \supset (q_1 \wedge q_2)$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ (exerciţiu).

Regula c

c1 $\dfrac{\alpha \supset \beta(x)}{\alpha \supset \forall y\beta(y)}$; x este liberă în β şi nu apare în α

Deosebim din nou două cazuri, după cum α conține sau nu variabile libere.

1. α nu conține variabile libere. Considerăm închiderea universală a premisei, $\forall x(\alpha \supset \beta(x))$ şi obținem $(\alpha \supset \beta(1)) \wedge (\alpha \supset \beta(2))$, echivalent $\alpha \supset (\beta(1) \wedge \beta(2))$. Prin transformarea concluziei obținem acelaşi rezultat.

2. α conține variabile libere (similar).

c2 (exercițiu)

Şi deci: orice formulă deductibilă în HK̂ este, prin transformarea de mai sus, o formulă validă a logicii propozițiilor.

Însă formula $\alpha: \exists x P(x) \supset \forall x P(x)$, pentru $\Omega = \{1,2\}$, devine $(p \vee q) \supset (p \wedge q)$, formulă *nevalidă* a $\mathcal{L}_p$. Şi deci, prin contrapoziție din *Lemă*, α nu este o formulă demonstrabilă în HK̂. Însă α are proprietatea id_0. Şi deci HK̂ este incomplet în sensul specificat de *Teoremă*.

În schimb, în sistemul axiomatic HK̂ este complet în primul sens: orice formulă validă a $\mathcal{L}_p$ este teoremă a sistemului HK̂ [31].

Teorema de completitudine. Dacă $\models \alpha$, *atunci* $\vdash \alpha$.

Demonstrație. Aşa cum am văzut în 3.3.1., pentru orice formulă a $\mathcal{L}_P$ se poate construi o formulă în *forma normală Skolem*, astfel încât ori ambele formule sunt deductibile, ori nici una nu este deductibilă într-un sistem axiomatic al $\mathcal{L}_P$. Aşadar, pentru demonstrarea teoremei de completitudine a sistemului HK̂ este suficient să arătăm că *orice formulă validă a* $\mathcal{L}_P$, *aflată în forma ei normală Skolem, este demonstrabilă în* HK̂. Presupunem că formula de mai jos este o formulă de acest gen:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

Fie $\{x_0, x_1, \ldots\}$ mulțimea infinit numărabilă a variabilelor individuale. Din elementele acestei mulțimi formăm k-tupli de elemente şi ordonăm aceşti tupli în raport cu suma crescătoare a indicilor, iar la sume egale îi vom ordona lexicografic. Cel de-al n-lea k-tuplu îl vom scrie $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k})$ iar β_n va fi formula

$$\beta_n : \alpha(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}; x_{(n-1)l+1}, x_{(n-1)l+2}, \ldots, x_{nl})$$

Avem, aşadar:

$$\beta_1 : \alpha(x_0, \ldots, x_0, x_0; x_1, x_2 \ldots, x_l)$$

$$\beta_2 : \alpha(x_0, \ldots, x_0, x_1; x_{l+1}, x_{l+2} \ldots, x_{2l})$$

$$\beta_3 : \alpha(x_0, \ldots, x_1, x_0; x_{2l+1}, x_{2l+2} \ldots, x_{3l}) \text{ etc.}$$

Trebuie să observăm că variabilele aflate după ";" sunt diferite atât de variabilele care stau în fața acestui simbol, cât şi de toate variabilele individuale care apar într-o formulă β_m ($m < n$). Celelalte variabile, $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$, apar, toate, deja în formulele β_m ($m < n$). Apoi, prin γ_n vom înțelege disjuncția formulelor $\beta_1, \ldots, \beta_n$, pentru orice n:

$$\gamma_n : \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$$

Formulele γ_n sunt constituite din formule elementare (i.e. simboluri de variabile propoziționale sau simboluri predicative care au ca argumente variabile individuale), formule elementare care apar şi în $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$.

[31] Prima demonstrație de completitudine a logicii axiomatizate a predicatelor aparține lui K. Gödel (Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. u. Physik*, 27/1930), pentru un sistem axiomatic similar. Demonstrația dată aici este varianta Hilbert-Ackermann (*Grundzüge*...) a demonstrației gödeliene.

Fie δ_n formula care rezultă din γ_n prin prefixarea acesteia cu cuantificatori universali pentru *toate* variabilele libere ale formulei γ_n. Fiecărei formule γ_n îi asociem o formulă γ_n^* din logica propozițiilor. Înlocuim, așadar, în γ_n toate formulele elementare (cu excepția variabilelor propoziționale) cu variabile propoziționale, astfel încât unor simboluri predicative distincte să le corespundă variabile propoziționale distincte. Obținem, așadar, un șir de formule $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots$. Cum ușor se poate observa, fiecare γ_i rezultă din γ_i^* prin regula a1. În raport cu formula γ_n^* vom avea, alternativ, următoarele cazuri:

1. Există un n, astfel că γ_n^* este o formulă validă a logicii propozițiilor.
2. Nu există n, astfel că γ_n^* este o formulă validă a logicii propozițiilor.

Cazul 1. În acest caz formula $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ este o *teoremă* a sistemului HÆ

Întrucât γ_n rezultă din γ_n^* prin regula substituției al iar δ_n rezultă din γ_n prin aplicarea regulii c_1^*, este sufficient să arătăm, pentru orice n, că următoarea implicație este o teoremă a sistemului HÆ :

$$\delta_n \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

(Inducție pe n).

$\delta_1 = \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_l \alpha(x_0, \ldots, x_0; x_1, \ldots, x_l)$ (pentru că δ_1 se obține din γ_1, iar γ_1 este β_1 de mai sus).

Însă formula $\forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(z_1, \ldots, z_k; y_1, \ldots, y_l) \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ este demonstrabilă în HÆ printr-o multiplă aplicare a axiomei A_6 și a tranzitivității implicației. De unde, prin substituție (z_i / x_0) obținem:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_0, \ldots, x_0; y_1, \ldots, y_l) \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Cum x_0 este variabilă liberă în antecedentul implicației, prin aplicarea regulii c2 asupra formulei de mai sus obținem:

$$\exists x_0 \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_0, \ldots, x_0; y_1, \ldots, y_l) \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

Însă din δ_1, prin Th. 2 și MP, obținem

$$\exists x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_l \alpha(x_0, \ldots, x_0; x_1, \ldots, x_l),$$

care este antecedentul formulei precedente. Și deci, prin tranzitivitatea implicației obținem: $\delta_1 \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$.

Presupunem acum că are loc:

$$\delta_{n-1} \supset \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

și vom arăta că implicația are loc și pentru n.

$\delta_n : \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{nl} \gamma_n$, adică $\delta_n : \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{nl} (\gamma_{n-1} \vee \beta_n)$

respectiv, $\delta_n : \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{nl} (\gamma_{n-1} \vee \alpha(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}; x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl}))$.

Însă, așa cum am văzut mai sus, variabilele $x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl}$ nu apar în γ_{n-1}. Și astfel, prin Th. 6, obținem:

$$\delta_n \supset \forall x_0 \ldots \forall x_{(n-1)l} (\gamma_{n-1} \vee \forall x_{(n-1)l+1} \ldots \forall x_{nl} \alpha(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}; x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl}))$$

Redenumim acum variabilele legate $x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl}$ în $y_1, \ldots, y_l$ și obținem

$$\delta_n \supset \forall x_0 \ldots \forall x_{(n-1)l} (\gamma_{n-1} \vee \forall y_1 \ldots \forall y_l \alpha(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}; y_1, \ldots, y_l))$$

Și deci această implicație este o teoremă a sistemului HÆ

Însă, printr-o repetată aplicare a Th. 13, obținem:

$\delta_n \supset \forall x_0 ... \forall x_{(n-1)l} \gamma_{n-1} \vee \exists x_1 ... \exists x_k \forall y_1 ... \forall y_l \alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$,

respectiv, $\delta_n \supset \delta_{n-1} \vee \exists x_1 ... \exists x_k \forall y_1 ... \forall y_l \alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$.

Însă, prin ipoteza inducției are loc: $\delta_{n-1} \supset \exists x_1 ... \exists x_k \forall y_1 ... \forall y_l \alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$.

Şi deci: $\delta_n \supset \exists x_1 ... \exists x_k \forall y_1 ... \forall y_l \alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$.

Cazul 2. În acest caz formula $\exists x_1 ... \exists x_k \forall y_1 ... \forall y_l \alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$ nu este o formulă validă, căci dacă domeniul de indivizi este mulțimea numerelor naturale, atunci pot fi indicate predicate care, substituite simbolurilor predicative ale formulei, transformă formula într-o expresie falsă.

Demonstrație.

Presupunem deci că nu există n, astfel că γ_n^* este o formulă validă a logicii propozițiilor.

De data aceasta γ_n^* va fi construită astfel: γ_n^* rezultă din γ_n prin înlocuirea simbolurilor predicative n-adice (care au ca argumente $x_0, x_1, x_2, ...$) prin variabile propoziționale. Înlocuirea are loc astfel: $P(x_0)$ este înlocuit prin P_0, $P(x_1)$ prin P_1, $Q(x_1, x_2, x_3)$ prin $Q_{1,2,3}$ ş.a.m.d. În orice formulă γ_{n+1}^* apar toate variabilele din γ_n^* şi apar şi altele. Variabilele propoziționale care apar în toate formulele γ_n^* le enumerăm în aşa fel încât să aibe sens să vorbim despre prima, a doua, ş.a.m.d. Această enumerare poate fi făcută astfel încât mai întâi sunt enumerate toate variabilele propoziționale din γ_1^*, apoi adăugăm variabilele nou apărute în γ_2^* etc.

Întrucât nici una din formulele γ_n^* nu este o formulă validă a logicii propozițiilor, variabilele propoziționale care apar într-o formulă γ_n^* pot fi înlocuite prin valorile de adevăr "adevărat" şi "fals", astfel încât γ_n^* este o formulă falsă. Vorbim aşadar despre un *set de valori* care satisface $\neg \gamma_n^*$. Pentru *fiecare* $\neg \gamma_n^*$ există, fireşte, numai un număr finit de astfel de seturi diferite; în totalitatea lor însă există un număr infinit de astfel de seturi (căci seturile care se referă la formulele $\neg \gamma_n^*$ cu indice diferit sunt, evident, diferite).

Asignăm acum fiecăreia dintre infinit de multele variabile propoziționale, într-un mod univoc, valorile "adevărat" sau "fals". Dacă primei variabile propoziționale îi este asignată valoarea "adevărat" în infinit de multele seturi care satisfac $\neg \gamma_n^*$, atunci îi atribuim valoarea de adevăr "adevărat"; în caz contrar, „fals". Vom considera în continuare numai acele seturi în care prima variabilă propozițională a fost înlocuită cu valoarea ei. Dacă în aceste seturi cea de-a doua variabilă apare infinit de multe ori cu valoarea "adevărat", atunci îi asignăm această valoare; în caz contrar îi asignăm valoarea logică fals. În acelaşi fel este fixată valoarea de adevăr a următoarelor variabile, considerându-se de fiecare dată numai acele seturi în care variabilele propoziționale precedente au deja valorile fixate.

Dacă se înlocuiesc variabilele propoziționale cu valorile asignate lor, atunci toate formulele γ_n^* devin simultan expresii *false.* Definim acum anumite predicate numerice care vor fi substituite simbolurilor predicative care apar în $\alpha(x_1,..., x_k; y_1,..., y_l)$. Dacă apare, de exemplu, simbolul predicativ triadic *P*(, ,), atunci în γ_n^* vom avea P_{i_1,i_2,i_3}. Definim acum predicatul numeric corespunzător Φ cu stipulația Φ (*a,b,c*), pentru numere naturale arbitrare, are întotdeauna valoarea atribuită lui *P(a,b,c)*. În felul acesta fiecărui simbol predicativ i se asignează un predicat numeric anume cu acelaşi număr de argumente. Dacă pentru formula

$$\exists x_1 ..\exists x_k \forall y_1 ...\forall y_l \alpha(x_1,...,x_k; y_1,..., y_l)$$

considerăm ca domeniu *mulțimea numerelor naturale*, iar în locul simbolurilor ei predicative punem predicatele numerice mai sus definite, atunci, e clar, formula ia valoarea logică *fals*. Și deci negația ei,

$$\forall x_1 ...\forall x_k \exists y_1 ...\exists y_l \neg\alpha(x_1,...,x_k; y_1,..., y_l)$$

este *adevărată*. Dacă extragem acum k-tuplul de numere naturale, pe care l-am desemnat mai înainte cu $(n_1,...,n_k)$, atunci formula

$$\neg\alpha(n_1,...,n_k; (n-1)l+1,...,nl)$$

are, după înlocuirea simbolurilor predicative, valoarea de adevăr opusă ultimului disjunct al lui γ_n^* după înlocuirea variabilelor individuale cu valorile de adevăr asignate; și este deci *adevărată*.

Întrucât acest lucru e valabil, corespunzător, pentru orice k-tuplu, rezultă că formula $\forall x_1 ...\forall x_k \exists y_1 ...\exists y_l \neg\alpha(x_1,...,x_k; y_1,..., y_l)$ *este adevărată în domeniul numerelor naturale*.

Prin cazul 1 Hilbert și Ackermann arată că formula inițială este derivabilă în H$\mathcal{A}$, iar prin cazul 2 că negația formulei în cauză este satisfiabilă într-un domeniu numărabil. Rezultă, așadar, că pentru formula inițială α (pentru care formula demonstrației de față este forma ei normală Skolem) are loc: Dacă $\models \alpha$, atunci $\vdash \alpha$.

Exerciții

1. Demonstrați în H$\mathcal{A}$ următoarea regulă derivată de deducție:

$$\frac{\alpha(x_1,...,x_n) \equiv \beta(x_1,...,x_n)}{\gamma(\alpha) \equiv \gamma(\beta)}$$

unde α și β conțin strict variabilele libere specificate, $\gamma(\alpha)$ este o formulă arbitrară care are ca subformulă pe $\alpha(v_1,...,v_n)$ (unde $v_1,...,v_n$ pot fi variabilele $x_1,...,x_n$ sau alte variabile) iar $\gamma(\beta)$ se obține din $\gamma(\alpha)$ prin înlocuirea a una sau mai multe ocurențe ale lui α cu β.

Indicație. E suficient să se arate că formula din concluzie este $\forall x\alpha \equiv \forall x\beta$ sau $\exists x\alpha \equiv \exists x\beta$. Se utilizează c_1^*, Th. 12 și Th. 10.

2. Să se demonstreze în H$\mathcal{A}$ următorul enunț:

Dacă α este o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_P$, care conține strict cuantificatorii $\forall x$ și $\exists x$ și operatorii $\wedge$ și $\vee$ (și eventual $\neg$) iar α^* este formula obținută din α prin înlocuirea reciprocă a cuantificatorilor $\forall x$ și $\exists x$, a operatorilor $\wedge$ și $\vee$ și a formulelor elementare cu negațiile lor, atunci $\alpha^* \equiv \neg\alpha$.

Indicație. Se consideră o formulă α, se neagă formula respectivă, apoi pe baza echivalențelor din Th. 8 și prin transformări echiveridice din logica propozițiilor se deplasează negația în interiorul formulei α până se ajunge doar la formule elementare negate. Ceea ce se obține este α^*.

3. Fie următoarele formule ale $\mathcal{L}_P : \alpha \supset \beta$ și $\alpha \equiv \beta$, în care α și β conțin doar cuantificatorii $\forall x$ și $\exists x$ și operatorii $\wedge$ și $\vee$ (și eventual $\neg$). Fie α^* și β^* formulele obținute din α, respectiv β, prin înlocuirea reciprocă în toate ocurențele lor a $\forall$ cu $\exists$ și $\wedge$ cu $\vee$. Să se demonstreze în H$\mathcal{A}$ următoarele enunțuri:

a) Dacă $\vdash \alpha \supset \beta$, atunci $\vdash \beta^* \supset \alpha^*$.

b) Dacă $\vdash \alpha \equiv \beta$, atunci $\vdash \alpha^* \equiv \beta^*$.

Indicație. Prin Exerc. 2 se construiesc $\neg\alpha$ și $\neg\beta$.

Apoi, cum $\vdash \alpha \supset \beta$ și $\vdash \alpha \equiv \beta$, rezultă $\vdash \neg\beta \supset \neg\alpha$ și $\vdash \neg\alpha \equiv \neg\beta$. Întrucât aceste formule sunt demonstrabile, pentru a anula ultima operație din 2 (i.e. înlocuirea formulelor elementare cu negațiile lor) vom substitui în aceste formule formulele elementare cu negațiile lor. (Construiți exemple).

4. Să se demonstreze că dacă y nu este o variabilă liberă în formula $\forall x\alpha$, atunci formula de mai jos este o teoremă a sistemului Q:

$\exists y\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha$.

3.4. Rezoluția în $\mathcal{L}_P$

3.4.1. Teorema lui Herbrand

a) Forma standard a unei formule a $\mathcal{L}_P$

Înainte de a analiza rezoluția în $\mathcal{L}_P$, ca procedeu de demonstrare a nesatisfiabilității unei mulțimi de clauze, ne vom opri, pe scurt, la un rezultat remarcabil al $\mathcal{L}_P$, *teorema lui Herbrand*, rezultat care fundamentează un alt procedeu de respingere în logică. Ambele procedee de demonstrație se aplică unei formule aduse în forma standard [32].

Definiția 1. O formulă α a $\mathcal{L}_P$ este în forma standard dacă:

1. α este în forma normală prenexă, i.e. α are forma $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha^*$, unde $Q_i(1 \le i \le n)$ sunt cuantificatori $(\forall, \exists)$ iar α^* (matricea) nu conține cuantificatori (comp. 3.3.1).

2. α^* este o expresie în forma normală conjunctivă.

3. cuantificatorii existențiali sunt eliminați prin introducerea funcțiilor Skolem.

Construcția formei standard. 1 și 2 au fost considerate în 3.3.1, respectiv în 2.1.4.4. Vom exemplifica 3. Fie $\alpha = Q_1x_1...Q_nx_n\alpha^*$, unde α^* este în forma normală conjunctivă. Presupunem că $Q_mx_m(1 \le m \le n)$ este un cuantificator existențial.

a) Dacă nici un cuantificator universal nu apare în fața lui Q_mx_m, atunci vom lua o constantă nouă a (i.e. care nu apare în α^*), înlocuim toate ocurențele variabilei x_m cu a și eliminăm cuantificatorul Q_mx_m din prefix.

b) Dacă $Q_{s_1}x_{s_1},...,Q_{s_r}x_{s_r}$ $(1 \le s_1 < s_2...s_r < m)$ sunt toți cuantificatorii universali care apar în fața cuantificatorului Q_mx_m, atunci alegem un nou simbol funcțional r-ar, înlocuim toți x_m din α^* cu $f(x_{s_1}x_{s_2},...,x_{s_r})$ și eliminăm Q_mx_m din prefix. Prin eliminarea tuturor cuantificatorilor existențiali obținem forma standard a formulei α. Constantele și funcțiile utilizate pentru eliminarea variabilelor cuantificate existențial se numesc *funcții Skolem.*

Exemplul 1. Fie $\alpha: \forall x_1\exists x_2\forall x_3\exists x_4P(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Primul cuantificator existențial, $\exists x_2$, este precedat de $\forall x_1$, iar cel de-al doilea, $\exists x_4$, este precedat de cei doi cuantificatori universali $\forall x_1, \forall x_3$. Înlocuim așadar x_2 cu $f(x_1)$, iar x_4 cu $g(x_1,x_3)$ și obținem α în forma standard: $\forall x_1\forall x_3P(x_1,f(x_1),x_3,g(x_1,x_3))$.

---

[32] „Formă standard", concept introdus de Davis și Putnam, A computing procedure for quantification theory, *Journal of the ACM*, 7/3/1960, 201-215.

Conceptul "clauză" este cel din 2.6.1, numai că, de data aceasta vom opera cu formule ale $\mathcal{L}_P$. Să luăm un alt exemplu:

Exemplul 2. Fie $\alpha: \exists x \forall y [P(y,x) \equiv \neg \exists z (P(y,z) \wedge P(z,y))]$. Aducem formula α la forma standard, eliminând mai întâi $\equiv$.

$\exists x \forall y [(P(y,x) \supset \neg \exists z (P(y,z) \wedge P(z,y))) \wedge (\neg \exists z (P(y,z) \wedge P(z,y)) \supset P(y,x))]$, echivalent

$\exists x \forall y [(\neg P(y,x) \vee \neg \exists z (P(y,z) \wedge P(z,y))) \wedge (\exists z (P(y,z) \wedge P(z,y)) \vee P(y,x))]$, adică

$\exists x \forall y [(\neg P(y,x) \vee \forall z (\neg P(y,z) \vee \neg P(z,y))) \wedge (\exists z (P(y,z) \wedge P(z,y)) \vee P(y,x))]$.

Eliminăm acum cuantificatorii existențiali, prin introducerea funcțiilor Skolem, și obținem $\forall y [(\neg P(y,a) \vee \forall z (\neg P(y,z) \vee \neg P(z,y))) \wedge (P(y,f(y)) \wedge P(f(y),y)) \vee P(y,a)]$.

Construim forma prenexă prin scoaterea cuantificatorilor în prefix. Vom avea $\forall y \forall z [(\neg P(y,a) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(z,y)) \wedge ((P(y,f(y)) \wedge P(f(y),y)) \vee P(y,a))]$, care în forma normală conjunctivă arată astfel:

$\forall y \forall z [(\neg P(y,a) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(z,y)) \wedge (P(y,f(y)) \vee P(y,a)) \wedge (P(f(y),y) \vee P(y,a))]$.

Am obținut astfel forma standard a formulei α.

Forma standard poate fi, simplu, reprezentată prin următoarea mulțime de clauze: $C = \{\neg P(y,a) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(z,y), P(y,f(y)) \vee P(y,a), P(f(y),y) \vee P(y,a)\}$.

Teoremă. Dacă C este o mulțime de clauze care reprezintă forma standard a unei formule α, atunci are loc: α este nesatisfiabilă ddacă C este nesatisfiabilă.

Vom ilustra, printr-un exemplu simplu, o demonstrație a teoremei.

Fie $\alpha: \forall x_1 \exists x_2 \alpha^*(x_1,x_2)$, unde $\alpha^*(x_1,x_2)$ este matricea formulei α, matrice care conține variabilele x_1 și x_2. Fie α_1 formula $\forall x_1 \alpha^*(x_1, f(x_1))$. Ceea ce trebuie să arătăm este următorul bicondițional: α este nesatisfiabilă ddacă α_1 este nesatisfiabilă.

a) Dacă α este nesatisfiabilă, atunci α_1 este nesatisfiabilă.

(*Reductio*). Presupunem că α este nesatisfiabilă. Pentru orice model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ și pentru orice asignare μ în M avem: $[\forall x_1 \exists x_2 \alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\mu} = 0$, respectiv există o asignare ν x_1-variantă a lui μ astfel că $[\exists x_2 \alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\nu} = 0$. Și deci $[\alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\rho} = 0$ pentru orice asignare ρ x_2-variantă a lui ν.

Dacă α_1 este satisfiabilă, atunci există un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ și o asignare μ în M astfel că $[\forall x_1 \alpha^*(x_1, f(x_1))]^{\iota,\mu} = 1$. Și deci, pentru orice asignare ν x_1-variantă a lui μ vom avea $[\alpha^*(x_1, f(x_1))]^{\iota,\nu} = 1$. Ceea ce înseamnă că pentru orice x_1 există un element $[f(x_1)]^{\iota,\nu}$ pentru care α^* este adevărată. Fie ρ o x_2-variantă a lui x_1 și $x_2^\rho = [f(x_1)]^{\iota,\nu}$. Vom avea astfel $[\alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\rho} = 1$, rezultat care contrazice pe cel obținut din presupunerea nesatisfiabilității formulei α.

b) Dacă α_1 este nesatisfiabilă, atunci α este nesatisfiabilă.

(*Reductio*). Presupunem că α_1 este nesatisfiabilă iar α este satisfiabilă. Există deci un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ și o asignare μ în M astfel că $[\forall x_1 \exists x_2 \alpha^*(x_1, x_2)]^{\iota,\mu} = 1$.

Și deci $[\exists x_2 \alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\nu} = 1$ pentru orice ν x_1-variantă a lui μ. Și astfel, $[\alpha^*(x_1,x_2)]^{\iota,\rho} = 1$ pentru cel puțin o asignare ρ x_2-variantă a lui ν. Fie acum $M^* = \langle \Omega, \iota^* \rangle$ un model care extinde modelul $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ (adică un model cu același domeniu, cu o funcție

interpretare ι^* similară funcţiei ι, însă cu următoarea stipulaţie: $(f(x_1))^{\iota^*,\nu} = x_2^{\rho}$. Şi deci vom avea $[\forall x_1 \alpha^*(x_1, f(x_1))]^{\iota^*,\mu} = 1$, unde μ este o x_1-variantă a lui ν, rezultat care contrazice nesatisfiabilitatea formulei α_1.

b) Model Herbrand pentru o mulţime $\mathcal{C}$ de clauze

Prin teorema de mai sus, nesatisfiabilitatea unei formule în forma standard este echivalentă cu nesatisfiabilitatea mulţimii $\mathcal{C}$ de clauze care o reprezintă. Din definiţia nesatisfiabilităţii formulei deducem că mulţimea $\mathcal{C}$ de clauze este nesatisfiabilă ddacă nu există nici un model $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ (şi nici o asignare μ în M, în cazul în care formula conţine variabile libere) în care $\mathcal{C}$ să fie adevărată. Însă considerarea tuturor modelelor înseamnă considerarea tuturor domeniilor Ω şi a tuturor interpretărilor ι, fapt imposibil. Motiv pentru care, în cele ce urmează, vom considera un model anume, numit *model Herbrand pentru o mulţime $\mathcal{C}$ de clauze*, cu proprietatea că mulţimea $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă ddacă $\mathcal{C}$ este falsă în orice model Herbrand pentru $\mathcal{C}$.

Domeniul H al acestui model se construieşte astfel. Fie H_0 mulţimea tuturor constantelor care apar în clauzele din $\mathcal{C}$. Dacă nu există nici o astfel de constantă, atunci $H_0 = \{a\}$ (constantă de iniţiere). Pentru $i = 0,1,2,\ldots$, mulţimea H_{i+1} se obţine din reuniunea mulţimilor H_i cu mulţimea tuturor termenilor de forma $f^n(t_1,\ldots,t_n)$, pentru toate simbolurile funcţionale f^n care apar în $\mathcal{C}$ iar $t_1,\ldots,t_n$ sunt elemente ale mulţimii H_i. Prin domeniul Herbrand pentru mulţimea $\mathcal{C}$ de clauze vom înţelege domeniul $H = \lim_{i\to\infty} H_i$.

Exemplu.

Fie $\mathcal{C} = \{P(a), Q(b) \vee R(y), S(f(x))\}$.

$H_0 = \{a,b\}$

$H_1 = \{a,b,f(a),f(b)\}$

$\vdots$

$H = \{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b)),\ldots\}$

Funcţia interpretare a modelului Herbrand, ι, se defineşte astfel:

$a^{\iota} = a$, pentru orice constantă a $\mathcal{L}_P$.

$(f(t_1,\ldots,t_n))^{\iota} = f^{\iota}(t_1,\ldots,t_n) = f(t_1,\ldots,t_n)$, pentru orice simbol funcţional f şi $t_1,\ldots,t_n \in H$.

$P^{\iota} \subseteq H^n$, unde P este un simbol predicativ n-adic.

Definiţia 2. Fie $\mathcal{C}$ o mulţime de clauze. Mulţimea formulelor elementare închise de forma $P(t_1,\ldots,t_n)$, pentru orice simbol predicativ n-adic P care apare în $\mathcal{C}$, unde $t_1,\ldots,t_n$ sunt elemente ale domeniului Herbrand al mulţimii $\mathcal{C}$, se numeşte bază Herbrand a mulţimii $\mathcal{C}$.

Definiţia 3. O exemplificare închisă a unei clauze C dintr-o mulţime $\mathcal{C}$ de clauze este o clauză obţinută prin înlocuirea variabilelor din C cu elemente din domeniul H pentru $\mathcal{C}$.

Exemplu. Fie $\mathcal{C} = \{P(x), Q(y) \vee R(g(z))\}$. Domeniul Herbrand, H, al lui $\mathcal{C}$ este mulţimea $\{a, g(a), g(g(a)),\ldots\}$ iar baza Herbrand este mulţimea
$B = \{P(a), Q(a), R(a), P(g(a)), Q(g(a)), R(g(a)),\ldots\}$.

O exemplificare închisă a clauzei $Q(y) \vee R(g(z))$ din $\mathcal{C}$ este $Q(a) \vee R(g(a))$.

a) Cum, prin definiţie, $[P(t_1,\ldots,t_n)]^{\iota} = 1$ ddacă $\langle t_1^{\iota},\ldots,t_n^{\iota}\rangle \in P^{\iota}$ ddacă $\langle t_1,\ldots,t_n\rangle \in P^{\iota}$, $P^{\iota}(t_1,\ldots,t_n)$ poate fi identificat cu o mulţime M_{ι} astfel că $P^{\iota}(t_1,\ldots,t_n) = 1$ ddacă

$P(t_1,...,t_n) \in M_t$. Cum un model Herbrand pentru o mulţime C de clauze este unic determinat prin fixarea domeniului, prin interpretarea termenilor închişi (în felul în care am procedat mai sus) şi prin interpretarea simbolurilor predicative, având în vedere acest ultim item rezultă că numărul modelelor Herbrand pentru C coincide cu mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii care formează baza Herbrand a mulţimii C.

b) O altă modalitate de identificare a unui model este următoarea. Fie $B = \{B_0, B_1, ...\}$ o enumerare a elementelor care constituie baza Herbrand pentru C. Un model poate fi reprezentat prin mulţimea $M_t^* = \{m_1, m_2, ..., m_n, ...\}$, în care $m_i (i = 1,2,...)$ este fie B_i, dacă $P^t(t_1,...,t_n) = 1$, fie $\neg B_i$ dacă $P^t(t_1,...,t_n) = 0$.

Exemplu. Fie C mulţimea de clauze din exemplul precedent, fie B baza Herbrand a lui C mai sus specificată. Două modele distincte pentru C pot fi astfel redate:

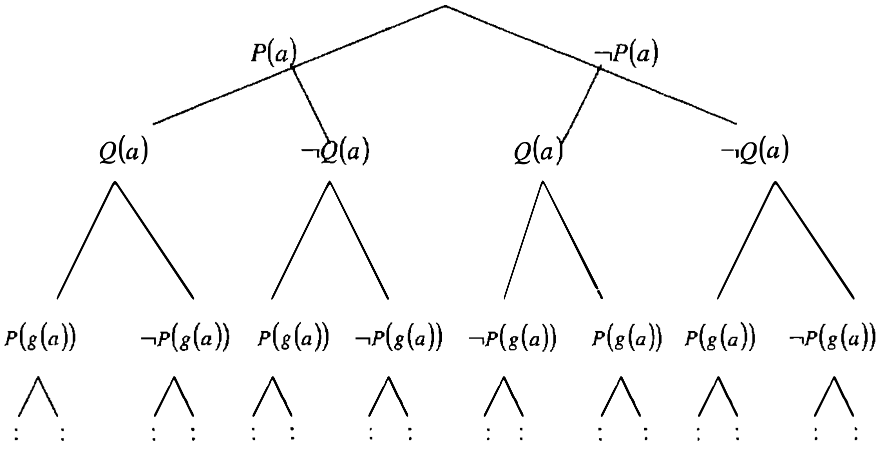
$$M_{t_1}^* = \{P(a), Q(a), R(a), P(g(a)), Q(g(a)), R(g(a)), ...\}$$

$$M_{t_2}^* = \{\neg P(a), Q(a), \neg R(a), \neg P(g(a)), Q(g(a)), \neg R(g(a)), ...\}$$

c) În fine, modelele pot fi identificate şi prin arborii semantici care le reprezintă.[33] Considerăm în acest sens un arbore diadic ordonat şi complet şi B baza Herbrand a mulţimii C de clauze. În originea arborelui semantic pentru C nu figurează nici o formulă din B. Pentru orice alt punct în afară de origine succesorul stâng este o formulă din B iar cel drept este negaţia acesteia.

Pentru orice punct P, fie M_P mulţimea tuturor punctelor de pe ramura arborelui $\mathcal{T}$ începând cu originea şi terminând cu P inclusiv. Este uşor de văzut că pentru orice punct P din arboreal semantic pentru C, M_P este o submulţime a vreunui model identificat în sensul b) de mai sus. Pentru acest motiv M_P se mai numeşte şi *model parţial* pentru C.

Exemplu. Fie $C = \{P(a), Q(g(y))\}$. Baza Herbrand pentru C este $B = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a)))...\}$. Arborele semantic pentru C este:



[33] Cf. J. A. Robinson, The generalized resolution principle, *Machine Intelligence*, 3, American Elsevier, New York, 1968, 77-94. R. Kowaslki; P. Hayes, Semantic trees in automatic theorem proving, *Machine Intelligence*, 4, American Elsevier, New York, 1969, 87-101.

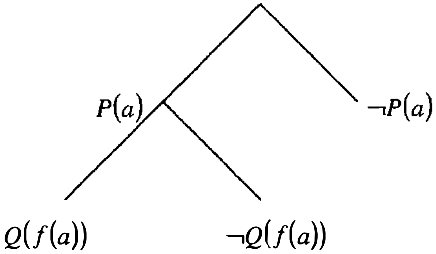
Definiția 4. Un punct P se numește punct-falsificare (f-punct) dacă M_P falsifică vreo exemplificare închisă a unei clauze din $\mathcal{C}$, însă $M_{P'}$ nu falsifică o asemenea clauză, pentru orice P' predecesor al lui P.

Sensul lui "falsifică" de aici este cel al negației clasice. Dacă $\neg P(a) \vee Q(f(a))$ este o exemplificare închisă a clauzei $\neg P(x) \vee Q(f(x))$, atunci negația exemplificării este formula $P(a) \wedge \neg Q(f(a))$. Și deci mulțimea $M_P = \{P(a), \neg Q(f(a))\}$ falsifică clauza menționată. Altfel spus, M_P falsifică o clauză C dacă pentru orice literal $L \in C$, $\neg L$ apare în M_P.

Definiția 5. Un arbore semantic $\mathcal{T}$ este închis dacă orice ramură a lui $\mathcal{T}$ are ca punct final un f-punct.

Definiția 6. Fie $\mathcal{T}$ un arbore semantic închis. Un punct P al lui $\mathcal{T}$ se numește punct inferențial dacă toți succesorii lui (imediați) sunt f-puncte.

Exemplu. Fie $\mathcal{C} = \{P(a), \neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(a))\}$. Arborele de mai jos este un arbore închis pentru $\mathcal{C}$.



c) Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand este unul dintre cele mai importante rezultate din logica matematică[34]. Pentru a arăta că o mulțime $\mathcal{C}$ de clauze este nesatisfiabilă este sufficient să considerăm doar modelele Herbrand pentru $\mathcal{C}$ și să arătăm că $\mathcal{C}$ este falsă în toate aceste modele. Întrucât există cazuri în care trebuie considerat un număr infinit de astfel de modele, o sistematizare a acestora într-un arbore semantic facilitează în bună măsură demonstrația.

Teorema lui Herbrand. O mulțime $\mathcal{C}$ de clauze este nesatisfiabilă ddacă oricărui arbore diadic ordonat și complet al lui $\mathcal{C}$ îi corespunde un arbore diadic ordonat finit închis.

Demonstrație.

a) Presupunem că $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă. Fie $\mathcal{T}$ arborele diadic ordonat și complet pentru $\mathcal{C}$. Pentru orice ramură $\mathcal{R}$ a lui $\mathcal{T}$, fie $M_{\mathcal{R}}$ mulțimea tuturor literalilor de pe $\mathcal{R}$. Evident, $M_{\mathcal{R}}$ este un model pentru $\mathcal{C}$. Întrucât $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă, $M_{\mathcal{R}}$ trebuie să falisfice vreo exemplificare închisă C^* a unei clauze C din $\mathcal{C}$. Fiindcă C^* este finită, trebuie să existe un f-punct P pe ramura $\mathcal{R}$. Și cum orice ramură a lui $\mathcal{T}$ are un f-punct, există un arbore semantic închis $\mathcal{T}^*$ pentru $\mathcal{C}$. Cum arborele $\mathcal{T}^*$ este unul diadic, $\mathcal{T}^*$ trebuie să fie finit. Căci, în caz contrar, prin *Lema lui König*, $\mathcal{T}^*$ ar conține o ramură infinită (fără vreun f-punct).

[34] Strict vorbind, Teorema lui Herbrand arată modul în care *demonstrabilitatea* unei formule a $\mathcal{L}_P$ se reduce la demonstrabilitatea unei formule fără cuantificatori, obținută din prima prin substituții. Așadar, această teoremă privește conceptul *sintactic* al *demonstrabilității* și nu cel semantic al validității (nesatisfiabilității). Formularea teoremei în termenii validității (nesatisfiabilității) este Teorema Skolem-Herbrand-Gödel. Formularea Teoremei lui Herbrand pe baza conceptelor semantice este, probabil, motivată de teorema de completitudine a lui Gödel, care arată co-extensivitatea conceptelor sintactice cu cele semantice. În formularea ei semantică, Teorema lui Herbrand fundamentează cele mai multe metode de demonstrație, în particular metoda rezoluției, una dintre cele mai cunoscute metode de demonstrație automată a teoremelor.

b) Presupunem acum că oricărui arbore diadic ordonat şi complet al lui $\mathcal{C}$ îi corespunde un arbore diadic ordonat finit închis. Rezultă că fiecare ramură $\mathcal{R}$ a lui $\mathcal{T}$ conţine un f-punct. Ceea ce înseamnă că $\mathcal{C}$ este falsă în orice model. Echivalent, $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă.

Teorema lui Herbrand (variantă). O mulţime $\mathcal{C}$ de clauze este nesatisfiabilă ddacă există o mulţime nesatisfiabilă finită $\mathcal{C}^*$ de exemplificări închise ale clauzelor din $\mathcal{C}$.

(Demonstrată fiind forma ei de mai sus, construiţi o demonstraţie a acestei variante).

d) Metoda Davis-Putnam

În varianta menţionată, Teorema lui Herbrand fundamentează o metodă de demonstraţie (ca metodă de respingere a negaţiei unei formule), aplicabilă atât în $\mathcal{L}_p$ cât şi în $\mathcal{L}_P$. Întrucât nu utilizează ideea unificării clauzelor (cf. 3.4.2), metoda este mai puţin performantă în $\mathcal{L}_P$, însă în $\mathcal{L}_p$ ea rămâne una eficientă. Ne vom opri în cele ce urmează la expunerea acestei metode în $\mathcal{L}_p$. Ea se bazează pe transformarea *negaţiei* formulei, a cărei validitate vrem s-o testăm, în forma ei clauzală iar apoi pe verificarea nesatisfiabilităţii acestei forme. Metoda Davis-Putnam [35] utilizează câteva reguli, *a căror aplicare nu afectează satisfiabilitatea sau nesatisfiabilitatea unei mulţimi de clauze.* Aplicarea lor succesivă conduce, în fine, la o mulţime de clauze a cărei ne/satisfiabilitate este uşor sesizabilă.

Pentru simplificarea transformărilor este utilă parcurgerea *prealabilă* a următoarelor două etape:

a) Eliminarea repetiţiilor din mulţimea respectivă de clauze şi ordonarea literalilor lor într-un fel anume.

b) Eliminarea clauzelor din $\mathcal{C}$ care conţin atât un literal L cât şi conjugatul său $\neg L$. Ceea ce obţinem este o mulţime $\mathcal{C}^*$ de clauze astfel încât: $\mathcal{C}^*$ este nesatisfiabilă ddacă $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă (de ce?).

Redăm, mai jos, regulile acestei metode.

1. *Regula clauzei 1-literale.* Dacă $\mathcal{C}$ conţine o clauză 1-literală L, atunci $\mathcal{C}^*$ se obţine din $\mathcal{C}$ prin eliminarea tuturor clauzelor care conţin clauza L şi a tuturor ocurenţelor lui $\neg L$ din celelalte clauze din $\mathcal{C}$. În acest caz vom spune că regula a fost aplicată pe literalul L.

Aplicarea acestei reguli conservă satisfiabilitatea mulţimii $\mathcal{C}$ de clauze.

Argument. Fie $\mathcal{C} = \{L, L \vee \alpha_1, \dots, L \vee \alpha_n, \neg L \vee \beta_1, \dots, \neg L \vee \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, respectiv $\beta_1, \dots, \beta_m$ sunt formule care reprezintă ceea ce rămâne din clauza respectivă în afara literalului L, respectiv $\neg L$. Presupunem, în continuare, că singurele ocurenţe ale lui L şi $\neg L$ sunt cele indicate. Atunci mulţimea $\mathcal{C}^* = \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_k$. Ceea ce trebuie arătat este, aşadar, următorul lucru: *$\mathcal{C}$ este satisfiabilă ddacă $\mathcal{C}^*$ este satisfiabilă.*

a) Dacă $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, atunci $\mathcal{C}^*$ este satisfiabilă.

Presupunem că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Există deci o interpretare *Int* a variabilelor propoziţionale care apar în toate formulele din $\mathcal{C}$, astfel încât toate clauzele din $\mathcal{C}$ iau valoarea logică 1. Avem, aşadar,

$$L = L \vee \alpha_1 = \dots = L \vee \alpha_n = \neg L \vee \beta_1 = \dots = \neg L \vee \beta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 1.$$

[35] M. Davis; H. Putnam, A computing procedure for quantification theory, *Journal of the ACM*, 7/1960, 201-215. Prima încercare de implementare a Th. lui Herbrand, inconvenabilă practic, îi aparţine lui Gilmore (cf. P.C. Gilmore, A proof method for quantification theory: its justification and realization, *I.B.M.J. Res. Develop.*, 1960, 28-35.

Cum $L=1$, $\neg L=0$. Iar fiindcă $\neg L \vee \beta_i = 1$ ($i=1,...,m$), rezultă că $\beta_i = 1$. Şi deci vom avea $\beta_1 = ... = \beta_m = \gamma_1 = ... = \gamma_k = 1$ în *Int*. Aşadar, C^* este satisfiabilă.

b) Dacă C^* este satisfiabilă, atunci C este satisfiabilă.

Fie Int_1 o interpretare a variabilelor propoziţionale care apar în toate formulele din C^*, astfel încât toate clauzele din C^* iau simultan valoarea logică 1. Fie Int_2 o interpretare similară interpretării Int_1 (i.e. asignează aceleaşi valori logice tuturor variabilelor propoziţionale în afară de variabila desemnată de literalul L) cu următoarea clauză: în Int_2 L ia valoarea logică 1. Evident, valoarea logică a tuturor clauzelor care nu conţin literalul L este aceeaşi în ambele interpretări. Aşadar, din faptul că $\gamma_1 = ... = \gamma_k = 1$ în Int_1 rezultă că $\gamma_1 = ... = \gamma_k$ în Int_2, deoarece formulele γ_j nu conţin nici L, nici $\neg L$. Apoi, cum clauzele $\beta_1,...,\beta_m$ sunt adevărate în Int_2, ele vor rămâne adevărate în Int_2 prin adăugarea disjunctivă a literalului $\neg L$. Şi deci, în Int_2, toate clauzele de forma $\neg L \vee \beta_i$ ($i=1,...,m$) sunt adevărate. Iar din faptul că $L=1$ în Int_2, rezultă că toate clauzele de forma $L \vee \alpha_1,...,L \vee \alpha_n$ sunt adevărate în Int_2. Şi deci toate clauzele din C sunt adevărate în Int_2. Aşadar, C este satisfiabilă.

2. *Regula literalului fără conjugat.* Presupunem că mulţimea C de clauze conţine (câteva) clauze în care apare literalul L şi nici o clauză din C nu conţine $\neg L$. Atunci, prin eliminarea tuturor clauzelor care conţin L se obţine mulţimea C^* de clauze, astfel încât are loc: C este satisfiabilă ddacă C^* este satisfiabilă. Şi în acest caz vom spune că regula a fost aplicată pe literarul L. Dacă mulţimea C^*, obţinută prin aplicarea acestei reguli asupra mulţimii C, este o mulţime *vidă*, atunci C este satisfiabilă.

Argument. Fie $C = \{L \vee \alpha_1,...,L \vee \alpha_n, \beta_1,...,\beta_m\}$, unde L apare strict în ocurenţele menţionate (Cazul în care în loc de L apare $\neg L$ se tratează similar). Atunci $C^* = \{\beta_1,...,\beta_m\}$.

a) Dacă C este satisfiabilă, atunci C^* este satisfiabilă. Acest rezultat este imediat, deoarece C^* este o submulţime a mulţimii C.

b) Dacă C^* este satisfiabilă, atunci C este satisfiabilă.

Presupunem că C^* este satisfiabilă. Există deci o interpretare Int_1 a variabilelor propoziţionale care apar în toate clauzele din C^* astfel încât toate aceste clauze sunt adevărate în Int_1. Însă, în C^* nu apare nici L, nici $\neg L$. Fie Int_2 o interpretare similară lui Int_1, astfel încât $L=1$ în Int_2 ddacă L apare în clauzele din C (respectiv $L=0$ în Int_2 ddacă $\neg L$ apare în clauzele din C). În acest fel în Int_2 toate clauzele din C sunt adevărate şi deci C este satisfiabilă.

3. *Regula divizării.* Fie C următoarea mulţime de clauze:

$\{L \vee \alpha_1,...,L \vee \alpha_n, \neg L \vee \beta_1,...,\neg L \vee \beta_m, \gamma_1,...,\gamma_k\}$. Mulţimea C are aşadar unele clauze care conţin literalul L, altele care-l conţin pe $\neg L$ şi, eventual, clauze care nu-l conţin nici pe L, nici pe $\neg L$. Presupunem că L şi $\neg L$ au strict ocurenţele menţionate. Fie, acum, C_1 mulţimea de clauze obţinută din C prin eliminarea tuturor clauzelor care conţin literalul L şi a tuturor ocurenţelor literalului $\neg L$ din cele m clauze. Fie C_2 mulţimea de clauze obţinută din C prin eliminarea tuturor clauzelor care conţin literalul $\neg L$ şi a tuturor ocurenţelor literalului L din cele n clauze. Aşadar, $C_1 = \{\beta_1,...,\beta_m, \gamma_1,...,\gamma_k\}$ iar $C_2 = \{\alpha_1,...,\alpha_n, \gamma_1,...,\gamma_k\}$. Vom spune,

în acest caz, că mulţimea $\mathcal{C}$ *se divide pe literalul L* şi vom avea: $\mathcal{C}$ *este satisfiabilă ddacă* $\mathcal{C}_1$ *este satisfiabilă sau* $\mathcal{C}_2$ *este satisfiabilă.*

Argument (exerciţiu).

Exemplul 1. Dată fiind formula $\alpha = (p \equiv q) \vee (p \equiv \neg q)$, să demonstrăm validitatea acestei formule cu ajutorul metodei Davis-Putnam. Construim mai întâi negaţia formulei, i.e. $\neg\alpha = \neg[(p \equiv q) \vee (p \equiv \neg q)]$. Construim mulţimea $\mathcal{C}$ de clauze corespunzătoare, construind forma normală conjunctivă a formulei $\neg\alpha$.

$\neg[(p \equiv q) \vee (p \equiv \neg q)]$ eq $\neg(p \equiv q) \wedge \neg(p \equiv \neg q)$ eq

eq $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$. $\mathcal{C} = \{\neg p \vee \neg q, p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q\}$.

Aplicând regula divizării pe literalul p obţinem: $\mathcal{C}_1 = \{q, \neg q\}$ şi $\mathcal{C}_2 = \{q, \neg q\}$. Aplicăm acum regula clauzei 1-literale atât mulţimii $\mathcal{C}_1$ cât şi mulţimii $\mathcal{C}_2$ şi obţinem în fiecare mulţime clauza vidă □. Ceea ce înseamnă că cele două mulţimi $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt nesatisfiabile; echivalent: α este o formulă validă.

Exemplul 2. Fie $\beta = \neg(\neg p \wedge \neg q) \supset (p \wedge q)$. $\neg\beta = \neg[\neg(\neg p \wedge \neg q) \supset (p \wedge q)]$. Construim $\mathcal{C}$ ca mai sus. $\neg[\neg(\neg p \wedge \neg q) \supset (p \wedge q)]$ eq $\neg[(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)]$ eq $\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)$ eq $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$. $\mathcal{C} = \{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$. Prin aplicarea regulii divizării pe literalul p obţinem $\mathcal{C}_1 = \{\neg q\}$ şi $\mathcal{C}_2 = \{q\}$. Aplicăm fiecăreia din cele două mulţimi, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, regula clauzei 1-literale şi obţinem o *mulţime vidă de clauze* (simbolic: ■). Semnificaţia acestui rezultat este următoarea: cum mulţimile obţinute prin aplicarea regulii clauzei 1-literale sunt vide[36], rezultă că mulţimea $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Şi deci formula $\neg\beta$ este satisfiabilă, adică β este nevalidă.

Aşadar, a decide cu ajutorul metodei Davis-Putnam asupra validităţii unei formule înseamnă a aplica succesiv regulile aferente metodei asupra unei formule aflate în forma ei clauzală, astfel încât, în final (i.e. atunci când nici o regulă nu se mai poate aplica) obţinem strict una din următoarele două situaţii:

a) Fiecare mulţime de clauze conţine clauza vidă, caz în care formula iniţială considerată este *validă.*

b) Cel puţin una din mulţimile de clauze este vidă, caz în care formula iniţială considerată este *nevalidă.*

Avem deci teorema de mai jos.

Teoremă. Orice construcţie a unei demonstraţii prin metoda Davis-Putnam are un număr finit de paşi şi se încheie strict cu una din situaţiile a), b) de mai sus.

Demonstraţie.

1. Demonstraţia prin metoda Davis-Putnam are un număr finit de paşi. Căci oricare din regulile acestei metode, aplicată asupra unei mulţimi $\mathcal{C}$ de clauze, reduce numărul literalilor distincţi din aceste clauze. Însă orice mulţime considerată de clauze are un număr finit de literali şi deci şi regulile metodei pot fi aplicate doar de un număr finit de ori.

2. Orice demonstraţie se încheie strict cu una din cele două situaţii, a) sau b).

(Contrapoziţie). Presupunem că mulţimea obţinută $\mathcal{C}$ de clauze este nevidă şi nu conţine clauza vidă. Cum $\mathcal{C}$ este nevidă, considerăm o clauză $C \in \mathcal{C}$ şi care este nevidă (deoarece $\mathcal{C}$ nu conţine o astfel de clauză). Alegem acum un literal L din clauza C. Dacă literalul conjugat lui, $\neg L$, nu apare în vreo clauză din $\mathcal{C}$, atunci putem aplica regula literalului fără conjugat. În caz contrar (i.e. dacă $\neg L$ apare în vreo clauză din $\mathcal{C}$), atunci aplicăm una din celelalte două reguli. Aşadar, demonstraţia nu este încă încheiată.

---

[36] Atenţie la deosebirea dintre „clauză vidă (□)" şi „mulţime vidă de clauze (■)".

Argumentarea faptului că a) şi b) sunt cele două alternative pe care le acoperă metoda Davis-Putnam o putem face pe baza următoarelor echivalenţe:

α este validă ddacă $\{\neg\alpha\}$ *este nesatisfiabilă ddacă* C *este nesatisfiabilă*, unde C este expresia clauzală a formulei $\neg\alpha$ (exerciţiu).

3.4.2. Rezoluţia în $\mathcal{L}_P$

Ideea metodei rezoluţiei în $\mathcal{L}_P$ este aceea de a verifica dacă mulţimea C de clauze conţine clauza vidă □, caz în care C este nesatisfiabilă. Iar dacă C nu conţine clauza vidă, atunci se verifică dacă nu cumva această clauză poate fi derivată din C. Rezoluţia poate fi deci considerată ca o regulă de inferenţă de generare de noi clauze din C. Deducţia clauzei vide □ din C se numeşte *demonstraţie* a lui C.

Rezoluţia în $\mathcal{L}_P$ este mai complexă decât rezoluţia în logica propoziţiilor. Iar acest lucru se datorează clauzelor care conţin variabile, caz în care găsirea literalilor complementari este uneori dificilă. Să luăm un exemplu.

Fie $C_1 = \neg P(x,a) \vee \neg P(x,z) \vee \neg P(z,x)$ şi $C_2 = P(y, f(y)) \vee P(y,a)$. În acest caz C_1 nu conţine nici un literal care este complementar vreunui literal din C_2. Însă, dacă facem următoarele substituţii: *x/a*, *z/a* şi *y/a*, vom obţine următoarele clauze închise:

$C_1^* = \neg P(a,a)$ şi $C_2^* = P(a, f(a)) \vee P(a,a)$.

Acum, din C_1^* şi C_2^* obţinem rezolventa $C_3^* = P(a, f(a))$. În acest caz cele două mulţimi de literali $\{P(x,a), P(x,z), P(z,x)\}$ şi $\{P(y,a)\}$, obţinute prin eliminarea negaţiei din C_1, au fost *unificate* prin substituţia *x/a*, *z/a*, *y/a*. Întrucât obţinerea rezolventelor din clauze reclamă adesea substituţii ale variabilelor, să ne oprim mai îndeaproape la acest din urmă concept.

a) Substituţii

Aşa cum am văzut în 3.1.1, substituţia este o funcţie de la variabile la termeni. Această operaţie poate fi convenabil reprezentată în forma unei mulţimi $\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, în care fiecare x_i $(1 \le i \le n)$ este o variabilă individuală, t_i este un termen diferit de x_i iar pentru $1 \le i \ne j \le n$, $x_i \ne x_j$. Dacă $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni închişi, atunci substituţia se numeşte *închisă*. Dacă mulţimea de mai sus n-are nici un element, atunci substituţia se numeşte *vidă* şi se notează cu ε.

Aşa cum am văzut în 3.1.1, deşi operaţie pe variabile, substituţia poate fi extinsă la orice termen şi la orice formulă. În cele ce urmează considerăm următoarele categorii sintactice: termeni (sau mulţimi de termeni), formule elementare (sau mulţimi de formule elementare), literali, clauze (sau mulţimi de clauze). Prin „expresie" vom înţelege oricare din aceste entităţi.

Definiţia 1. Fie E o expresie iar $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ *o substituţie. Prin* $\sigma(E)$ *se înţelege expresia obţinută din E prin înlocuirea simultană a tuturor ocurenţelor variabilei* x_i $(1 \le i \le n)$ *din E cu termenul* t_i*. Ceea ce obţinem este o exemplificare (instanţiere) a expresiei E.*

Definiţia 2. Suportul unei substituţii σ *este mulţimea variabilelor x astfel că* $\sigma(x) \ne x$. σ *are suport finit dacă mulţimea suport a acesteia este finită.*

Definiţia 3. Fie $\sigma_1 = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ şi $\sigma_2 = \{y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$ două substituţii cu suport finit. Atunci compunerea substituţiilor σ_1 şi σ_2 este substituţia

$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \{x_1 / \sigma_2(t_1),..., x_n / \sigma_2(t_n), y_1 / u_1,..., y_m / u_m\}$, unde variabilele $y_1,..., y_m$ nu figurează printre variabilele $x_1,...,x_n$ (în caz contrar elementul y_i / u_i este eliminat) iar elementele mulțimii $\sigma_1 \circ \sigma_2$ astfel că $x_j = \sigma_2(t_j)$ sunt eliminate (i.e. este eliminate orice element de forma *x/x*).

Exemplu. Fie $\sigma_1 = \{x / f(x, y, c), y / h(a,b), z / g(h(x, a))\}$ și $\sigma_2 = \{x / i(a,b), w / j(u,v)\}$.

Atunci , $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \{x / f(i(a,b), y, c), y / h(a,b), z / g(h(i(a,b), a)), w / j(u,v)\}$.

Definiția 4. O substituție σ este unificator pentru mulțimea de expresii $\{E_1,...,E_n\}$ dacă $\sigma(E_1) = \sigma(E_2) = ... = \sigma(E_n)$. Mulțimea $\{E_1,...,E_n\}$ este unificabilă dacă există un unificator pentru ea.

Definiția 5. Fie θ și σ două substituții. σ este mai generală decât θ dacă există o substituție λ astfel că $\theta = \sigma \circ \lambda$.

Exemplu. Fie $\sigma_1 = \{x / f(a, g(z)), w / b\}$ și $\sigma_2 = \{x / f(x, y)\}$. σ_2 este mai generală decât σ_1, deoarece $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \lambda$, unde $\lambda = \{x / a, y / g(z), w / b\}$.

Definiția 6. O substituție σ este (un) cel mai general unificator dacă σ este un unificator și este mai general decât oricare altul. (Echivalent: σ este cel mai general unificator dacă pentru orice unificator θ există o substituție λ astfel că $\theta = \sigma \circ \lambda$).

Exemple. Fie $E_1 = f(x, g(y))$ și $E_2 = f(g(u), h(z))$. Aceste două expresii nu sunt unificabile, deoarece unificarea ar cere $g = h$.

Nici expresiile $E_1 = f(x, g(x), x)$ și $E_2 = f(g(u), g(g(z)), z)$ nu sunt unificabile, deoarece ar trebui să avem $x = g(u) = z$; dar și $g(x) = g(g(z))$, adică $x = g(z)$, fapt care implică $z = g(z)$.

Pentru expresiile $E_1 = f(x, g(y))$ și $E_2 = f(g(u), g(z))$, substituția $\sigma = \{x / g(u), z / y\}$ este cel mai general unificator.

b) Algoritmul unificării

Dată fiind o mulțime finită de expresii (nevide) intenția eleborării unui algoritm este aceea de a găsi cel mai general unificator pentru această mulțime (în cazul în care există). Iar dacă mulțimea nu este unificabilă, atunci algoritmul va indica acest lucru. Date fiind *n* expresii, de exemplu, algoritmul unificării lor constă în detectarea diferențelor sau dezacordurilor (*Dez*) între ele și eliminarea lor.

Exemplu. Fie $E_1 = f(g(a, h(x)))$ și $E_2 = f(g(z, h(x)))$. Mulțimea neconcordanțelor (*Dez*) dintre E_1 și E_2 se construiește astfel. În expresiile E_1 și E_2 se localizează primul simbol (citind de la stânga la dreapta) în care aceste expresii nu coincid. În acest exemplu, primul simbol (și singurul) este cel care ocupă poziția a cincea, respectiv *a* din E_1 și *z* din E_2. Așadar, $Dez = \{a, z\}$. Însă substituția lui *z* cu *a* duce la eliminarea dezacordului celor două expresii și deci la unificarea lor.

Algoritmul unificării.

Fie $Ex = \{E_1, E_2,..., E_n\}$ o mulțime finită de expresii nevide.

Pasul 1. Se pune $k = 0$, $Ex_k = Ex$ și $\sigma_k = \varepsilon$.

Pasul 2. Dacă Ex_k este un *singleton* (i.e. prin eliminarea iterărilor mulțimea conține un singur element), atunci σ_k este cel mai general unificator pentru Ex. În caz contrar se construiește mulțimea Dez_k pentru Ex_k.

Pasul 3. Dacă Dez_k conţine elementele x_k şi t_k, unde x_k este o variabilă care nu apare în t_k, atunci se trece la pasul 4. În caz contrar Ex nu este unificabilă.

Pasul 4. Fie $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \{x_k / t_k\}$ şi $Ex_{k+1} = \sigma_{k+1}(Ex)$.

Pasul 5. Se pune $k = k+1$ şi se trece la pasul 2.

Exemplu. Fie $Ex = \{f(x,b,g(y)), f(a,z,g(h(u)))\}$

1. $k=0$, $Ex_0 = Ex$, $\sigma_0 = \varepsilon$. Ex_0 nu este un singleton şi deci σ_0 nu este cel mai general unificator pentru Ex.

2. $Dez_0 = \{x,a\}$. Dez_0 conţine variabila x care nu apare în termenul a.

3. Fie $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{x/a\} = \{x/a\}$ $Ex_1 = \sigma_1(Ex_0) = \{f(a,b,g(y)), f(a,z,g(h(u)))\}$

4. Ex_1 nu este un singleton şi deci vom construi Dez_1 pentru Ex_1. $Dez_1 = \{b,z\}$.

5. Fie $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{z/b\} = \{x/a, z/b\}$

$Ex_2 = \sigma_2(Ex) = \{z/b\}(Ex_1) = \{f(a,b,g(y)), f(a,b,g(h(u)))\}$

6. Ex_2 nu este un singleton şi deci vom construi Dez_2 pentru Ex_2. $Dez_2 = \{y, h(u)\}$.

7. Fie $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \{y/h(u)\} = \{x/a, z/b, y/h(u)\}$.

$Ex_3 = \sigma_3(Ex) = \{y/h(u)\}(Ex_2) = \{f(a,b,g(h(u))), f(a,b,g(h(u)))\} = \{f(a,b,g(h(u)))\}$

8. Întrucât Ex_3 este un singleton, $\sigma_3 = \{x/a, z/b, y/h(u)\}$ este cel mai general unificator pentru Ex.

Exerciţii

1. Determinaţi cel mai general unificator pentru

$Ex = \{P(f(x)), a, g(h(y)), P(f(a)), z, g(h(b))\}$

2. Este mulţimea de mai jos unificabilă?

$Ex = \{f(x, g(y), a), f(a, g(h(z)), j(c))\}$

Teorema unificării. Fie Ex o mulţime unificabilă de expresii. Atunci algoritmul unificării se termină în mod necesar în pasul 2 iar ultimul σ_k este cel mai general unificator pentru Ex.

Demonstraţie (Inducţie pe k). Fie Ex mulţimea unificabilă considerată. Fie θ un unificator arbitrar. În acord cu definiţia celui mai general unificator, trebuie arătat că pentru $k = 0,1,2,...$ există o substituţie λ_k astfel că $\theta = \sigma_k \circ \lambda_k$.

$k = 0$. Punem $\lambda_0 = \theta$. Şi deci vom avea $\theta = \sigma_0 \circ \lambda_0$ şi astfel $\sigma_0 = \varepsilon$.

Presupunem că $\theta = \sigma_k \circ \lambda_k$ are loc pentru $0 \le k \le n$. Dacă $\sigma_n(Ex)$ este un singleton, atunci algoritmul se termină în pasul 2, iar σ_n este cel mai general unificator pentru Ex. Dacă $\sigma_n(Ex)$ nu este un singleton, atunci algoritmul unificării construieşte mulţimea Dez_n a $\sigma_n(Ex)$. Fiindcă $\theta = \sigma_n \circ \lambda_n$ este un unificator pentru Ex, λ_n trebuie să unifice Dez_n şi deci Dez_n trebuie să conţină o variabilă. Fie t_n orice alt element diferit de x_n. Fiindcă λ_n unifică Dez_n, $\lambda_n(x_n) = \lambda_n(t_n)$. Însă x_n nu apare în t_n, deoarece, în caz contrar, $\lambda_n(x_n)$ ar apărea în $\lambda_n(t_n)$, fapt imposibil, căci x_n şi t_n sunt distincţi iar $\lambda_n(x_n) = \lambda_n(t_n)$. Şi deci algoritmul nu se termină în pasul 3, ci trece în pasul 4 şi pune $\sigma_{n+1} = \sigma_n \circ \{x_n / t_n\}$. Fie $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \{x_n / \lambda_n(t_n)\}$. Însă x_n nu apare în t_n şi deci $\lambda_{n+1}(t_n) = \lambda_n - \{x_n / \lambda_n(t_n)\}(t_n) = \lambda_n(t_n)$. Vom avea, aşadar,

$\{x_n / t_n\} \circ \lambda_{n+1} = \{x_n / \lambda_{n+1}(t_n)\} \cup \lambda_{n+1} = \{x_n / \lambda_n(t_n)\} \cup \lambda_{n+1} = \{x_n / \lambda_n(t_n)\} \cup (\lambda_n - \{x_n / \lambda_n(t_n)\}) = \lambda_n$

Adică, $\lambda_n = \{x_n / t_n\} \circ \lambda_{n+1}$. Aşadar, $\theta = \sigma_n \circ \lambda_n = \sigma_n \circ \{x_n / t_n\} \circ \lambda_{n+1} = \sigma_{n+1} \circ \lambda_{n+1}$. Şi astfel, pentru orice $k \geq 0$ există o substituţie λ_k astfel că $\theta = \sigma_k \circ \lambda_k$. Fiindcă algoritmul trebuie să se termine şi fiindcă nu se termină la pasul 3, el trebuie să se termine la pasul 2. Apoi, fiindcă $\theta = \sigma_k \circ \lambda_k$ pentru orice *k*, ultimul σ_k este cel mai general unificator pentru Ex.

c) Rezoluţia în $\mathcal{L}_P$

Rezoluţia în $\mathcal{L}_P$ este o regulă de inferenţă care generează rezolvente dintr-o mulţime de clauze.

Definiţia 7. Dacă doi sau mai mulţi literali (cu acelaşi semn) ai unei clauze C au cel mai general unificator σ, atunci $\sigma(C)$ se numeşte factor al lui C.

Exemplu. Fie $C = \neg P(a,x) \vee Q(b,y) \vee Q(b,f(z))$. Cum se poate constata uşor, penultimii doi literali au cel mai general unificator $\sigma = \{y / f(z)\}$. Şi deci $\sigma(C) = \neg P(a,x) \vee Q(b,f(z))$ este un factor al lui *C*.

Definiţia 8. Fie C_1 şi C_2 două clauze care n-au variabile în comun iar L_1 şi L_2 doi literali din C_1, respectiv C_2. Dacă L_1 şi $\neg L_2$ au cel mai general unificator σ, atunci clauza $(\sigma(C_1) - \sigma(L_1)) \cup (\sigma(C_2) - \sigma(L_2))$ se numeşte rezolventă binară a clauzelor C_1 şi C_2. L_1 şi L_2 sunt literalii în raport cu care se obţine rezolventa.

Exemplu. Fie $C_1 = P(z) \vee Q(x,y)$ şi $C_2 = R(a,z) \vee \neg Q(f(a),b)$. Întrucât variabila *z* apare în ambele clauze, vom redenumi această variabilă în C_2 în *w*: $R(a,w) \vee \neg Q(f(a),b)$. Acum, $L_1 = Q(x,y)$ iar $L_2 = \neg Q(f(a),b)$. Şi deci $\neg L_2 = Q(f(a),b)$. Cel mai general unificator al literalilor L_1 şi $\neg L_2$ este $\sigma = \{x / f(a), y / b\}$. Şi astfel vom avea:

$$(\sigma(C_1) - \sigma(L_1)) \cup (\sigma(C_2) - \sigma(L_2)) = (\{P(z), Q(f(a),b)\} - \{Q(f(a),b)\}) \cup$$
$$\cup (\{R(a,w), \neg Q(f(a),b)\} - \{\neg Q(f(a),b)\}) = \{P(z)\} \cup \{R(a,w)\} = \{P(z), R(a,w)\} = P(z) \vee R(a,w)$$

Aşadar, $P(z) \vee R(a,w)$ este rezolventa binară a clauzelor C_1 şi C_2. O rezolventă a clauzelor C_1 şi C_2 este una din următoarele rezolvente binare: o rezolventă binară a celor două clauze, o rezolventă binară a unui factor al celor două clauze, o rezolventă binară a clauzei C_1 şi a unui factor al clauzei C_2, în fine, o rezolventă binară a unui factor al lui C_1 şi a clauzei C_2.

Exemplu. Fie clauzele $C_1 = P(x,y) \vee Q(y) \vee Q(g(a))$ şi $C_2 = \neg P(y, g(a)) \vee R(a,b)$. Cel mai general unificator al literalilor $Q(y) \vee Q(g(a))$ este $\sigma = \{y / g(a)\}$ şi deci un factor al clauzei C_1 este $\sigma(C_1) = C_1^* = P(x, g(a)) \vee Q(g(a))$. Iar o rezolventă a clauzelor C_1^* şi C_2 (şi deci şi o rezolventă binară a clauzelor C_1 şi C_2) este $Q(g(a)) \vee R(a,b)$.

Lemă. Fie C_1 şi C_2 două clauze, fie C_1^* şi C_2^* exemplificări ale lor. Dacă C^* este rezolventa clauzelor C_1^* şi C_2^*, atunci există o rezolventă C a clauzelor C_1 şi C_2, astfel încât C^* este o exemplificare a lui C.

Demonstraţie. Presupunem că cele două clauze, C_1 şi C_2, n-au variabile comune (în caz contrar trecem la redenumirea lor). Dacă L_1^* şi L_2^* sunt literalii în raport cu care se obţine rezolventa clauzelor C_1^* şi C_2^* din enunţul *Lemei*, atunci, în acord cu *Definiţia 8*, există cel mai general unificator σ al clauzelor L_1^* şi $\neg L_2^*$, astfel încât

$$C^* = (\sigma(C_1^*) - \sigma(L_1^*)) \cup (\sigma(C_2^*) - \sigma(L_2^*)),$$

unde C^* este o rezolventă binară a clauzelor C_1^* şi C_2^*.

În acord cu ipoteza lemei, C_1^* şi C_2^* sunt exemplificări ale clauzelor C_1 şi C_2. Există deci o substituție θ astfel încât $C_1^* = \theta(C_1)$ şi $C_2^* = \theta(C_2)$. Fie $L_1^1, \ldots, L_1^n$ literalii din C_1 care corespund lui L_1^* (în sensul că $\theta(L_1^1) = \ldots = \theta(L_1^n) = L_1^*$). Fie $L_2^1, \ldots, L_2^m$ literalii din C_2 care corespund lui L_2^*. Dacă $n, m > 1$, atunci pentru $\{L_1^1, \ldots, L_1^n\}$ obținem cel mai general unificator λ_1, respectiv pentru $\{L_2^1, \ldots, L_2^m\}$ obținem cel mai general unificator λ_2. Fie acum $L_1 = \lambda_1(L_1^1)$ şi $L_2 = \lambda_2(L_2^1)$ (Întrucât λ_1 şi λ_2 sunt cei mai generali unificatori, vom avea $\lambda_1(L_1^1) = \ldots = \lambda_1(L_1^n)$, respectiv $\lambda_2(L_2^1) = \ldots = \lambda_2(L_2^m)$). Şi astfel, L_1 este un literal în factorul $\lambda_1(C_1)$ al lui C_1 iar L_2 este un literal în factorul $\lambda_2(C_2)$ al lui C_2. Dacă $n = m = 1$, atunci punem $\lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon$, iar $L_1 = \lambda_1(L_1^1)$ şi $L_2 = \lambda_2(L_2^1)$. Fie acum $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Evident, L_1^* este o exemplificare a lui L_1, iar L_2^* este o exemplificare a lui L_2. Iar fiindcă L_1^* şi $\neg L_2^*$ sunt unificabili, L_1 şi $\neg L_2$ sunt unificabili. Fie δ cel mai general unificator al L_1 şi $\neg L_2$. Fie, în fine,

$$C = (\delta(\lambda(C_1)) - \delta(L_1)) \cup (\delta(\lambda(C_2)) - \delta(L_2)) =$$
$$= (\delta(\lambda(C_1)) - \delta(\lambda(\{L_1^1, \ldots, L_1^n\}))) \cup (\delta(\lambda(C_2)) - \delta(\lambda(\{L_2^1, \ldots, L_2^m\}))) =$$
$$= (\delta \circ \lambda(C_1) - \delta \circ \lambda(\{L_1^1, \ldots, L_1^n\})) \cup (\delta \circ \lambda(C_2) - \delta \circ \lambda(\{L_2^1, \ldots, L_2^m\})).$$

În acord cu enunțul lemei, C este rezolventa clauzelor C_1 şi C_2. Acum, C^* este o exemplificare a lui C deoarece $C^* = (\sigma(C_1^*) - \sigma(L_1^*)) \cup (\sigma(C_2^*) - \sigma(L_2^*)) =$

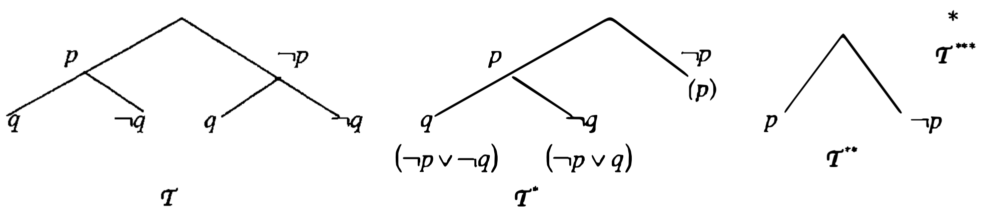
$$= (\sigma(\theta(C_1)) - \sigma(\theta(\{L_1^1, \ldots, L_1^n\}))) \cup (\sigma(\theta(C_2)) - \sigma(\theta(\{L_2^1, \ldots, L_2^m\}))) =$$
$$= (\sigma \circ \theta(C_1) - \sigma \circ \theta(\{L_1^1, \ldots, L_1^n\})) \cup (\sigma \circ \theta(C_2) - \sigma \circ \theta(\{L_2^1, \ldots, L_2^m\}))$$

Însă $\delta \circ \lambda$ este mai general decât $\sigma \circ \theta$.

Completitudinea metodei rezoluției în $\mathcal{L}_P$

Demonstrarea completitudinii acestei metode în $\mathcal{L}_P$ se face cu uşurință apelând la ideea de arbore semantic. De altfel, între cele două concepte, „rezoluție" şi „arbore semantic", există o strânsă corelație.

Exemplu. Fie $C = \{p, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$. Mulțimea formulelor elementare din C este $\{p, q\}$. Prezentăm, mai jos, arborele diadic (semantic) complet pentru C, fie acesta $\mathcal{T}$, şi arborele diadic închis, $\mathcal{T}^*$, corespunzător lui. În $\mathcal{T}^*$ în paranteze sunt trecute clauzele pe care le contrazic mulțimile de puncte din ramura respectivă.



În $\mathcal{T}^*$ p este un punct inferențial iar $\neg p$, q şi $\neg q$ sunt f-puncte. Clauzele $\neg p \vee \neg q$ şi $\neg p \vee q$, rezolvate, dau $\neg p$, o clauză contrazisă de punctul p din $\mathcal{T}^*$. Aşadar, dacă adăugăm $\neg p$ mulțimii C, atunci arborele diadic pentru $C' = \{p, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q, \neg p\}$ este $\mathcal{T}^{**}$, căci $\neg p \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$. Evident, clauzele p şi $\neg p$ au ca rezolventă clauza vidă $\square$. Şi deci

dacă în C' adăugăm □ obținem arborele colapsat $\mathcal{T}^{***}$. Acestui demers de obținere a arborelui $\mathcal{T}^{***}$ îi corespunde următoarea demonstrație prin rezoluție.

1. p
2. $\neg p \vee q$
3. $\neg p \vee \neg q$
4. $\neg p$; 2,3 Rez
5. □; 1,4 Rez

Această corelație dintre arbori și rezoluție este utilă în demonstrarea completitudinii metodei rezoluției în $\mathcal{L}_P$.

Teorema completitudinii. Fie C o mulțime de clauze. Atunci C este nesatisfiabilă ddacă □ poate fi dedusă din C.

Demonstrarea teoremei presupune demonstrarea următorilor condiționali:

a) Dacă C este nesatisfiabilă, atunci □ poate fi dedusă din C.

b) Conversa lui a).

Demonstrația lui **a)** are la bază următoarea idee: construcția succesivă a unor arbori diadici închiși până la obținerea unui astfel de arbore care constă doar din origine. Aceasta echivalează cu derivarea clauzei vide □.

Presupunem, așadar, că C este nesatisfiabilă. Fie $B = \{P_1, P_2, ...\}$ baza Herbrand a mulțimii C iar $\mathcal{T}$ un arbore diadic complet pentru C. Din asumpția nesatisfiabilității mulțimii C, prin Teorema lui Herbrand, deducem că $\mathcal{T}$ are un arbore diadic închis finit $\mathcal{T}^*$. Deosebim acum următoarele două cazuri:

1. $\mathcal{T}^*$ are un singur punct (i.e. originea). În acest caz **a)** are loc imediat, fiindcă mulțimea C conține □, singura clauză falsificabilă în originea lui $\mathcal{T}^*$.

2. $\mathcal{T}^*$ are mai mult decât un punct. Cum $\mathcal{T}^*$ este finit, rezultă că $\mathcal{T}^*$ conține cel puțin un punct inferențial (căci în caz contrar orice punct ar avea cel puțin un succesor care nu este un f-punct și astfel $\mathcal{T}^*$ ar avea o ramură infinită, contrar asumpției finitudinii arborelui). Fie P_n un punct inferențial al arborelui $\mathcal{T}^*$. Fie P_{n+1} și $\neg P_{n+1}$ f-puncte ale arborelui $\mathcal{T}^*$. Fie M_1, M_2 mulțimile de formule de pe cele două ramuri ale căror puncte finale sunt P_{n+1}, respectiv $\neg P_{n+1}$. Cum cele două puncte finale sunt f-puncte, rezultă că există două exemplificări închise, C_1^*, C_2^* ale clauzelor C_1, respectiv C_2, astfel încât M_1 falsifică C_1^*, iar M_2 falsifică C_2^*. Cum P_n nu este un f-punct, iar M_1 și M_2 falsifică cele două clauze C_1^* și C_2^*, rezultă că C_1^* conține literalul $\neg P_{n+1}$, iar C_2^* conține literalul P_{n+1}. Și astfel putem obține următoarea rezolventă C^* al celor două clauze C_1^* și C_2^*: $C^* = (C_1^* - \neg P_{n+1}) \cup (C_2^* - P_{n+1})$.

Fie $M = M_1 - \{P_{n+1}\} = M_2 - \{\neg P_{n+1}\}$. Întrucât M contrazice ambele clauze, $C_1^* - \neg P_{n+1}$, $C_2^* - P_{n+1}$, rezultă că M contrazice și clauza C^*. De unde, prin lema de mai sus, există o rezolventă C a clauzelor C_1 și C_2, astfel încât C^* este o exemplificare (închisă) a lui C. Fie acum $\mathcal{T}^{**}$ arborele diadic închis pentru mulțimea $C \cup \{C\}$ și care se obține din $\mathcal{T}^*$ prin eliminarea tuturor punctelor succesoare primului punct în care rezolventa C^* este falsificată. Evident, numărul punctelor din $\mathcal{T}^{**}$ este mai mic decât numărul punctelor din $\mathcal{T}^*$. Acest demers teoretic se iterează, obținându-se o altă rezolventă a clauzelor din mulțimea $C \cup \{C\}$ și

pe care o includem în această mulţime. Obţinem astfel un alt arbore diadic închis $\mathcal{T}^{***}$, inclus în $\mathcal{T}^{**}$. Demersul continuă până la obţinerea unui arbore compus doar din origine, caz în care clauza vidă □ a fost derivată.

b) Dacă □ este deductibilă din C, atunci C este nesatisfiabilă. Presupunem că □ este deductibilă din C. Fie $Rezolv_1$,..., $Rezolv_n$ rezolventele din această deducţie. Presupunem că C este satisfiabilă. Există deci un model $M = \langle \Omega, I \rangle$ şi o asignare μ în M astfel încât toate clauzele din C sunt adevărate în M şi asignarea μ în M. Şi astfel, cum clauzele C_1 şi C_2 sunt satisfiabile, rezultă că orice rezolventă a acestor clauze este satisfiabilă (cf. Teorema 1, 2.6.1). Aşadar, $Rezolv_1$,..., $Rezolv_n$ sunt satisfiabile, fapt imposibil, pentru că una din aceste rezolvente este clauza vidă □. Aşadar, C este nesatisfiabilă.

Exerciţii

1. Construiţi o demonstraţie a *Teoremei lui Herbrand* (variantă), utilizând forma ei deja demonstrată.

2. Construiţi o demonstraţie a regulii clauzei 1-literale şi una a regulii divizării pentru cazul în care C este o mulţime finită de clauze închise.

3. Decideţi cu ajutorul metodei Davis-Putnam asupra satisfiabilităţii următoarelor mulţimi de clauze:

$C_1 = \{p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q, \neg p, r, s\}$

$C_2 = \{p \vee \neg q, \neg p \vee q, q \vee \neg r, \neg q \vee \neg r\}$

$C_3 = \{p \vee q, \neg p \vee q\}$

4. Sunt valide următoarele formule ale $\mathcal{L}_p$?

a) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

b) $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

c) $(p \wedge q) \supset [(r \vee p) \wedge \neg q]$

(Decideţi cu ajutorul metodei Davis-Putnam).

5. Verificaţi rezultatele de la exerciţiul 4 cu ajutorul metodei rezoluţiei în $\mathcal{L}_p$.

6.Fie $\sigma = \{x/c, y/a, z/g(x, y)\}$ iar E următoarea expresie: $Q(h(x), z)$. Calculaţi $\sigma(E)$.

7. Fie $\sigma_1 = \{x/f(g(a,h(z))), y/g(h(x),b), z/h(x)\}$ şi $\sigma_2 = \{x/f(g(x,y)), y/g(z,b)\}$. Determinaţi σ_3 astfel încât $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_3$. Ce semnificaţie are acest fapt?

8. Fie $\sigma_1 = \{x/a, y/f(z), z/y\}$ şi $\sigma_2 = \{x/b, y/z, z/g(x)\}$. Calculaţi $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

9. Sunt unificabile următoarele mulţimi de expresii?

a) $E_1 = \{P(x,a), P(b,a)\}$

b) $E_2 = \{R(c, y, y), R(c, x, g(x))\}$

c) $E_3 = \{Q(a, y), Q(a, z), Q(b, y)\}$

Acolo unde este cazul determinaţi cel mai general unificator.

10. Determinaţi dacă următoarele clauze au factori. Argumentaţi răspunsul.

a) $Q(y) \vee P(z) \vee Q(g(y))$

b) $P(x, y) \vee P(b, g(b))$

c) $P(x) \vee P(h(z)) \vee Q(x(z))$

11. Au rezolvenţi următoarele perechi de clauze? Argumentaţi răspunsul.

a) $C_1 = \neg P(x) \vee Q(x,b)$, $C_2 = P(a) \vee Q(a,b)$

b) $C_1 = \neg P(x) \vee Q(y, y)$, $C_2 = \neg Q(b, g(b))$

3.5. Interpolare şi definibilitate în $\mathcal{L}_P$

Lema interpolării (Craig)

Să ne oprim din nou la ideea de interpolare în logica propoziţiilor[37].

Definiţie. O formulă γ se numeşte interpolant pentru implicaţia $\alpha \supset \beta$ dacă toate variabilele propoziţionale din γ apar atât în α cât şi în β iar $\alpha \supset \gamma$ şi $\gamma \supset \beta$ sunt formule valide.

Exemplu. Formula $\neg p \vee (q \wedge r) \supset (\neg p \vee \neg\neg r)$ are ca interpolant formula $\neg p \vee r$.

Lema interpolării în $\mathcal{L}_P$. Dacă $\alpha \supset \beta$ este o formulă validă a $\mathcal{L}_P$, atunci ea are un interpolant.

Demonstraţie. Fie $M = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ o mulţime finită de formule ale $\mathcal{L}_P$. Fie α^* conjuncţia formulelor din *M*. *M* se numeşte *Craig-consistentă* dacă există o partiţie a lui *M* în mulţimile M_1 şi M_2 (i.e. $M = M_1 \cup M_2$ şi $M_1 \cap M_2 = \emptyset$) astfel că $\alpha_1^* \supset \neg\alpha_2^*$ nu are interpolant.

(*Contrapoziţie*). Presupunem că $\alpha \supset \beta$ nu are interpolant. Fie $M = \{\alpha, \neg\beta\}$, fie partiţia $M_1 = \{\alpha\}$, $M_2 = \{\neg\beta\}$. Dacă $\alpha^* \supset \neg(\neg\beta^*)$ ar avea un interpolant γ, atunci γ ar fi, evident, interpolant şi pentru $\alpha \supset \beta$. Şi deci $\alpha^* \supset \neg(\neg\beta^*)$ n-are interpolant. Aşadar, $M = \{\alpha, \neg\beta\}$ este Craig-consistentă. Şi deci nu este demonstrabilă în $\mathcal{L}_P$ $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$, echivalent, nu este demonstrabilă $\neg\alpha \vee \beta$, adică $\alpha \supset \beta$. Prin teorema de completitudine rezultă că $\alpha \supset \beta$ nu este o formulă validă a $\mathcal{L}_P$. (Echivalent, rezultatul poate fi obţinut astfel: din faptul că $M = \{\alpha, \neg\beta\}$ este Craig-consistentă rezultă (prin lema satisfiabilităţii, 2.5.7) că *M* este satisfiabilă şi deci $\alpha \supset \beta$ nu este validă).

Existenţa unui interpolant depinde de limbaj. Dacă limbajul nu conţine, de exemplu, constanta $\perp$ (falsitate), atunci formula validă $(p \supset p) \supset (q \supset q)$ n-are interpolant. Presupunem, în cele ce urmează, că limbajul considerat conţine simbolul $\perp$. Pentru logica predicatelor vom considera sistemul Gentzen LK.

Sistemul Gentzen LK este o extensie a sistemului LK* (de logică propoziţională) aşa cum a fost el expus în 2.5.10, adăugând reguli specifice formulelor cuantificate. Acest sistem va fi considerat în cele ce urmează în vederea demonstrării unor rezultate fundamentale din $\mathcal{L}_P$: *Lema interpolării (Craig), Teorema definibilităţii (Beth) şi Teorema consistenţei (Robinson).*

Sistemul LK este, aşadar, sistemul LK* format din reguli structurale, regula tăieturii şi regulile logice, la care se adaugă regulile specifice cuantificatorilor.

$$\forall_s \quad \frac{\alpha(x/t), \Gamma \to \Delta}{\Gamma, \forall x\alpha \to \Delta} \qquad\qquad \forall_d \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha(x/y)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha}$$

$$\exists_s \quad \frac{\alpha(x/y), \Gamma \to \Delta}{\Gamma, \exists x\alpha \to \Delta} \qquad\qquad \exists_d \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha(x/t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\alpha}$$

În aceste reguli *x* este o variabilă arbitrară, *y* şi *t* sunt termeni liberi pentru *x* în formula α iar *y* nu apare liberă în α. În $\forall_d$ şi $\exists_s$ *y* nu apare liberă în secventul concluziei. În aceste reguli *y* se numeşte variabilă specifică (*Eigenvariable*).

Axiomele sistemului LK sunt orice formulă de forma $\alpha \to \alpha$. Sistemul Gentzen obţinut din sistemul LK prin eliminarea regulii tăieturii este sistemul LK-Taiet.

[37] Comp. şi 2.5.6.

În cele ce urmează prin $\alpha(x/t)$ vom înțelege, așa cum am procedat până acum, substituția variabilei x cu un element t, cu condiția ca t este liber pentru x în formula α. Prin expresia $\alpha(x/t)(y/z)$ vom înțelege formula obținută din $\alpha(x/t)$ prin substituția variabilei nelegate y din această formulă cu variabila z care nu apare în formulă. $(\forall x\alpha)(y/z) = \forall x\alpha(y/z)$ cu condiția: y nu apare legată în $\forall x\alpha$ (și deci $y \neq x$). Apoi, formula $\alpha(y/z)(x/t)(t(y/z))$ este chiar formula $\alpha(x/t)(y/z)$ obținută pe următoarea cale: în formula α inițială se substituie y cu z, în rezultatul astfel obținut se substituie x cu t iar în t se substituie y cu z.

Fie y o variabilă din $\mathcal{L}_P$. Dacă toate ocurențele variabilei y în formula α sunt libere, atunci, prin definiție, y este o variabilă nelegată în α. y este nelegată într-un secvent $\Gamma \to \Delta$ dacă y este nelegată în niciuna din formulele din Γ și Δ. Similar, y este nelegată într-un arbore deductiv $\mathcal{T}$ dacă y nu este legată în nici un secvent care apare în $\mathcal{T}$.

Prin secventul $(\Gamma \to \Delta)(y/z)$ se înțelege secventul obținut din $\Gamma \to \Delta$ prin substituția variabilei y cu variabila z în toate formulele din Γ și Δ. Similar, prin $\mathcal{T}(y/z)$ se înțelege arborele deductiv obținut din $\mathcal{T}$ prin înlocuirea oricărui secvent $\Gamma \to \Delta$ cu $(\Gamma \to \Delta)(y/z)$, unde y este o variabilă nelegată în $\mathcal{T}$ iar z nu apare în $\mathcal{T}$. (La fel pentru $\mathcal{T}(y/t)$, unde y este o variabilă nelegată în $\mathcal{T}$, t este liber pentru y în toate formulele în care se face substituția, iar y și variabilele libere din t sunt distincte de toate variabilele specifice din $\mathcal{T}$). Similar, pentru $\mathcal{T}(y/c)$, unde $c \in \mathcal{L}_P$.

Lema 1. Fie $\mathcal{T}$ o LK-demonstrație pentru secventul $\Gamma \to \Delta$ iar y o variabilă care nu apare legată în $\mathcal{T}$. Fie z o variabilă arbitrară care nu apare în $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}(y/z)$ este un arbore demonstrativ. Similar $\mathcal{T}(c/z)$ este un arbore demonstrativ, unde $c \in \mathcal{L}_P$ este o constantă care apare în $\mathcal{T}$.

Demonstrație (inducție pe arbori demonstrativi). Considerăm doar câteva cazuri.

$\mathcal{T}$ este un secvent $\Gamma \to \Delta$ axiomă. Evident, în acord cu ideea substituției, $\Gamma \to \Delta\ (y/z)$ este o axiomă.

Cazurile regulilor structurale și a celor logice din $\mathcal{L}_p$ sunt rezultate imediate.

Fie $\forall_s$ $\dfrac{\alpha(x/t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\alpha, \Gamma \to \Delta}$ t este liber pentru x în α.

Arborele demonstrativ $\mathcal{T}(y/z)$ arată astfel:

$$\cfrac{\cfrac{\mathcal{T}^*}{\alpha(x/t), \Gamma \to \Delta}}{\forall x\alpha, \Gamma \to \Delta}$$

Prin ipoteza inducției, $\mathcal{T}^*(y/z)$ este un arbore demonstrativ al secventului $\alpha(x/t)(y/z)$, $\Gamma(y/z) \to \Delta(y/z)$. Fiindcă y nu apare legată în $\mathcal{T}$ (prin asumpția lemei), rezultă că $y \neq x$ și deci $(\forall x\alpha)(y/z) = \forall x\alpha(y/z)$. Însă $\alpha(x/t)(y/z) = \alpha(y/z)(x/t)(t(y/z))$. Variabila z nu apare liberă în $\mathcal{T}$ (prin asumpția lemei). Și astfel termenul $t(y/z)$ este liber pentru x în $\alpha(y/z)$. Și astfel arborele $\mathcal{T}(y/z)$ este următorul arbore demonstrativ

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}^*(y/z)}{\alpha(y/z)(x/t)(t(y/z)),\ \Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z)}}{\forall x\alpha(y/z),\Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z)}$$

Fie acum $\forall_d$ $\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\alpha(x/w)}{\Gamma\rightarrow\Delta,\forall x\alpha}$ w nu este liberă în $\Gamma\rightarrow\Delta,\forall x\alpha$.

Arborele demonstrativ $\mathcal{T}(y/z)$ este următorul:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}^*}{\Gamma\rightarrow\Delta,\alpha(x/w)}}{\Gamma\rightarrow\Delta,\forall x\alpha}$$

Vom avea două cazuri:

a) $y=w$ şi w nu apare liberă în Γ, Δ, $\forall x\alpha$. Prin ipoteza inducţiei $\mathcal{T}^*(y/z)$ este un arbore demonstrativ pentru $(\Gamma\rightarrow\Delta,\alpha(x/y))(y/z)$, adică pentru $\Gamma\rightarrow\Delta,\alpha(x/z)$. Însă variabila z nu apare în $\Gamma\rightarrow\Delta,\forall x\alpha$ (pentru că nu apare în $\mathcal{T}$) şi astfel regula $\forall_d$ se aplică iar $\mathcal{T}(y/z)$ este un arbore demonstrativ.

b) $y\neq w$. Prin ipoteza inducţiei $\mathcal{T}^*(y/z)$ este un arbore demonstrativ pentru $\Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z),\alpha(x/w)(y/z)$. Însă $\alpha(x/w)(y/z)=\alpha(y/z)(x/w)$. Iar fiindcă $y\neq w$ vom avea $\alpha(x/w)(y/z)=\alpha(y/z)(x/w)$. Aşadar, fiindcă z nu apare în $\mathcal{T}$, $z\neq w$ şi astfel w nu apare liberă în $\Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z),\forall x\alpha(y/z)$. Şi deci $\forall_d$ se aplică iar $\mathcal{T}(y/z)$ este arborele demonstrativ

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}^*(y/z)}{\Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z),\alpha(y/z)(x/w)}}{\Gamma(y/z)\rightarrow\Delta(y/z),\forall x\alpha(y/z)}$$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj în care singurii termeni sunt variabilele şi constantele, care conţine simbolul $\perp$[38] şi care nu conţine $=$ şi $\equiv$.

Lema 2. Fie (Γ_1,Γ_2) *o partiţie a mulţimii* Γ *iar* (Δ_1,Δ_2) *o partiţie a mulţimii* Δ. *Fie următorii secvenţi* $\Gamma_1\rightarrow\Delta_1$, $\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$. *Există atunci o formulă* γ *a sistemului* $LK^{\perp}$, *numită interpolant al secventului* $\Gamma\rightarrow\Delta$ *astfel încât toate simbolurile predicative, constantele şi variabilele libere din* γ *apar atât în* $\Gamma_1\cup\Delta_1$ *cât şi în* $\Gamma_2\cup\Delta_2$ *şi* $\Gamma_1\rightarrow\Delta_1,\gamma$ *şi* $\gamma,\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$ *sunt secvenţi* $LK^{\perp}$*-demonstrabili.*

Demonstraţie (inducţie pe arbori dem. fără regula tăieturii)

Vom considera câteva cazuri:

1. $\Gamma\rightarrow\Delta$ este o axiomă, adică o expresie de forma $\alpha\rightarrow\alpha$. Sunt posibile următoarele 4 cazuri, cu interpolanţii corespunzători:

a) $\Gamma_1\rightarrow\Delta_1$, $\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$ sunt $\alpha\rightarrow\alpha$, $\varnothing\rightarrow\varnothing$; $\gamma=\perp$

b) $\Gamma_1\rightarrow\Delta_1$, $\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$ sunt $\varnothing\rightarrow\varnothing$, $\alpha\rightarrow\alpha$; $\gamma=\neg\perp$

---

[38] În continuare, prin $LK^{\perp}$ vom înţelege o extensie a sistemului LK în care $\perp\rightarrow$ este axiomă.

c) $\Gamma_1 \to \Delta_1$, $\Gamma_2 \to \Delta_2$ sunt $\alpha \to \emptyset, \emptyset \to \alpha$; $\gamma = \alpha$

d) $\Gamma_1 \to \Delta_1$, $\Gamma_2 \to \Delta_2$ sunt $\emptyset \to \alpha$, $\alpha \to \emptyset$; $\gamma = \neg\alpha$

2. Inferența considerată este $\wedge_d$:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

Fie următorii secvenți: a) $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha \wedge \beta \quad \Gamma_2 \to \Delta_2$ și b) $\Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_2, \alpha \wedge \beta$. Vom considera doar cazul a), (b) fiind similar). Din secvenții respectivi construim următoarele perechi: 1. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha \quad \Gamma_2 \to \Delta_2$ și 2. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \beta \quad \Gamma_2 \to \Delta_2$. Prin ipoteza inducției, există formulele γ_1 și γ_2 astfel încât următorii secvenți sunt demonstrabili: 3. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha, \gamma_1$, 4. $\gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_2$, 5. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \beta, \gamma_2$ și 6. $\gamma_2, \Gamma_2 \to \Delta_2$. Din 3 și 5 deducem că sunt demonstrabili și secvenții. 7. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha, \gamma_1 \vee \gamma_2$ (prin $\vee_d$) și 8. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \beta, \gamma_1 \vee \gamma_2$ (prin $\vee_d$). Iar prin $\wedge_d$ este demonstrabil, pe baza 7 și 8, și secventul 9. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha \wedge \beta, \gamma_1 \vee \gamma_2$.Din 4 și 6, prin $\vee_s$, deducem că este demonstrabil și secventul 10. $\gamma_1 \vee \gamma_2, \Gamma_2 \to \Delta_2$. Iar din 9 și 10 deducem că $\gamma_1 \vee \gamma_2$ este interpolantul căutat.

3. Inferența considerată este $\forall_d$:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha(x/y)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha}$$, y nu apare liberă în concluzie.

Fie următorii secvenți: a) $\Gamma_1 \to \Delta_1, \forall x\alpha \quad \Gamma_2 \to \Delta_2$ și b) $\Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_2, \forall x\alpha$. Ca mai sus, vom considera doar a). Prin ipoteza inducției există o formulă interpolant γ astfel încât

1. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha(x/y), \gamma$ și 2. $\gamma, \Gamma_2 \to \Delta_2$ sunt demonstrabili. γ nu conține variabila y, căci dacă ar conține-o, atunci, în acord cu enunțul lemei, y ar fi conținută și în $\Gamma_1 \cup \Delta_1$ și deci ar fi și variabilă a secventului $\Gamma \to \Delta$, ceea ce ar contrazice restricția din $\forall_d$. Însă, din faptul că 1 este demonstrabil rezultă, prin $\forall_d$, că și 3. $\Gamma_1 \to \Delta_1, \forall x\alpha, \gamma$ este demonstrabil. Din 2 și 3 deducem că γ este un interpolant.

4. Inferența considerată este $\forall_s$:

$$\frac{\alpha(x/t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\alpha, \Gamma \to \Delta}$$, t este liber pentru x în α.

Fie următorii secvenți: a) $\forall x\alpha, \Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_2$ și b) $\Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \forall x\alpha\, \Gamma_2 \to \Delta_2$. Luăm doar cazul a). Prin ipoteza inducției există o formulă γ astfel că 1. $\alpha(x/t), \Gamma_1 \to \Delta_1, \gamma$ și

2. $\gamma, \Gamma_2 \to \Delta_2$ sunt secvenți demonstrabili. Din 1 deducem, prin $\forall_s$, că 3. $\forall x\alpha, \Gamma_1 \to \Delta_1, \gamma$ este demonstrabil. Acum, vom considera separat cele două cazuri, după cum t este sau nu o variabilă.

$t = z$. Presupunem că z nu apare în secventul concluzie. Atunci, prin $\forall_d$, deducem, din 3, că $\forall x\alpha, \Gamma_1 \to \Delta_1, \forall z\gamma$ este demonstrabil. Similar, prin $\forall_s$, din 2 deducem că $\forall z\gamma, \Gamma_2 \to \Delta_2$ este demonstrabil. Întrucât formula γ conține toate simbolurile (pentru predicate, constante și variabile) care apar în $\{\alpha(x/z), \Gamma_1\} \cup \Delta_1$ și $\Gamma_2 \cup \Delta_2$ iar z nu apare liberă

în secventul din concluzie, formula $\forall z\gamma$ va conține toate aceste simboluri. Dacă z apare liberă în $\{\alpha(x/z),\Gamma_1\}\cup\Delta_1$, atunci γ este un interpolant, fiindcă dacă γ conține z, atunci, prin ipoteza inducției, z apare atât în $\{\alpha(x/z),\Gamma_1\}\cup\Delta_1$, cât și în $\Gamma_2\cup\Delta_2$.

t nu este o variabilă. În acest caz fie $x_1,...,x_n$ și $c_1,...,c_m$ variabilele și constantele din *t* care apar în γ și nu apar în $\{\forall x\alpha,\Gamma_1\}\cup\Delta_1$. În demonstrația secventului $\alpha(x/t),\Gamma_1\rightarrow\Delta_1,\gamma$, înlocuim toate ocurențele simbolurilor $x_1,...,x_n$ și $c_1,...,c_m$ din *t* și γ cu variabile noi, care nu apar în demonstrație, $z_1,...,z_{n+m}$. Fie t^* termenul nou astfel obținut, fie γ^* formula nouă obținută prin substituția indicată. Rezultă că și secventul $\alpha(x/t^*),\Gamma_1\rightarrow\Delta_1,\gamma^*$ este demonstrabil. Însă variabilele $z_1,...,z_{n+m}$ nu apar libere în $\forall x\alpha,\Gamma_1\rightarrow\Delta_1,\forall z_1...\forall z_{n+m}\gamma^*$ și astfel, prin $\forall_d$ și $\forall_s$, este demonstrabil secventul $\forall x\alpha,\Gamma_1\rightarrow\Delta_1,\forall z_1...\forall z_{n+m}\gamma^*$. Cum, prin $\forall_s$, este demonstrabil și secventul $\forall z_1...\forall z_{n+m}\gamma^*,\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$, rezultă că formula $\forall z_1...\forall z_{n+m}\gamma^*$ este un interpolant.

Lema interpolării (Craig). Fie $\mathcal{L}$ limbajul specificat în raport cu Lema 2. Fie $\alpha,\beta\in\mathcal{L}$ astfel că $\alpha\supset\beta$ este LK*-demonstrabilă.*

1. Dacă α și β au simboluri predicative comune, atunci există o formulă γ, interpolant al implicației $\alpha\supset\beta$, astfel încât toate simbolurile predicative, constantele și variabilele libere din γ apar în ambele formule, α și β, iar implicațiile $\alpha\supset\gamma$ și $\gamma\supset\beta$ sunt LK*-demonstrabile.*

2. Dacă α și β n-au nici un simbol predicativ în comun, atunci fie $\alpha\rightarrow$ este LK*-demonstrabil, fie $\rightarrow\beta$ este* LK*-demonstrabil.*

Demonstrație. Pe baza regulii tăieturii conchidem că $\rightarrow\alpha\supset\beta$ este LK-demonstrabil ddacă $\alpha\rightarrow\beta$ este LK-demonstrabil. Considerăm următorii secvenți: $\Gamma_1\rightarrow\Delta_1$ și $\Gamma_2\rightarrow\Delta_2$ în care $\Gamma_1=\alpha$, $\Delta_1=\emptyset$, $\Gamma_2=\emptyset$, $\Delta_2=\beta$. Prin *Lema 2* există o formulă γ a $LK^{\perp}$ astfel că $\alpha\rightarrow\gamma$ și $\gamma\rightarrow\beta$ sunt $LK^{\perp}$-demonstrabili și toate simbolurile predicative, constantele și variabilele libere din γ apar în α și β. Dacă P^n este un simbol predicativ *n*-adic comun celor două formule α și β, atunci fie P^* enunțul: $\forall y_1...\forall y_n(P(y_1,...,y_n)\wedge\neg P(y_1,...,y_n))$, cu $y_1,...,y_n$ variabile noi. Fie γ^* formula obținută din γ prin înlocuirea echivalentă a tuturor ocurențelor simbolului $\perp$ din γ cu P^*. Pe baza echivalenței lor putem obține în LK demonstrații ale secvenților $\alpha\rightarrow\gamma^*$ și $\gamma^*\rightarrow\beta$. Și deci secvenții $\rightarrow\alpha\supset\gamma^*$ și $\rightarrow\gamma^*\supset\beta$ sunt LK-demonstrabili, iar formula γ^* este interpolantul căutat.

Dacă cele două formule, α și β, n-au nici un simbol predicativ în comun, atunci formula γ din *Lema 2* conține doar $\perp$ ca o formulă elementară. Prin inducție pe structura formulei γ se poate arăta că fie $\rightarrow\gamma$ este $LK^{\perp}$-demonstrabil, fie $\gamma\rightarrow$ este $LK^{\perp}$-demonstrabil. Și deci, prin regula tăieturii, se poate arăta că fie $\alpha\rightarrow$ este $LK^{\perp}$-demonstrabil, fie $\rightarrow\beta$ este $LK^{\perp}$-demonstrabil. Însă nici α, nici β nu conțin $\perp$, iar teorema eliminării tăieturii are loc pentru $LK^{\perp}$. Și deci o demonstrație în $LK^{\perp}$ fără regula tăieturii pentru $\alpha\rightarrow$ sau $\rightarrow\beta$ este de fapt o demonstrație în LK.

Teorema definibilității (Beth)

Lema interpolării permite demonstrarea unui rezultat fundamental în $\mathcal{L}_P$, teorema lui Beth cu privire la definibilitate, teoremă care redă un mod al corelației dintre sintaxă și semantică.

Definibilitate explicită, definibilitate implicită

Fie $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ formule închise ale $\mathcal{L}_P$, care conțin strict simbolurile predicative $P_1,\ldots,P_m,Q$. $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ pot fi considerate axiomele unei teorii $\mathcal{T}$ de ordinul întâi. Fie, așadar, $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ conjuncția formulelor $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, i.e. $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k$.

Definiția 1. Presupunem că există o formulă $\beta(P_1,\ldots,P_m)$ a $\mathcal{L}_P$, în care argumentele simbolurilor predicative $P_1,\ldots,P_m$ sunt variabile din mulțimea $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Q este definit explicit din $P_1,\ldots,P_m$ în teoria bazată pe $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ (echivalent, $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ definește Q explicit) dacă următorul secvent este demonstrabil:

$$\rightarrow \mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)\supset \forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))$$

Echivalent, secventul $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)\rightarrow\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))$ este demonstrabil și deci valid (prin teorema de corectitudine), echivalent există un tablou închis pentru mulțimea $\{\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q),\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))\}$, echivalent, dacă S este orice axiomatizare a $\mathcal{L}_P$ iar lui S îi adăugăm axiomele $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, atunci formula $\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))$ este demonstrabilă.

Formula $\beta(P_1,\ldots,P_m)$ se numește *definiție explicită* a lui $Q(x_1,\ldots,x_n)$ din $P_1,\ldots,P_m$ în teoria $\mathcal{T}$.

Definiția 2. Fie $P_1,\ldots,P_m,Q,Q^*$ simboluri predicative distincte. Fie $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q^*)$ teoria obținută din $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ prin substituția lui Q cu Q^*. Q este definit implicit din $P_1,\ldots,P_m$ în teoria bazată pe $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ (echivalent, $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ definește Q implicit) dacă este demonstrabilă (și deci validă) următoarea formulă:

$$(\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)\wedge\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q^*))\supset\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv Q^*(x_1,\ldots,x_n))$$

Cele două concepte, *definibilitate explicită* și *definibilitate implicită*, se implică reciproc. Să vedem mai întâi cum definibilitatea explicită o implică pe cea implicită. Ceea ce trebuie arătat este următorul fapt: dacă formula $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)\supset\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))$ este validă, atunci $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ definește Q implicit, adică condiționalul din Def 2 este o formulă validă. Presupunem că antecedentul acestui condițional, $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)\wedge\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q^*)$, este o formulă validă (i.e. adevărată în orice model). Ceea ce înseamnă că $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$ și $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q^*)$ sunt formule valide. Din aceste formule valide și din formula din Def. 1 (asumată ca validă) conchidem asupra validității următoarelor formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m))$$

$$\forall x_1\ldots\forall x_n(Q^*(x_1,\ldots,x_n)\equiv\beta(P_1,\ldots,P_m)),$$

formule din care obținem următoarea formulă validă

$$\forall x_1\ldots\forall x_n(Q(x_1,\ldots,x_n)\equiv Q^*(x_1,\ldots,x_n)).$$

Implicația conversă, cea dintre definibilitatea implicită și cea explicită, face obiectul teoremei lui Beth.

Teorema definibilității (Beth). Dacă Q este definit implicit din $P_1,\ldots,P_m$ în teoria $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_m,Q)$, atunci

1. *Dacă vreunul din simbolurile predicative* $P_i(1 \le i \le m)$ *apare în* $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$, *atunci există o formulă* $\beta(P_1,...,P_m)$ *care defineşte* Q *explicit din* $P_1,...,P_m$.
2. *Dacă nici unul din simbolurile predicative* $P_1,...,P_m$ *nu apare în* $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$, *atunci este validă strict una din următoarele formule*

$$\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset \forall x_1...\forall x_n Q(x_1,...,x_n)$$

$$\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset \forall x_1...\forall x_n \neg Q(x_1,...,x_n)$$

Demonstraţie.

Presupunem că Q este definit implicit în $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$, adică $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \wedge \mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*) \supset \forall x_1...\forall x_n(Q(x_1,...,x_n) \equiv Q^*(x_1,...,x_n))$ este o formulă validă. Însă $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$ şi $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*)$ sunt formule închise (fiindcă reprezintă conjuncţia unor formule închise) şi astfel este validă şi formula

a) $(\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \wedge \mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*)) \supset (Q(x_1,...,x_n) \equiv Q^*(x_1,...,x_n))$ din care conchidem asupra validităţii formulei

b) $(\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \wedge Q(x_1,...,x_n)) \supset (\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*) \supset Q^*(x_1,...,x_n))$ deoarece a) are forma $(\alpha \wedge \beta) \supset (\gamma \equiv \delta)$, din a cărei validitate putem conchide asupra formulei $(\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \supset \delta)$.

1. Dacă în $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$ apar simboluri predicative din lista $P_1,...,P_m$, iar b) este o formulă validă, atunci, în acord cu *Lema lui Craig* există o formulă γ ale cărei simboluri predicative, constante şi variabile libere apar atât în antecedentul cât şi în consecventul formulei implicative din b), astfel încât următoarele formule sunt valide:

c) $(\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \wedge Q(x_1,...,x_n)) \supset \gamma$

d) $\gamma \supset (\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*) \supset Q^*(x_1,...,x_n))$

Însă Q^* nu apare în antecedentul implicaţiei din c), aşa cum Q nu apare în consecventul implicaţiei principale din d). Dacă în d) îl substituim pe Q^* cu Q, atunci obţinem formula validă

e) $\gamma \supset (\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset Q(x_1,...,x_n))$,

din care obţinem o altă formulă validă, implicată de aceasta, respectiv

f) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset (\gamma \supset Q(x_1,...,x_n))$

Iar din c) obţinem formula validă

g) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset (Q(x_1,...,x_n) \supset \gamma)$

Din f) şi g) obţinem, în fine, formula validă

h) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset (\gamma \equiv Q(x_1,...,x_n))$, adică rezultatul următor: formula γ defineşte Q explicit din $P_1,...,P_m$.

2. Dacă nici unul din simbolurile predicative $P_1,...,P_m$ nu apare în $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q)$, atunci, prin *Lema lui Craig* (2), strict una din următoarele două formule este validă:

a) $\neg(\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \wedge Q(x_1,...,x_n))$

b) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q^*) \supset Q^*(x_1,...,x_n)$

Şi deci, validitatea uneia din formulele

c) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset \neg Q(x_1,...,x_n)$

d) $\mathcal{T}(P_1,...,P_m,Q) \supset Q(x_1,...,x_n)$

pe baza cărora obţinem rezultatul 2 al teoremei definibilităţii.

Teorema consistenței (Robinson)

Definiția 1. Fie $\mathcal{L}_P$ și $\mathcal{L}_P^*$ două limbaje ale logicii predicatelor (de ordinul întâi). Dacă mulțimile simbolurilor predicative, simbolurilor funcționale și simbolurilor pentru constante ale limbajului $\mathcal{L}_P$ sunt submulțimi ale mulțimilor corespunzătoare ale limbajului $\mathcal{L}_P^*$, atunci $\mathcal{L}_P^*$ este o extensie a $\mathcal{L}_P$.

Definiția 2. Fie M o mulțime de formule închise ale $\mathcal{L}_P$. M este o mulțime completă dacă pentru orice formulă închisă γ: fie $\vdash M \to \gamma$, fie $\vdash M \to \neg\gamma$ dar nu amândouă.

Remarcă. Dacă M este o mulțime de formule închise, atunci următoarea echivalență are loc: Mulțimea $\{\gamma: \vdash M \to \gamma\}$ este maximal-consistentă *echival* M este completă. (Argumentați).

Teorema consistenței (Robinson). Fie $\mathcal{L}_P$ un limbaj al logicii predicatelor, fie $\mathcal{L}_P^1$ și $\mathcal{L}_P^2$ două extensii ale $\mathcal{L}_P$, astfel că $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_P^1 \cap \mathcal{L}_P^2$. Fie M_1 o mulțime de formule închise ale $\mathcal{L}_P^1$, fie M_2 o mulțime de formule închise ale $\mathcal{L}_P^2$, fie $M = M_1 \cap M_2$. Dacă M_1 și M_2 sunt mulțimi consistente iar M este completă, atunci $M_1 \cup M_2$ este o mulțime consistentă.

Remarcă. Condiția „*M* este completă" este *necesară*, căci dacă *M* ar fi incompletă (i.e. dacă ar exista o formulă închisă, γ, a $\mathcal{L}_P$, astfel încât nici γ, nici $\neg\gamma$ nu sunt *M*-demonstrabile, atunci M_1 ar putea conține γ, iar M_2 ar putea conține $\neg\gamma$ și astfel reuniunea lor, $M_1 \cup M_2$ ar fi inconsistentă.

Demonstrație (reductio). Presupunem că $M_1 \cup M_2$ este inconsistentă. Rezultă că secventul $M_1 \cup M_2 \to$ este valid. Prin teorema de completitudine (a sistemelor Gentzen) rezultă că există un subsecvent *finit* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \to$ al secventului $M_1 \cup M_2 \to$ și care este demonstrabil (unde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in M_1, \beta_1,\ldots,\beta_m \in M_2$). În acord cu sensul intuitiv al secventului, este demonstrabilă formula implicativă $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$, echivalent, este demonstrabilă formula $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \vee \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$, adică $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$. Presupunem că $\mathcal{L}_P$ nu conține simboluri funcționale. Aplicăm acum *Lema lui Craig* formulei demonstrabile de mai sus. Considerăm, succesiv, cele două cazuri posibile.

1. Considerăm că antecedentul, $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, și consecventul $\neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$, implicației demonstrabile de mai sus au simboluri predicatve comune. În acord cu *Lema lui Craig*, există o formulă γ, astfel încât ambele formule de mai jos sunt demonstrabile

1. $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \gamma$
2. $\gamma \supset \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$

iar simbolurile predicative, constantele și variabilele libere din γ se regăsesc atât în antecedentul cât și în consecventul implicației demonstrabile $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$. Însă formulele acestei implicații sunt, toate, formule închise. Și deci γ este o formulă închisă. $\gamma \in \mathcal{L}_P$, deoarece $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_P^1 \cup \mathcal{L}_P^2$. Cum mulțimea *M* este completă, fie γ este *M*-demonstrabilă, fie $\neg\gamma$ este *M*-demonstrabilă. Dacă γ este *M*-demonstrabilă, împreună cu formula 2, rezultă că $\neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$ este *M*-demonstrabilă, rezultat care contrazice consistența asumată a mulțimii M_2. Iar dacă $\neg\gamma$ este *M*-demonstrabilă, atunci laolaltă cu formula 1, rezultă că $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ este *M*-demonstrabilă, ceea ce contrazice consistența asumată a mulțimii M_1.

2. Dacă $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ şi $\neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$ nu au nici un simbol predicativ în comun, atunci, în acord cu *Lema lui Craig*, este demonstrabilă fie formula $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, fie formula $\neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$. În primul caz este contrazisă consistenţa asumată a mulţimii M_1, în al doilea, este contrazisă consistenţa mulţimii M_2.

Capitolul 4

Logica modală propozițională ($\mathcal{L}_p{}^{\Box}$)

4.1. Sintaxa $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$

4.1.1. Limbajul logicii modale propoziționale ($\mathcal{L}_p{}^{\Box}$) [1].

a) Simboluri primitive: p, q, r, ..., p_1, p_2, ... (simboluri lingvistice pentru variabile propoziționale); $\neg, \circ, \Box$ (simboluri logice pentru operatori)[2];), (,], [, }, { (simboluri auxiliare (i.e. paranteze)).

b) Reguli de formare a formulelor limbajului $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$:

1. Orice variabilă propozițională este o formulă (elementară) a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$.
2. Dacă α este o formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$, atunci $\neg\alpha$ este o formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$.
3. Dacă α și β sunt formule ale $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$, atunci $\alpha \circ \beta$ este o formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$.
4. Dacă α este o formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$, atunci $\Box\alpha$ este o formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$.

c) Definiție. Def $\Diamond$. $\Diamond\alpha =_{Df} \neg\Box\neg\alpha$.

Limbajul logicii modale propoziționale este bazat pe limbajul logicii nemodale a propozițiilor și va rămâne neschimbat pentru toate sistemele modale de logică propozițională. Sistemele modale vor fi specificate așadar doar prin axiomele considerate și prin regulile de deducție.

Vom prezenta în continuare câteva sisteme de logică modală propozițională, la care ne vom referi constant de-a lungul capitolelor 4 și 5.

4.1.2. Sisteme de logică modală propozițională

Sistemul modal $\mathcal{K}$ [3]

Axiomele sistemului $\mathcal{K}$:

$\mathbf{L}_p$ [4]: Dacă α este o formulă *validă* (tautologie) a $\mathcal{L}_p$, atunci α este o axiomă a sistemului $\mathcal{K}$.

---

[1] În cele ce urmează structura simbolică „$\mathcal{L}_p{}^{\Box}$" semnifică atât limbajul logicii modale propoziționale așa cum este el expus în 4.1.1 cât și toate construcțiile cu care operăm utilizând acest limbaj, adică logica modală propozițională.

[2] Simbolul „$\circ$" denotă oricare din operatorii binari: $\wedge, \vee, \supset, \equiv, +, \not\subset, \subset, /, \downarrow, \not\supset$. În calcule, el va fi explicitat cel mai adesea prin $\supset$.

[3] Numele de „$\mathcal{K}$" a fost dat în onoarea contribuțiilor remarcabile în studiul logicii modale ale lui S. Kripke (cf. E.J. Lemmon și D.S. Scott, *The „Lemmon Notes": An Introduction to Modal Logic*, (ed.) K. Segerberg, Oxford, Basil Blackwell, 1977).

[4] $\mathbf{L}_p$ este o *schemă* de axiomă. Deosebirea este următoarea: axioma este o formulă a calculului ca atare, în timp ce *schema* de axiomă este un enunț care spune că orice formulă care satisface anumite condiții este o axiomă. Schema $\mathbf{L}_p$ menționează drept condiție conceptul *validității* formulei, propriu $\mathcal{L}_p$.

$\mathbf{K}: \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

Reguli de deducție:

Subst $\dfrac{\alpha(p_1,\ldots,p_k)}{\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)}$ **MP** $\dfrac{\alpha, \quad \alpha \supset \beta}{\beta}$

N $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

Remarcă. Axioma sistemului $\mathcal{K}$ exprimă ideea distribuirii operatorului modal $\Box$ în raport cu $\supset$. Cele două reguli, **Subst** și **MP** nu sunt specifice calculelor modale, ele sunt regulile corespunzătoare din $\mathcal{L}_p$. Regula necesității, în schimb, este specifică $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$ și asertează deducerea necesității unei formule din simpla asertare a formulei respective în premisă.

Conceptele „demonstrație" și „deducție" sunt cele din 2.3.1.

În afara regulilor de mai sus, în demonstrații vom utiliza și reguli *derivate* de deducție. Se numesc „derivate" deoarece folosirea lor în demonstrații nu este obligatorie (dar fără a căror utilizare demonstrațiile ar fi uneori greoaie) și pentru că ele însele pot fi demonstrate. Să ilustrăm acest lucru. Fie, așadar, regula derivată $\mathbf{R}_1$, de mai jos:

$\mathbf{R}_1$ $\dfrac{\alpha \supset \beta, \quad \beta \supset \alpha}{\alpha \equiv \beta}$

Demonstrația următoare ne arată că demonstrarea echivalenței $\alpha \equiv \beta$, sub asumpția demonstrării celor două implicații, se poate face fără utilizarea $\mathbf{R}_1$. Mai mult, această demonstrație figurează și ca demonstrație a regulii înseși.

1. $\alpha \supset \beta$; as
2. $\beta \supset \alpha$; as
3. $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$; $\mathbf{L_p}$
4. $(\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \alpha) \supset (\alpha \equiv \beta)]$; 3 p/α, q/β
5. $(\beta \supset \alpha) \supset (\alpha \equiv \beta)$; 1,4 **MP**
6. $\alpha \equiv \beta$; 2,5 **MP**

Lectura acestei dezvoltări simbolice este cea exersată în 2.3. Indicațiile de după punctuația „ ; " ne arată de fiecare dată modul de obținere a formulei respective. Mențiunea „$\mathbf{L_p}$", la sfârșitul formulei 3, de exemplu, ne arată că e vorba despre o formulă validă a $\mathcal{L}_p$ și care poate fi axiomă a sistemului $\mathcal{K}$, sau despre o formulă derivabilă în $\mathcal{L}_p$ [5]. Formula din pasul 4 se poate obține din formula din pasul 3 prin substituțiile menționate în dreptul acestei formule. Indicațiile următoare, din pașii 5 și 6, ne arată pașii din care ele au fost obținute și regula corespunzătoare, aici *modus ponens*.

Remarcă. Rezultatul de mai sus, cu privire la $\mathbf{R}_1$, ne arată că o regulă derivată a sistemului $\mathcal{K}$ se poate obține din orice formulă validă a $\mathcal{L}_p$ în care operatorul principal este $\supset$. De exemplu, din $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$ (legea silogismului / atenuarea implicației) putem obține

[5] Pentru o prezentare sistematică a principalelor formule valide ale $\mathcal{L}_p$: comp. 2.1.2.3 și V. Drăghici, *Logica matematică*, Editura „Casa Cărții de Știință", Cluj-Napoca, 2002, Cap. 1.

R$_2$ $\dfrac{\alpha \supset \beta,\quad \beta \supset \gamma}{\alpha \supset \gamma}$

1. $\alpha \supset \beta$; as
2. $\beta \supset \gamma$; as
3. $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$; **L$_p$**
4. $(\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)]$; 3 p/α, q/β, r/γ
5. $(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)$; 1,4 **MP**
6. $\alpha \supset \gamma$; 2,5 **MP**

R$_3$ $\dfrac{\alpha \supset \beta}{\Box\alpha \supset \Box\beta}$ **R$_4$** $\dfrac{\alpha \equiv \beta}{\Box\alpha \equiv \Box\beta}$

1. $\alpha \supset \beta$; as (Exerciţiu)
2. $\Box(\alpha \supset \beta)$; 1 **N**
3. $\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta)$; **K** p/α, q/β
4. $\Box\alpha \supset \Box\beta$; 2,3 MP

Inloc (*regula înlocuirii*). Este un corolar al teoremei înlocuirii (echivalenţilor) (comp. 2.1.5).

Inloc $\dfrac{\beta \equiv \gamma,\ \alpha_\beta}{\alpha_\gamma}$;

unde α_β este o formulă a cărei subformulă este β iar α_γ se obţine din α_β prin înlocuirea a zero sau mai multe ocurenţe ale subformulei β cu formula echivalentă γ.

Pe baza definiţiei operatorului posibilitate (Def. $\Diamond$), în $\mathcal{K}$ putem demonstra următoarea echivalenţă $\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$, în următorul fel:

K$_1$[6] 1. $p \equiv \neg\neg p$; **L$_p$**

2. $\Box p \equiv \neg\neg\Box p$; 1 $p/\Box p$
3. $\Box p \equiv \neg\neg\Box\neg\neg p$; 1,2 **Inloc**
4. $\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$; 3 Def. $\Diamond$.

Această teoremă ne dă posibilitatea să schimbăm reciproc locul operatorilor $\Box$ şi $\Diamond$ cu condiţia că, de fiecare dată, punem o negaţie înaintea operatorului şi alta după operator. Însă acest lucru este valabil nu numai pentru un operator modal, ci şi pentru un şir compact de operatori modali (i.e. operatori alăturaţi), cu condiţia că le schimbăm reciproc locul în toate ocurenţele lor.

Exemple: $\Box\Diamond\Diamond\Box\Box$ poate fi schimbat cu $\neg\Diamond\Box\Box\Diamond\Diamond\neg$

$\neg\Diamond\Box\Box$ poate fi schimbat cu $\Box\Diamond\Diamond\neg$

$\Box\Box\Diamond\neg$ poate fi schimbat cu $\neg\Diamond\Diamond\Box$ etc.

O astfel de operaţie face conţinutul *regulii interschimbării operatorilor modali* (*Intersch*).

Intersch. *Într-o teoremă, în orice şir compact de operatori, construit din $\Box$ şi $\Diamond$, operatorii $\Box$ şi $\Diamond$ îşi pot schimba reciproc locul în toate ocurenţele lor, cu condiţia introducerii unei negaţii atât înaintea şirului cât şi după el.*

[6] Teoremele sistemului $\mathcal{K}$ vor fi numerotate / indicate corespunzător: **K$_1$**, **K$_2$** etc.

Regula *Intersch* se poate aplica şi oricărui subşir compact al şirului iniţial, restul şirului rămânând neschimbat. Exemplu:

$\Box\Diamond\Box\Box\Diamond\Box$ se poate înlocui cu $\neg\Diamond\Box\Diamond\neg\Box\Diamond\Box$

R₅ $$\frac{\alpha\supset\beta}{\Diamond\alpha\supset\Diamond\beta}$$

1. $\alpha\supset\beta$; as
2. $(p\supset q)\supset(\neg q\supset\neg p)$; $\mathbf{L_p}$
3. $(\alpha\supset\beta)\supset(\neg\beta\supset\neg\alpha)$; 2 p/α, q/β
4. $\neg\beta\supset\neg\alpha$; 1,3 **MP**
5. $\Box\neg\beta\supset\Box\neg\alpha$; 4 $\mathbf{R_3}$
6. $\neg\Box\neg\alpha\supset\neg\Box\neg\beta$; 5 $\mathbf{L_p}$ (contrapoz.)
7. $\Diamond\alpha\supset\Diamond\beta$; **Intersch**.

$\mathbf{K_2}$ $\Box(p\wedge q)\supset(\Box p\wedge\Box q)$
1. $(p\wedge q)\supset p$; $\mathbf{L_p}$
2. $(p\wedge q)\supset q$; $\mathbf{L_p}$
3. $\Box(p\wedge q)\supset\Box p$; 1 $\mathbf{R_3}$
4. $\Box(p\wedge q)\supset\Box q$; 2 $\mathbf{R_3}$
5. $(p\supset q)\supset[(p\supset r)\supset(p\supset(q\wedge r))]$; $\mathbf{L_p}$
6. $(\Box(p\wedge q)\supset\Box p)\supset[(\Box(p\wedge q)\supset\Box q)\supset(\Box(p\wedge q)\supset(\Box p\wedge\Box q))]$; 5 $p/\Box(p\wedge q)$, $q/\Box p$, $r/\Box q$
7. $(\Box(p\wedge q)\supset\Box q)\supset(\Box(p\wedge q)\supset(\Box p\wedge\Box q))$; 3,6 **MP**
8. $\Box(p\wedge q)\supset(\Box p\wedge\Box q)$; 4,7 **MP**

$\mathbf{K_3}$ $(\Box p\wedge\Box q)\supset\Box(p\wedge q)$
1. $p\supset[q\supset(p\wedge q)]$; $\mathbf{L_p}$
2. $\Box p\supset\Box[q\supset(p\wedge q)]$; 1 $\mathbf{R_3}$
3. $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$; **K**
4. $\Box(q\supset(p\wedge q))\supset(\Box q\supset\Box(p\wedge q))$; **K** p/q, $q/p\wedge q$
5. $(p\supset q)\supset\{[q\supset(r\supset s)]\supset[(p\wedge r)\supset s]\}$; $\mathbf{L_p}$
6. $[\Box p\supset\Box(q\supset(p\wedge q))]\supset\{[\Box(q\supset(p\wedge q))\supset(\Box q\supset\Box(p\wedge q))]\supset[(\Box p\wedge\Box q)\supset\supset\Box(p\wedge q)]\}$; 5 $p/\Box p$, $q/\Box(q\supset(p\wedge q))$, $r/\Box q$, $s/\Box(p\wedge q)$
7. $[\Box(q\supset(p\wedge q))\supset(\Box q\supset\Box(p\wedge q))]\supset[(\Box p\wedge\Box q)\supset\Box(p\wedge q)]$; 2,6 **MP**
8. $(\Box p\wedge\Box q)\supset\Box(p\wedge q)$; 4,7 **MP**

$\mathbf{K_4}$ $\Box(p\wedge q)\equiv(\Box p\wedge\Box q)$ (Exerciţiu)

$\mathbf{K_4^*}$ $\Box(p_1\wedge\ldots\wedge p_n)\equiv(\Box p_1\wedge\ldots\wedge\Box p_n)$ ($n-1$ aplicaţii ale $\mathbf{K_4}$; exerciţiu).

$\mathbf{K_5}$ $(\Box p\vee\Box q)\supset\Box(p\vee q)$ (Exerciţiu)

$\mathbf{K_6}$ $\Diamond(p\vee q)\equiv(\Diamond p\vee\Diamond q)$

1. $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$; $\mathbf{K_4}$
2. $\Box(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\Box \neg p \wedge \Box \neg q)$; 1 $p/\neg p$, $q/\neg q$
3. $\neg \Diamond \neg (\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond q)$; 2 **Intersch**
4. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee q)$; $\mathbf{L_p}$
5. $(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$; $\mathbf{L_p}$
6. $\neg \Diamond (p \vee q) \equiv \neg(\Diamond p \vee \Diamond q)$; 3, 4, 5 **Inloc**, **Subst**
7. $(\neg p \equiv \neg q) \supset (p \equiv q)$
8. $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$; 7, 6, **Subst**, **MP**

$\mathbf{K_7}$ $\Diamond(p \wedge q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)$ (Exercițiu)

$\mathbf{K_7^*}$ $\Diamond(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \supset (\Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_n)$ (Exercițiu)

$\mathbf{K_8}$ $\Box(p \vee q) \supset (\Box p \vee \Diamond q)$
1. $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$; **K**
2. $\Box(\neg q \supset p) \supset (\Box \neg q \supset \Box p)$; 1 $p/\neg q$, q/p
3. $\Box(q \vee p) \supset (\neg \Box \neg q \vee \Box p)$; 2, $\mathbf{L_p}$
4. $\Box(p \vee q) \supset (\Box p \vee \Diamond q)$; 3, $\mathbf{L_p}$, **Intersch**

$\mathbf{K_9}$ $\Diamond(p \supset q) \equiv (\Box p \supset \Diamond q)$
1. $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$; $\mathbf{K_6}$
2. $\Diamond(\neg p \vee q) \equiv (\Diamond \neg p \vee \Diamond q)$; 1, $p/\neg p$
3. $\Diamond(\neg p \vee q) \equiv (\neg \Box p \vee \Diamond q)$; 2, **Intersch**
4. $\Diamond(p \supset q) \equiv (\Box p \supset \Diamond q)$; 3, $\mathbf{L_p}$

$\mathbf{K_{10}}$ $(\Diamond p \vee \Box q) \supset \Diamond(p \wedge q)$ (Exercițiu)

$\mathbf{K_{11}}$ $\Box[(p \wedge q) \supset r] \equiv \Box[(\Diamond p \wedge \Box q) \supset \Diamond r]$ (Exercițiu)

$\mathbf{K_{12}}$ $\Box[(p \wedge q) \supset r] \equiv \Box[(\Box p \wedge \Diamond q) \supset \Diamond r]$ (Exercițiu)

Remarcă. În cele ce urmează vom analiza alte sisteme modale, care se obțin din sistemul $\mathcal{K}$, prin adăugarea unei (unor) axiome specifice, regulile de deducție rămânând aceleași: **Subst**, **MP** și **N**. Toate aceste sisteme, inclusiv $\mathcal{K}$, se numesc sisteme **normale** de logică modală propozițională.

Sistemul modal $\mathcal{T}$ [7]

Sistemul modal $\mathcal{T}$ se obține din sistemul modal $\mathcal{K}$ plus axioma necesității: „Dacă ceva este *în mod necesar* așa, atunci așa este", adică $\Box p \supset p$. Așadar,

$\mathcal{T} = \mathcal{K} + \mathbf{T} : \Box p \supset p$

[7] Numele este dat de R. Feys, în Les logiques nouvelles des modalitiés, *Revue Néoscholastique de Philosophie*, 40 și 41/1937. Întrucât este echivalent cu sistemul $\mathcal{M}$ al lui G. H.v. Wright din *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, 1951, el este mai cunoscut și ca sistemul $\mathcal{M}$.

Dat fiind acest raport între $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$, toate teoremele sistemului $\mathcal{K}$ sunt şi teoreme ale sistemului $\mathcal{T}$, sistemul $\mathcal{T}$ având şi teoreme proprii[8].

T$_1$ $p \supset \Diamond p$

1. $\Box p \supset p$; **T**
2. $\Box \neg p \supset \neg p$; $p/\neg p$
3. $p \supset \neg \Box \neg p$; 2, $\mathbf{L_p}$
4. $p \supset \Diamond p$; 3, **Intersch, Inloc**

T$_2$ $\Diamond(p \supset \Box p)$ (Exerciţiu)

Sistemul modal $\mathcal{D}$

Sistemul modal $\mathcal{D}$ se obţine din sistemul modal $\mathcal{K}$ adăugând axioma „deontică": „Dacă ceva este obligatoriu, atunci este permis", adică $\Box p \supset \Diamond p$. Aşadar,

$\mathcal{D} = \mathcal{K} + \mathbf{D} : \Box p \supset \Diamond p$.

D$_1$ $\Diamond(p \supset p)$

1. $p \supset p$; $\mathbf{L_p}$
2. $\Box(p \supset p)$; 1 **N**
3. $\Box(p \supset p) \supset \Diamond(p \supset p)$; **D** $p/p \supset p$
4. $\Diamond(p \supset p)$; 2,3 **MP**

Sistemul modal $\mathcal{K}4$

Acest sistem se obţine din sistemul $\mathcal{K}$ plus axioma **4**: $\Box p \supset \Box\Box p$ („Dacă ceva este necesar, atunci în mod necesar este astfel"). Aşadar,

$\mathcal{K}4 = \mathcal{K} + \mathbf{4}$: $\Box p \supset \Box\Box p$

K4$_1$ $\Box\Diamond\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond p$

1. $(p \supset q) \supset \{(q \supset r) \supset [(r \supset s) \supset (p \supset s)]\}$; $\mathbf{L_p}$
2. $(\Box p \supset \Box\Box p) \supset \{(\Box\Box p \supset \Box\Box\Box p) \supset [(\Box\Box\Box p \supset \Box\Box\Box\Box p) \supset (\Box p \supset \Box\Box\Box\Box p)]\}$; 1 $p/\Box p$, $q/\Box\Box p$, $r/\Box\Box\Box p$, $s/\Box\Box\Box\Box p$.
3. $\Box\Box p \supset \Box\Box\Box p$; **4** $p/\Box p$
4. $\Box\Box\Box p \supset \Box\Box\Box\Box p$; 3 $p/\Box p$
5. $\Box p \supset \Box\Box\Box\Box p$; 2, **4**, 3, 4, **MP**
6. $\Box \neg p \supset \Box\Box\Box\Box \neg p$; 5, $p/\neg p$
7. $\neg \Box\Box\Box\Box \neg p \supset \neg \Box \neg p$; 6, $\mathbf{L_p}$ (contrapoz.)
8. $\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p \supset \Diamond p$; 7, **Intersch**
9. $\Box(\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p \supset \Diamond p)$; 8 **N**
10. $\Box[(\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p]$; ($\mathcal{K}$; exer. 7).
11. $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$; $\mathbf{L_p}$
12. $\Box[(\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Diamond p]$; 10, 9, 11, **Subst, MP**
13. $\Box(\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Box\Diamond p$; 12, **K, Subst, MP**

[8] În acest caz spunem că $\mathcal{T}$ este o extensie *proprie* a lui $\mathcal{K}$; o extensie improprie este atunci când două sisteme au aceleaşi teoreme.

14. $(\Box\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Box\Diamond p$; 13, K_4, 4, **Inloc**
15. $\Box\Diamond\Box\Diamond p \supset \Box\Box\Diamond\Box\Diamond p$; **4** $p/\Diamond\Box\Diamond p$
16. $[(p \wedge q) \supset r] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$; L_p
17. $\Box\Diamond\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond p$; 14, 15, 16, **Subst**, **MP**

K4$_2$ $\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond\Box\Diamond p$

K4$_3$ $\Box\Diamond\Box\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$

K4$_4$ $(\Box\Box p \wedge \Box p) \equiv \Box p$ (Exercițiu)

K4$_5$ $\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset [\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p)]$
1. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$; L_p
2. $\Box(p \equiv q) \supset \Box(p \supset q)$; 1, **N**, **K**, **MP**
3. $\Box[(q \equiv (\Box q \supset p)] \supset \Box[q \supset (\Box q \supset p)]$; 2 p/q, $q/\Box q \supset p$
4. $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$; **K**
5. $\Box[(q \supset (\Box q \supset p)] \supset [\Box q \supset \Box(\Box q \supset p)]$; 4, **Subst**
6. $\Box[(q \equiv (\Box q \supset p)] \supset [\Box q \supset \Box(\Box q \supset p)]$; 3, 5, L_p
7. $\Box(\Box q \supset p) \supset (\Box\Box q \supset \Box p)$; 4, **Subst**
8. $\Box p \supset \Box\Box p$; **4**
9. $[p \supset (q \supset r)] \supset \{[r \supset (s \supset t)] \supset [(q \supset s) \supset (p \supset (q \supset t))]\}$; L_p
10. $\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset (\Box q \supset \Box p)$; 6, 7, 8, 9 + **Subst**: $p/\Box(q \equiv (\Box q \supset p))$, $q/\Box q$, $r/\Box(\Box q \supset p)$, $s/\Box\Box q$, $t/\Box p$, **MP**
11. $\Box\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset \Box(\Box q \supset \Box p)$; 10, **N**, **K**, **MP**
12. $\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset \Box\Box[q \equiv (\Box q \supset p)]$; 8 **Subst**
13. $(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$; L_p
14. $\Box(q \supset r) \supset [\Box(p \supset q) \supset \Box(p \supset r)]$; 13, **N**, **K**, **MP**
15. $\Box(\Box p \supset p) \supset [\Box(\Box q \supset \Box p) \supset \Box(\Box q \supset p)]$; 14, $q/\Box p$, r/p, $p/\Box q$
16. $[p \equiv (q \supset r)] \supset [(q \supset r) \supset q]$; L_p
17. $[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset [(\Box q \supset p) \supset \Box q]$; 16 p/q, $q/\Box q$, r/p
18. $\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset \Box[(\Box q \supset p) \supset \Box q]$; 17, **N**, **K**, **MP**
19. $\Box[q \equiv (\Box q \supset p)] \supset [\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p]$; 12, 11, 15, 18, 10 prin L_p

Sistemul modal S4

Sistemul modal *S4* se obține din sistemul modal *T* plus axioma **4**, echivalent din sistemul modal *K* plus axiomele **T** și **4**, adică:

$S4 = T + 4: \Box p \supset \Box\Box p = K + T: \Box p \supset p + 4: \Box p \supset \Box\Box p$

Teoreme în S4

S4$_1$ $\Box p \equiv \Box\Box p$
1. $\Box p \supset p$; **T**
2. $\Box\Box p \supset \Box p$; 1 $p/\Box p$
3. $\Box p \equiv \Box\Box p$; 2, **4** L_p

S4$_2$ $\Diamond\Diamond p \supset \Diamond p$

1. $\Box\neg p \supset \Box\Box\neg p$; **4** $p/\neg p$
2. $\neg\Box\Box\neg p \supset \neg\Box\neg p$; 1 contrapoz
3. $\Diamond\Diamond p \supset \Diamond p$; 2 **Intersch**

S4$_3$ $\Diamond p \equiv \Diamond\Diamond p$

1. $\Box\Box p \supset \Box p$; **T** $p/\Box p$
2. $\Box\Box\neg p \supset \Box\neg p$; 1 $p/\neg p$
3. $\neg\Box\neg p \supset \neg\Box\Box\neg p$; 2 contrapoz
4. $\Diamond p \supset \Diamond\Diamond p$; 3 **Intersch**
5. $\Diamond p \equiv \Diamond\Diamond p$; 4, **S4**$_2$, $\mathbf{L_p}$

S4$_4$

$$\begin{array}{ccccc} \Box p & \rightarrow & \Box\Diamond\Box p & \rightarrow & \Diamond\Box p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \Box\Diamond p & \rightarrow & \Diamond\Box\Diamond p \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ p & & \longrightarrow & & \Diamond p \end{array}$$

(unde „$\rightarrow$" reprezintă implicația)

Să luăm câteva exemple din **S4**$_4$

a) $\Box p \supset \Box\Diamond\Box p$

1. $p \supset \Diamond p$; $\mathbf{T_1}$
2. $\Box p \supset \Box\Diamond p$; 1, **N**, **K**, **MP**
3. $\Box\Box p \supset \Box\Diamond\Box p$; 2 $p/\Box p$
4. $\Box p \equiv \Box\Box p$; **S4**$_1$
5. $\Box p \supset \Box\Diamond\Box p$; 3, 4, **Inloc**

b) $\Box\Diamond\Box p \supset \Diamond\Box p$

1. $\Box p \supset p$; **T**
2. $\Box\Diamond\Box p \supset \Diamond\Box p$; 1 $p/\Diamond\Box p$

Definiția 1. O modalitate este un șir compact de zero sau mai mulți operatori monadici ($\neg$, $\Box$, $\Diamond$*).*

Regula interschimbării (*Intersch*) ne arată că orice modalitate poate fi redată în unul din următoarele două moduri: a) fără să conțină vreun simbol al negației (i.e. pozitivă) sau b) cu un singur simbol al negației situat în fața modalității (i.e. negativă). Cu acest concept al modalității vom opera în continuare.

Definiția 2. O modalitate se numește iterată *dacă conține cel puțin doi operatori modali.*

Definiția 3. Două modalități se numesc echivalente *într-un sistem S dacă înlocuirea lor reciprocă în orice formulă a sistemului conservă valoarea de adevăr a formulei în sistemul considerat; în caz contrar sunt* neechivalente *(distincte).*

Definiția 4. Dacă două modalități M_1, M_2 *sunt echivalente într-un sistem S iar* M_1 *conține mai puțini operatori modali ca* M_2*, atunci* M_2 *este* reductibilă *la* M_1 *în S.*

Teoremele **K4**$_1$, **S4**$_1$, **S4**$_3$ și **S4**$_4$ ne arată că în sistemul *S4* pot exista cel mult 14 modalități neechivalente, cele 7 conținute în teorema **S4**$_4$ plus negațiile lor[9].

[9] O demonstrație a acestui fapt rezultă din teorema de completitudine a lui *S4*.

Sistemul modal S5

Sistemul modal *S5* se obține din sistemul *T* plus axioma **5**[10]: $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$, echivalent, din sistemul *K* plus axiomele **T**: $\Box p \supset \Box\Diamond p$.

$S5 = T + \mathbf{5}: \Diamond p \supset \Box\Diamond p = K + \mathbf{T}: \Box p \supset p + \mathbf{5}: \Diamond p \supset \Box\Diamond p$

Teoreme ale sistemului modal S5

$\mathbf{S5_1}$ $\Diamond\Box p \supset \Box p$

1. $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$; **5**
2. $\Diamond\neg p \supset \Box\Diamond\neg p$; 1, $p/\neg p$
3. $\neg\Box p \supset \neg\Diamond\Box p$; 2 **Intersch**
4. $\Diamond\Box p \supset \Box p$; 3, contrapoz

$\mathbf{S5_2}$ $\Box p \equiv \Diamond\Box p$

1. $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$; **5**
2. $\Diamond\neg p \supset \Box\Diamond\neg p$; 1, $p/\neg p$
3. $\neg\Box\Diamond\neg p \supset \neg\Diamond\neg p$; 2, contrapoz
4. $\Diamond\Box p \supset \Box p$; 3, **Intersch**
5. $p \supset \Diamond p$; $\mathbf{T_1}$
6. $\Box p \supset \Diamond\Box p$; 5 $p/\Box p$
7. $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$; $\mathbf{L_p}$
8. $(\Box p \supset \Diamond\Box p) \supset [(\Diamond\Box p \supset \Box p) \supset (\Box p \equiv \Diamond\Box p)]$; 7, $p/\Box p$, $q/\Diamond\Box p$
9. $(\Diamond\Box p \supset \Box p) \supset (\Box p \equiv \Diamond\Box p)$; 6, 8, **MP**
10. $\Box p \equiv \Diamond\Box p$; 4, 9 **MP**

$\mathbf{S5_3}$ $\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$

1. $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$; **5**
2. $\Box p \supset p$; **T**
3. $\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; 2 $p/\Diamond p$
4. $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$
5. $\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$; 4 + **Subst** $p/\Diamond p$, $q/\Box\Diamond p$ + 1 și 3 + două aplicații ale **MP**

$\mathbf{S5_4}$ $\Box(p \vee \Box q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$

1. $\Box(p \vee q) \supset (\Box p \vee \Diamond q)$; $\mathbf{K_8}$
2. $\Box(p \vee \Box q) \supset (\Box p \vee \Diamond\Box q)$; 1 $q/\Box q$
3. $\Box(p \vee \Box q) \supset (\Box p \vee \Box q)$; 2, $\mathbf{S5_2}$
4. $(\Box p \vee \Box q) \supset \Box(p \vee q)$; $\mathbf{K_5}$
5. $(\Box p \vee \Box\Box q) \supset \Box(p \vee \Box q)$; 4 $q/\Box q$
6. $(\Box p \vee \Box q) \supset \Box(p \vee \Box q)$; 5, $S4_1$, **Inloc**
7. $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$; $\mathbf{L_p}$
8. $\Box(p \vee \Box q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$; 7 , **Subst**, $p/(p \vee \Box q)$, $q/(\Box p \vee \Box q)$, **N**, **K** + 3 și 6 + două aplicații ale **MP**

[10] Sub numele acesta, **5**, axioma apare la B.F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge UP 1980, unde sistemul *S5* este numit *KT5*. Alți autori (e.g. E.J. Lemmon; D. Scott, *The „Lemmon Notes": An Introduction to Modal Logic*, ed. K. Segerberg, Oxford, Basil Blackwell, 1977) o numesc axioma E, de la „euclidian", condiție a validității ei (comp. 4.2).

$S5_5$ $\Box(p \vee \Diamond q) \equiv (\Box p \vee \Diamond q)$ (Exercițiu)

$S5_6$ $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

1. $\Box(p \vee \Box q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$; $\mathbf{S5_4}$
2. $\Box(\neg p \vee \Box\neg q) \equiv (\Box\neg p \vee \Box\neg q)$; 1, $p/\neg p; q/\neg q$
3. $(p \equiv q) \supset (\neg p \equiv \neg q)$; $\mathbf{L_p}$
4. $\neg\Box(\neg p \vee \Box\neg q) \equiv \neg(\Box\neg p \vee \Box\neg q)$; 2, 3 , **Subst, MP**
5. $\Diamond\neg(\neg p \vee \neg\Diamond q) \equiv (\neg\Box\neg p \wedge \neg\Box\neg q)$; 4, $\mathbf{L_p}$, **Intersch**
6. $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv (\Diamond p \wedge \Diamond q)$; 5, $\mathbf{L_p}$, **Intersch**

$S5_7$ $\Diamond(p \wedge \Box q) \equiv (\Diamond p \wedge \Box q)$ (Exercițiu)

Remarci

1. Ceea ce demonstrează teoremele $\mathbf{S5_2}$, $\mathbf{S5_3}$ şi teoremele $\mathbf{S4_1}$, $\mathbf{S4_3}$ este următorul fapt: în orice modalitate cu doi operatori modali, primul poate fi eliminat. Cum acest fapt poate fi repetat, rezultă că în orice modalitate, cu un număr arbitrar de operatori modali, în afară de ultimul, toți pot fi eliminați în *S5*.
2. Sistemul modal *S5* conține doar şase modalități distincte, trei afirmative (*, $\Box$, $\Diamond$)[11] şi trei negative (negațiile celor precedente).

3. Operatorul $\Box$ este distributiv în raport cu $\vee$ ($\mathbf{S5_4}$ şi $\mathbf{S5_5}$) doar dacă cel puțin unul din disjuncți este modalizat. Dacă o formulă care succede operatorul $\Box$ are *n* disjuncți, modalizați şi nemodalizați, atunci cei nemodalizați se consideră un disjunct unitar, după care se face distribuirea lui $\Box$.
Exemplu:
$\Box(p \vee \Box q \vee \Diamond\neg r \vee \neg q) \equiv \Box[((p \vee \neg q) \vee \Box q) \vee \Diamond\neg r] \equiv \Box((p \vee \neg q) \vee \Box q) \vee \Diamond\neg r \equiv$
$\equiv \Box(p \vee \neg q) \vee \Box q \vee \Diamond\neg r.$
Similar procedăm cu operatorul $\Diamond$ în raport cu $\wedge$.

Sistemul modal B

Sistemul modal *B* se obține din sistemul modal *T* plus axioma brouweriană[12] $\mathbf{B}: p \supset \Box\Diamond p$, deci $\mathcal{B} = \mathcal{T} + \mathbf{B}: p \supset \Box\Diamond p$.

$\mathbf{B_1}$ $\Diamond\Box p \supset p$

1. $\neg p \supset \Box\Diamond\neg p$; $\mathbf{B}$, $p/\neg p$
2. $\neg\Box\Diamond\neg p \supset \neg\neg p$; 1, contrapoz

---

[11] „*" reprezintă modalitatea vidă (cu zero operatori).

[12] Denumirea „brouweriană" are ca sursă C. I. Lewis şi C. H. Langford, *Symbolic Logic*, sec. ed., 1959, 497, unde axioma C_{12} este numită „Brouwersche Axiom", după denumirea dată ei de O. Becker în „*Zur Logik der Modalitäten*", din *Jahrbuch für Philosophie und Phän. Forsch.*, XI, 1930, 497-548. Iar denumirea dată de Becker are ca sursă teza neechivalenței unei aserțiuni cu dubla ei negație, din intuiționismul matematic al lui L. E. J. Brouwer. Mai precis, din $p \equiv \neg\neg p$ intuiționiştii admit doar implicația $p \supset \neg\neg p$, nu şi conversa ei. Iar dacă negația intuiționistă înseamnă „nu este posibil că", adică $\neg\Diamond$, atunci obținem $p \supset \neg\Diamond\neg\Diamond p$, respectiv $p \supset \Box\Diamond p$.

3. $\Diamond\Box p \supset p$; **Intersch**, L_p

$$R_6 \quad \frac{\Diamond\alpha \supset \beta}{\alpha \supset \Box\beta}$$

1. $\Diamond\alpha \supset \beta$
2. $\Box\Diamond\alpha \supset \Box\beta$; 1 R_3
3. $\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$; **B**, p/α
4. $\alpha \supset \Box\beta$; 3, 2 L_p

Remarcă. Din modul în care R_6 a fost derivată rezultă că nu este o regulă doar a sistemului $\mathcal{B}$, ci şi a sistemului $S5$, pentru că axioma **B**, utilizată în demonstrarea ei, este derivabilă în $S5$.

Sistemul modal Triv

Triv se obţine fie adăugând sistemului modal $\mathcal{D}$ axioma *Triv* : $p \supset \Box p$, fie adăugând sistemului modal $\mathcal{K}$ axioma $p \equiv \Box p$. Este numit *Triv* (*ial*) deoarece în acest sistem, indiferent cum îl conştruim, au loc următoarele echivalenţe: $p \equiv \Box p$ şi $p \equiv \Diamond p$; aşadar, modalităţile se deconstruiesc, orice formulă a sistemului fiind echivalentă cu formula corespunzătoare (obţinută prin ştergerea tuturor operatorilor modali) din logica propoziţiilor. Aşadar, dacă α este o formulă modală a lui *Triv* iar $\tau(\alpha)$ este formula corespunzătoare din L_p, atunci $\alpha \equiv \tau(\alpha)$. În acest caz vom spune că *Triv* colapsează în L_p.

Sistemul modal Ver

Sistemul modal *Ver* (*um*) este $\mathcal{K}$ plus axioma *Ver* : $\Box p$. Şi în acest caz vorbim despre o colapsare în L_p, însă într-un alt mod decât *Triv*.

Fie α următoarea formulă nevalidă a L_p : $(p \wedge q) \supset r$. Prin substituţie, din α putem obţine o formulă nesatisfiabilă, α^*, înlocuind, în toate ocurenţele lor, variabilele formulei, cu formule adecvate, astfel încât α^* este constant falsă. În α dacă p şi q sunt adevărate iar r falsă, atunci α este falsă. Dacă în locul lui p şi q vom pune formule valide $p \vee \neg p$, respectiv $q \vee \neg q$, iar în locul lui r formula inconsistentă $r \wedge \neg r$, ceea ce obţinem este o formulă *constant* falsă (i.e. nesatisfiabilă). La fel, putem construi o formulă *constant* adevărată. Valoarea logică a formulelor constante nu depinde de asignările făcute variabilelor lor, formulele constante fiind deci fie valide, fie nesatisfiabile. În cele ce urmează, formulele constant adevărate vor fi denotate cu T, iar cele constant false cu $\perp$. E uşor de constatat că dacă α şi β sunt formule constante, atunci $\neg\alpha$, $\alpha \circ \beta$, $\Box\alpha$ sunt formule constante.

Sistemul modal *Ver* colapsează în L_p doar dacă fiecare formulă de forma $\Box\alpha$ este înlocuită cu T iar $\Diamond\alpha$ este înlocuită cu $\perp$.

Lemă. Fie α o formulă constantă arbitrară. Atunci, dacă $\tau(\alpha)$ este o formulă validă a logicii propoziţiilor (i.e. L_p - validă), atunci $\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$; în caz contrar $\vdash_{\mathcal{D}} \neg\alpha$.

Demonstraţia o vom face prin *inducţie structurală*. Cum orice formulă constantă e construită din $\perp$ prin $\neg$, $\circ$, $\Box$, e suficient să demonstrăm că:

a) Lema este valabilă pentru $\bot$, fapt elementar căci $\tau(\bot)=\bot$. Însă $\bot$ este nesatisfiabilă şi deci $\neg\bot$ este L_p - validă, aşadar $\vdash_{\mathcal{D}}\neg\bot$ (căci $\mathcal{D}$ include $\mathcal{K}$, iar în $\mathcal{K}$ toate formulele valide ale L_p sunt teoreme).

b) Dacă lema este valabilă pentru α, atunci este valabilă şi pentru $\neg\alpha$. Presupunem că α este o formulă constantă. Atunci $\tau(\alpha)$ este fie L_p - validă, fie L_p nesatisfiabilă şi deci $\vdash_{\mathcal{D}}\alpha$ sau $\vdash_{\mathcal{D}}\neg\alpha$.

c) Dacă lema este valabilă pentru α şi β, atunci este valabilă şi pentru $\alpha\circ\beta$. Similar.

d) Dacă lema este valabilă pentru α, atunci este valabilă şi pentru $\Box\alpha$. Considerăm cele două cazuri, după cum urmează: 1. $\tau(\Box\alpha)$ este L_p - validă sau 2. $\tau(\Box\alpha)$ nu este L_p - validă. În primul caz, $\tau(\Box\alpha) = \tau(\alpha)$. Însă $\vdash_{\mathcal{D}}\alpha$ (căci am presupus că lema e valabilă pentru α), iar prin **N**: $\vdash_{\mathcal{D}}\Box\alpha$. În cel de-al doilea, $\tau(\Box\alpha) = \tau(\alpha)$, iar $\tau(\alpha)$ este nevalidă, deci $\vdash_{\mathcal{D}}\neg\alpha$, iar prin **N**: $\vdash_{\mathcal{D}}\Box\neg\alpha$, şi deci : $\vdash_{\mathcal{D}}\Diamond\neg\alpha$ (prin **D**), echivalent $\vdash_{\mathcal{D}}\neg\Box\alpha$ (**Intersch**).

Sistemul modal $\mathcal{GL}$[13]

Sistemul modal $\mathcal{GL}$ se obţine din sistemul modal $\mathcal{K}$ plus axioma **W**:

$\mathcal{GL}=\mathcal{K}+$ **W** : $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$

Acest sistem este o extensie a sistemului modal $\mathcal{K}4$, dată fiind demonstrabilitatea axiomei **4**: $\Box p\supset\Box\Box p$ în $\mathcal{GL}$.

GL₁ $\Box p\supset\Box\Box p$

1. $p\supset[(q\wedge r)\supset(r\wedge p)]$; L_p
2. $p\supset[(\Box\Box p\wedge\Box p)\supset(\Box p\wedge p)]$; 1 $q/\Box\Box p$, $r/\Box p$
3. $p\supset[\Box(\Box p\wedge p)\supset(\Box p\wedge p)]$; 2 K_4
4. $\Box p\supset\Box[\Box(\Box p\wedge p)\supset(\Box p\wedge p)]$; 3 R_3
5. $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$; **W**
6. $\Box[\Box(\Box p\wedge p)\supset(\Box p\wedge p)]\supset\Box(\Box p\wedge p)$; 5 $p/\Box p\wedge p$
7. $\Box p\supset\Box(\Box p\wedge p)$; 4, 6 L_p
8. $\Box(\Box p\wedge p)\equiv(\Box\Box p\wedge\Box p)$; K_4, **Subst**
9. $(\Box\Box p\wedge\Box p)\supset\Box\Box p$; L_p
10. $\Box(\Box p\wedge p)\supset\Box\Box p$; 8, 9 **Inloc**
11. $\Box p\supset\Box\Box p$; 7, 10; L_p

GL₂ $\Box(\Box p\supset p)\equiv\Box p$

1. $\Box p\supset\Box(\Box p\wedge p)$, 7 (din demonstraţia de mai sus)
2. $(p\wedge q)\supset(p\supset q)$; L_p
3. $(\Box p\wedge p)\supset(\Box p\supset p)$; 2 $p/\Box p$, q/p

[13] Acest sistem mai este cunoscut şi sub numele $\mathcal{KW}$, $\mathcal{K}4\mathcal{W}$ sau $\mathcal{P}r\mathcal{L}$ (*Provability Logic*). Numele $\mathcal{GL}$ este dat de G. Boolos, în memoria contribuţiilor lui Gödel, Löb şi Geach la studiul logicii demonstrabilităţii (cf. Boolos, *The Logic of Provability*, 256). Ideea de logică modală a *demonstrabilităţii* ($\mathcal{P}r\mathcal{L}$) are ca sursă interpretarea functorului „necesar" ($\Box$) ca „este demonstrabil că". În acest sens, axioma **W** interpretează una din teoremele de incompletitudine ale lui Gödel cu privire la consistenţa aritmeticii, respectiv: dacă este demonstrabil că orice este demonstrabil este adevărat [$\Box(\Box p\supset p)$], atunci orice este demonstrabil ($\Box p$).

4. $\Box(\Box p \wedge p) \supset \Box(\Box p \supset p)$; 3 **R$_3$**

5. $\Box p \supset \Box(\Box p \supset p)$; 1, 4, **L$_p$**

6. $\Box(\Box p \supset p) \equiv \Box p$; **W**, 5, **L$_p$**

GL$_3$ $\Box\bot \equiv \Box\Diamond p$

1. $\bot \supset \Diamond p$; (*ex. falso quodlidbet*)
2. $\Box\bot \supset \Box\Diamond p$; 1 **R$_3$**
3. $p \supset \top$; **L$_p$**
4. $\Diamond p \supset \Diamond\top$; 3 **R$_5$**
5. $\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond\top$; 4 **R$_3$**
6. $\Diamond\top \equiv \neg\Box\bot$; **Intersch**
7. $\neg\Box\bot \equiv (\Box\bot \supset \bot)$; **L$_p$**
8. $\Diamond\top \equiv (\Box\bot \supset \bot)$; 6, 7, **Inloc**
9. $\Box\Diamond\top \equiv \Box(\Box\bot \supset \bot)$; 8 **R$_4$**
10. $\Box(\Box\bot \supset \bot) \supset \Box\bot$; **W**; $p/\bot$
11. $\Box\Diamond p \supset \Box(\Box\bot \supset \bot)$; 5, 9, **Inloc**
12. $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$; **L$_p$**
13. $\Box\Diamond p \supset \Box\bot$; 11, 10 prin 12 + **L$_p$**
14. $\Box\bot \equiv \Box\Diamond p$; 2, 13 **L$_p$**

Cum $\mathcal{GL}$ este o extensie a sistemului modal $\mathcal{K}4$, rezultă că teorema $\mathcal{K}4_1$ este şi teoremă a lui $\mathcal{GL}$. De altfel, acest lucru rezultă direct din **GL$_3$**, prin substituirea lui p cu $\Box\Diamond p$.

GL$_4$ $\Box\Diamond\bot \supset \Box\bot$ (Exerciţiu)

GL$_5$ $\neg\Box\bot \equiv \neg\Box\neg\Box\bot$ (Exerciţiu)

GL$_6$ $\Box(p \equiv \neg\Box p) \equiv \Box(p \equiv \neg\Box\bot)$

1. $\Box p \supset \Box\Box p$; **4**
2. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset \Box\Box(p \equiv \neg\Box p)$, 1 $p/p \equiv \neg\Box p$
3. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$; **L$_p$**
4. $(p \equiv \neg\Box p) \supset (p \supset \neg\Box p)$; 3 $q/\neg\Box p$
5. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset \Box(p \supset \neg\Box p)$; 4 **R$_3$**
6. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset (\Box p \supset \Box\neg\Box p)$; 5 **R$_3$**
7. $\Box\bot \equiv \Box\Diamond p$; **GL$_3$**
8. $\Box\bot \equiv \Box\Diamond\neg p$; 7 $p/\neg p$
9. $\Box\bot \equiv \Box\neg\Box p$; 8 **Intersch**
10. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset (\Box p \supset \Box\bot)$; 6, 8, **Inloc**
11. $\bot \supset p$; **L$_p$**
12. $\Box\bot \supset \Box p$, 11 **R$_3$**
13. $[p \supset (q \supset r)] \supset \{(r \supset q) \supset [p \supset (q \equiv r)]\}$; **L$_p$**

14. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset (\Box p \supset \Box\bot)$, 10, 12 prin 13 cu subst: $p/\Box(p \equiv \neg\Box p)$, $q/\Box p$, $r/\Box\bot$, **MP**

15. $\Box\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset \Box(\Box p \supset \Box\bot)$; 14 $\mathbf{R_3}$

16. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset \Box(\Box p \supset \Box\bot)$; 2, 15 $\mathbf{L_p}$

17. $[(p \equiv q) \wedge (\neg q \equiv r)] \supset (p \equiv \neg r)$; $\mathbf{L_p}$

18. $[(p \equiv \neg\Box p) \wedge (\Box p \equiv \Box\bot)] \supset (p \equiv \neg\Box\bot)$; 17, **Subst**

19. $[\Box(p \equiv \neg\Box p) \wedge \Box(\Box p \equiv \Box\bot)] \supset \Box(p \equiv \neg\Box\bot)$; 18 $\mathbf{R_3}$

20. $(p \supset q) \supset \{[(p \wedge q) \supset r] \supset (p \supset r)\}$; $\mathbf{L_p}$

21. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \supset \Box(p \equiv \neg\Box\bot)$; 16, 19 prin 20, cu subst: $p/\Box(p \equiv \neg\Box p)$, $q/\Box(\Box p \equiv \Box\bot)$, $r/\Box(p \equiv \neg\Box\bot)$, **MP**

$\mathbf{GL_7}$ $\Box(p \equiv \Box\neg p) \equiv \Box(p \equiv \Box\bot)$

1. $\Box(\neg p \equiv \neg\Box\neg p) \equiv \Box(\neg p \equiv \neg\Box\bot)$; $\mathbf{GL_6}$ $p/\neg p$
2. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$; $\mathbf{L_p}$
3. $(\neg p \equiv \neg\Box\neg p) \equiv (p \equiv \Box\neg p)$; 2 $q/\Box\neg p$
4. $(\neg p \equiv \neg\Box\bot) \equiv (p \equiv \Box\bot)$, 2 $q/\Box\bot$
5. $\Box(p \equiv \neg\Box p) \equiv \Box(p \equiv \Box\bot)$, 1, 3, 4 **Inloc**

$\mathbf{GL_8}$ $\Box(p \equiv \Box p) \equiv \Box(p \equiv \top)$

a) $\Box(p \equiv \Box p) \supset \Box(p \equiv \top)$

1. $\Box(p \equiv \Box p) \equiv \Box[(p \supset \Box p) \wedge (\Box p \supset p)]$; $\mathbf{L_p}$
2. $\Box(p \equiv \Box p) \equiv [\Box(p \supset \Box p) \wedge \Box(\Box p \supset p)]$; $\mathbf{K_4}$
3. $[p \equiv (q \wedge r)] \supset (p \supset r)$; $\mathbf{L_p}$
4. $\Box(p \equiv \Box p) \supset \Box(\Box p \supset p)$; 2,3, **Subst, MP** $p/\Box(p \equiv \Box p)$, $q/\Box(p \supset \Box p)$, $r/\Box(\Box p \supset p)$
5. $\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p$, **W**
6. $\Box(p \equiv \Box p) \supset \Box p$; 4, 5 $\mathbf{L_p}$
7. $p \equiv (p \equiv \top)$
8. $\Box p \equiv \Box(p \equiv \top)$; $\mathbf{R_3}$
9. $\Box(p \equiv \Box p) \supset \Box(p \equiv \top)$; 6, 8 **Inloc**

b) $\Box(p \equiv \top) \supset \Box(p \equiv \Box p)$

1. $p \supset p$; $\mathbf{L_p}$
2. $\Box p \supset \Box p$, 1 $\mathbf{R_3}$
3. $\Box p \supset \Box\Box p$, **4**
4. $(p \supset p) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset (p \wedge q))]$; $\mathbf{L_p}$
5. $\Box p \supset (\Box p \wedge \Box\Box p)$; 2, 3 prin 4, **Subst, MP**
6. $\Box p \supset \Box(p \wedge \Box p)$; 5, $\mathbf{K_3}$
7. $(p \wedge \Box p) \supset (p \equiv \Box p)$; $\mathbf{L_p}$
8. $\Box(p \wedge \Box p) \supset \Box(p \equiv \Box p)$; 7, $\mathbf{R_3}$
9. $\Box p \supset \Box(p \equiv \Box p)$; 6, 8, $\mathbf{L_p}$
10. $\Box p \equiv \Box(p \equiv \top)$; $\mathbf{L_p}$
11. $\Box(p \equiv \top) \supset \Box(p \equiv \Box p)$; 9, 10 **Inloc**

$\mathbf{GL_9}$ $\Box(p \equiv \neg\Box\neg p) \equiv \Box(p \equiv \bot)$

1. $\Box(\neg p \equiv \Box\neg p) \equiv \Box(\neg p \equiv \top)$; $\mathbf{GL_8}$ $p/\neg p$
2. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
3. $\Box(p \equiv \neg\Box\neg p) \equiv \Box(p \equiv \bot)$; 1, 2 **Subst, Inloc**

4.1.2. Sisteme de logică modală propozițională

Sistemul modal $\mathcal{K}$

1. Să se demonstreze în sistemul modal $\mathcal{K}$ regula derivată $\mathbf{R}_4$, cu și fără utilizarea regulii derivate $\mathbf{R}_3$.

2. Să se demonstreze în $\mathcal{K}$ teoremele $\mathbf{K}_4$, $\mathbf{K}_5$, $\mathbf{K}_7$, $\mathbf{K}_{10}$, $\mathbf{K}_{11}$ și $\mathbf{K}_{12}$.

3. Demonstrați în $\mathcal{K}$ următoarele formule:

$\alpha_1 = [\Box(\neg p \vee q) \wedge \Diamond(p \wedge r)] \supset \Diamond(q \wedge r)$

$\alpha_2 = \neg(\Diamond p \supset \Diamond q) \supset \neg\Box(\neg p \vee q)$

$\alpha_3 = \neg(\neg\Box q \vee \Diamond q) \supset \Box\neg(p \vee \neg p)$

4. Să se demonstreze că formula α de mai jos este o teoremă a sistemului $\mathcal{K}$:

$\alpha = \Box[(\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p]$

Sistemul modal $\mathcal{T}$

1. Demonstrați T_2 în sistemul modal $\mathcal{T}$.

2. Demonstrați că sistemul modal $\mathcal{K} + p \supset \Diamond p$ este deductiv echivalent cu $\mathcal{T}$ (i.e. cele două sisteme au aceleași teoreme).

3. Demonstrați în sistemul $\mathcal{T}$ axioma sistemului deontic $\mathcal{D}$: $\Box p \supset \Diamond p$.

Sistemul modal $\mathcal{D}$

1. Demonstrați în sistemul $\mathcal{D}$ că axioma sistemului, $\Box p \supset \Diamond p$, poate fi demonstrată dacă sistemului $\mathcal{K}$ îi adăugăm $\mathbf{D}_1$.

2. Demonstrați în sistemul $\mathcal{D}$ următoarea regulă derivată de deducție

$$\frac{\alpha}{\Diamond\alpha}$$

3. Demonstrați, pe baza $q \supset (p \supset p)$, că orice extensie a sistemului $\mathcal{K}$, care admite teoreme de forma $\Diamond\alpha$, conține sistemul $\mathcal{D}$.

4. Demonstrați în $\mathcal{D}$ următoarea formulă: $(\Box p \supset \Diamond\neg q) \vee \Diamond(p \vee q)$.

5. Să se demonstreze că $\dfrac{\alpha \vee \beta}{\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta}$ este o regulă derivată a sistemului $\mathcal{D}$.

Sistemul modal $\mathcal{K}4$

Demonstrați în $\mathcal{K}4$ teoremele $\mathbf{K4}_2$, $\mathbf{K4}_3$ și $\mathbf{K4}_4$.

Sistemul modal $\mathcal{S}4$

1. Demonstrați în $\mathcal{S}4$ următoarele implicații din Teorema $\mathbf{S4}_4$:

c) $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box\Diamond p$; d) $\Diamond\Box p \supset \Diamond\Box\Diamond p$; e) $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond p$.

2. Demonstrați în $\mathcal{S}4$ teorema $\mathbf{K4}_1$.

3. Demonstrați în $\mathcal{S}4$: $\Diamond\Box p \equiv \Diamond\Box\Diamond\Box p$.

4. Argumentați că în sistemul modal $\mathcal{S}4$ există cel mult 14 modalități neechivalente.

5. Să se demonstreze că în sistemul $\mathcal{S}4^*$, ale cărui axiome sunt $\mathbf{L}_\mathbf{p}$, $\mathbf{K}^*$: $\Box(p \supset q) \supset \Box(\Box p \supset \Box q)$ și $\mathbf{T}$: $\Box p \supset p$, este deductiv echivalent cu $\mathcal{S}4$.

6. Să se demonstreze în $\mathcal{S}4$ formula α de mai jos:

$\alpha = \Diamond(\Box p \supset \Diamond q) \supset \Diamond(p \supset q)$.

Sistemul modal $\mathcal{S5}$

1. Să se demonstreze că $\Box p \equiv \Box\Box p$ este o teoremă a sistemului $\mathcal{S5}$.
2. Să se demonstreze că $\Box(p \vee \Diamond q) \equiv (\Box p \vee \Diamond q)$ este o teoremă a lui $\mathcal{S5}$.
   Indicație: În $\mathbf{S5_4}$ subst: $q/\Diamond q$ + $\mathbf{S5_3}$.
3. Să se demonstreze $\Diamond(p \wedge \Box q) \equiv (\Diamond p \wedge \Box q)$ în $\mathcal{S5}$.
   Indicație: În $\mathbf{S5_6}$ subst: $q/\Box q$ + $\mathbf{S5_2}$.

4. Să se demonstreze că sistemul modal $\mathcal{S5}^*$, obținut din $\mathcal{S4}$ plus axioma **B**: $p \supset \Box\Diamond p$ este deductiv echivalent cu $\mathcal{S5}$.

5. Să se demonstreze că sistemul $\mathcal{S5}$ este echivalent deductiv cu sistemul $\mathcal{S5}^{**}$ obținut din sistemul $\mathcal{D}$ plus **5**.

6. Să se demonstreze că sistemele $\mathcal{S5}$ și $\mathcal{S5}^{**}$ (obținut din $\mathcal{D}$ plus **5**) sunt deductiv echivalente.

Sistemele modale $\mathcal{Triv}$ ***și*** $\mathcal{Ver}$

Să se arate că $\mathcal{Triv}$ și $\mathcal{Ver}$ sunt sisteme incompatibile.

Sistemul modal $\mathcal{B}$

Să se arate că axioma specifică sistemului $\mathcal{S4.2}$, $\mathbf{G_1}$: $\Diamond\Box p \supset \Box\Diamond p$, este demonstrabilă în $\mathcal{B}$ ($\mathcal{S4.2}$ este $\mathcal{S4}$ + $\mathbf{G_1}$).

Sistemul modal $\mathcal{GL}$

1. Demonstrați că următoarele formule sunt teoreme ale sistemului $\mathcal{GL}$:

α: $\neg\Box p \equiv \Diamond(\neg p \wedge \Box p)$

β: $\Diamond p \equiv \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$

γ: $\Box p \equiv \Box(p \wedge \Box p)$

2. Demonstrați în $\mathcal{GL}$ teorema $\mathbf{GL_4}$.
3. Demonstrați în $\mathcal{GL}$ teorema $\mathbf{GL_5}$.

4.2. Semantica $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$

4.2.1. S-validitatea formulelor $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$

Așa cum am constatat mai sus, a demonstra o *teoremă* α înseamnă a deduce (deriva) formula respectivă cu ajutorul axiomelor, regulilor de deducție și definițiilor unui aparat formal. În cele ce urmează vom opera însă și cu un alt concept, cel de formulă *validă*. Cele două concepte, *teoremă* și *formulă validă*, sunt diferite între ele, căci un sistem axiomatic modal poate fi dezvoltat formal fără apel la conceptul validității, așa cum o definiție a validității poate fi construită fără a utiliza în vreun fel ideea de teoremă. Și totuși cele două concepte se corelează în următorul fel: teoremele unui sistem modal sunt exact formulele valide ale unui sistem modal (în acord cu definiția dată validității pentru sistemul respectiv). Așadar, pentru orice formulă α e valabilă următoarea echivalență:

α este demonstrabilă în S ddacă α este o formulă validă a lui S.

Acest lucru trebuie însă demonstrat. Demonstrarea echivalenței de mai sus înseamnă demonstrarea următoarelor două teoreme:

Th. corectitudinii : Dacă $\vdash_S \alpha$, atunci $\models_S \alpha$.

Th. completitudinii: Dacă $\models_S \alpha$, atunci $\vdash_S \alpha$.

Pentru demonstrarea acestor teoreme, pentru fiecare sistem modal considerat, este necesară o definiție riguroasă a conceptului validității și a conceptelor aferente. În acest paragraf ne vom opri la conceptul modal al validității și la demonstrarea teoremelor de corectitudine; în paragraful următor vom analiza și problema completitudinii.

Vom considera mai întâi o mulțime nevidă de elemente $W = \{w, w_1, w_2, ...\}$ numită mulțimea lumilor posibile. Fir R o relație diadică, care poate să aibe sau să nu aibe loc între lumi, numită *relație de accesibilitate*. Notația wRw_1 are următorul înțeles: „lumea posibilă w_1 este accesibilă din lumea posibilă w" sau „ w_1 este o lume posibilă în raport cu w". Singura condiție impusă relației R este ca ea să fie definită pe mulțimea W a lumilor posibile. Adică pentru oricare două lumi w, w_1 din W, nu neaparat distincte, să putem spune dacă relația wRw_1 are sau nu loc. Aceste două componente, laolaltă cu ordonarea lor $\langle W, R \rangle$, alcătuiesc un *cadru*. Asignarea de valori de adevăr formulelor într-un cadru o vom face printr-o funcție *evaluare* V, adică o funcție care dă *valori logice* formulelor respective, în următorul fel: dacă într-o lume w unei variabile propoziționale p i se asignează valoarea logică *adevărat*, atunci vom scrie, corespunzător, $V(p, w) = 1$; în caz contrar $V(p, w) = 0$. Așadar, evaluarea (asignarea) este o funcție de la perechea (α, w) la o valoare de adevăr specificată. Aceste două componente laolaltă, cadrul și evaluarea în cadrul respectiv, în ordinea specificată $\langle W, R, V \rangle$ alcătuiesc un *model* (bazat pe $\langle W, R \rangle$). Dacă W este finită, atunci modelul se numește *finit*.

Să redăm riguros, definițional, conceptele necesare.

Definiția 1. Un cadru este un dublet ordonat $\langle W, R \rangle$, unde W este o mulțime nevidă de elemente (lumi) iar R este o relație diadică (de accesibilitate) definită pe mulțimea W.

Definiția 2. Un model este un triplet ordonat $\langle W, R, V \rangle$, unde $\langle W, R \rangle$ este un cadru iar V este o funcție evaluare care satisface următoarele condiții:

Cond [p]*: Pentru orice variabilă propozițională p, și pentru orice $w \in W$, fie $V(p, w) = 1$, fie $V(p, w) = 0$.*

Cond [$\neg\alpha$]*: Pentru orice formulă α și pentru orice $w \in W$, $V(\neg\alpha, w) = 1$ ddacă $V(\alpha, w) = 0$.*

Cond [$\alpha \circ \beta$]*: Pentru orice formule α, β și pentru orice $w \in W$, $V(\alpha \circ \beta, w) = V(\alpha, w) \circ V(\beta, w)$* [14].

Cond [$\Box\alpha$]*: Pentru orice formulă α și pentru orice $w \in W$, $V(\Box\alpha, w) = 1$ ddacă pentru orice $w_i \in W$, astfel că wRw_i, $V(\alpha, w_i) = 1$.*

Dacă, potrivit ultimei condiții, o formulă α este *necesar* adevărată într-o lume posibilă $w \in W$ doar dacă α este adevărată în orice lume posibilă accesibilă din w, atunci o formulă α este *posibil* adevărată într-o lume posibilă $w \in W$, respectiv $V(\Diamond\alpha, w) = 1$, doar dacă există o lume posibilă $w_i \in W$, astfel încât wRw_i și $V(\alpha, w_i) = 1$.

[14] Condițiile de adevăr ale formulelor care conțin operatorul binar „$\circ$" sunt cele din teoria funcțiilor de adevăr. De exemplu, dacă „$\circ$" este $\supset$, vom avea, corespunzător, $V((\alpha \supset \beta), w) = V(\alpha, w) \supset V(\beta, w)$, valoare strict determinată de valorile logice ale argumentelor acestei funcții, în acord cu definiția corespunzătoare. Adică $V(\alpha \supset \beta, w) = 0$ doar dacă $V(\alpha, w) = 1$ și $V(\beta, w) = 0$.

Definiția 3. O formulă α este adevărată într-o lume w, într-un model $\langle W,R,V\rangle$ ddacă $V(\alpha,w)=1$. Respectiv, dacă există $w\in W$ astfel încât $V(\alpha,w)=1$ atunci α este o formulă satisfiabilă în modelul considerat $\langle W,R,V\rangle$.

Definiția 4. O formulă α este validă într-un model $\langle W,R,V\rangle$ ddacă pentru orice $w\in W$, $V(\alpha,w)=1$. Echivalent: validitatea într-un model înseamnă adevăr în toate lumile modelului.

Definiția 5. O formulă α este validă într-un cadru $\langle W,R\rangle$ ddacă pentru orice model $\langle W,R,V\rangle$, bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle$ și pentru orice $w\in W$, $V(\alpha,w)=1$. Echivalent: validitatea într-un cadru înseamnă validitatea în orice model bazat pe cadrul respectiv.

Întrucât în logica modală propozițională validitatea este *relativă* la sistemul considerat, va trebui să definim acest concept de fiecare dată.

$\mathcal{K}$ - validitatea

Definiția 6. O formulă α este validă în sistemul $\mathcal{K}$ (sau $\mathcal{K}$ - validă) ddacă α este validă în orice cadru.

Teorema corectitudinii sistemului $\mathcal{K}$. Dacă $\vdash_{\mathcal{K}}\alpha$, atunci $\models_{\mathcal{K}}\alpha$.

Așadar, *orice formulă demonstrabilă în sistemul $\mathcal{K}$ este o formulă validă a sistemului $\mathcal{K}$*. În acord cu Definiția 6 va trebui să demonstrăm că orice formulă deductibilă în $\mathcal{K}$ este o formulă *validă în orice cadru*. Ceea ce trebuie de fapt demonstrat se rezumă la următoarele două leme:

Lema 1. Axiomele sistemului $\mathcal{K}$ sunt valide în orice cadru.

Lema 2. Regulile de deducție ale sistemului $\mathcal{K}$ conservă validitatea în orice cadru.

A demonstra *Lema 1* înseamnă a demonstra că:

a) Toate formulele valide ale $\mathcal{L}_p$ sunt valide în orice cadru.

b) Axioma **K** este validă în orice cadru.

Demonstrația lui a) este elementară. Căci dacă o formulă validă a $\mathcal{L}_p$, într-o lume *w*, este o formulă adevărată pentru orice categorie de asignări făcută variabilelor sale, fără referire la vreo altă lume, rezultă că o astfel de formulă este validă în orice lume, în orice model (i.e. este o formulă validă în orice cadru).

Demonstrația lui b) **K**: $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$ este validă în orice cadru. Considerăm un model arbitrar $\langle W,R,V\rangle$ bazat pe un cadru arbitrar $\langle W,R\rangle$ și o lume oarecare $w\in W$. Presupunem că $V(\Box(p\supset q),w)=1$ și $V(\Box p,w)=1$. Atunci, dacă wRw_i are loc, pentru $w_i\in W$, vom avea: $V(p\supset q,w_i)=1$ și $V(p,w_i)=1$. Și deci $V(q,w_i)=1$ (căci dacă $p\supset q$ și p sunt adevărate într-o lume w_i, atunci și q este adevărată în w_i). De unde deducem că $V(\Box q,w)=1$. Și deci **K** este validă în orice cadru.

Același rezultat îl obținem, firește, și prin următoarea demonstrație a lui b) prin *reductio ad absurdum.*

Presupunem că $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$ nu este validă în orice cadru $\langle W,R\rangle$. Există așadar un cadru $\langle W,R\rangle$ și un model $\langle W,R,V\rangle$, bazat pe acest cadru, în care pentru o lume posibilă $w\in W$:

$V(\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q),w)=0$, ceea ce înseamnă:

1. $V(\Box(p \supset q),w)=1$ şi 2. $V(\Box p \supset \Box q,w)=0$

Însă falsitatea formulei 2 în w înseamnă 2a $V(\Box p,w)=1$ şi 2b $V(\Box q,w)=0$. Din 2b deducem că există o lume $w_i \in W$, astfel că wRw_i şi $V(q,w_i)=0$. Iar din 2a deducem că $V(p,w_i)=1$ pentru *orice* $w_i \in W$, astfel că wRw_i. Şi deci, în acord cu *Cond* $[\alpha \circ \beta]$, vom avea $V(p \supset q,w_i)=0$ şi deci $V(\Box(p \supset q),w)=0$, ceea ce contrazice 1.

A demonstra *Lema 2* înseamnă a demonstra că: a) **Subst**, b) **MP** şi c) **N** conservă validitatea în orice cadru.

Demonstraţii:

a) **Subst** conservă validitatea în orice cadru.

Reductio ad absurdum. Presupunem că $\alpha(p_1,\ldots,p_k)$ este o formulă deductibilă în $\mathcal{K}$ şi că este o formulă validă a lui $\mathcal{K}$. Trebuie să arătăm că şi formula $\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)$, obţinută din α prin substituţiile indicate, este de asemenea validă. Vom arăta acest lucru arătând că dacă există un model în care $\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)$ este falsă, atunci şi formula iniţială α este falsă (i.e. nevalidă), cu condiţia că variabilelor care au fost substituite le asignăm aceleaşi valori de adevăr ca valorile asignate formulelor cu care le-am substituit. Presupunem aşadar un cadru $\langle W,R\rangle$ în care α este o formulă validă iar $\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k)$ este nevalidă. Există aşadar un model $\langle W,R,V\rangle$, bazat pe $\langle W,R\rangle$, astfel că pentru o lume $w^* \in W$, $V(\alpha(p_1/\beta_1,\ldots,p_k/\beta_k),w^*)=0$. Fie acum un model $\langle W,R,V^*\rangle$, bazat pe acelaşi cadru, iar V^* o funcţie evaluare la fel ca V cu singura specificare că prin V^* p_i ia în w exact aceeaşi valoare de adevăr ca valoarea pe care β_i o ia în w prin V. Adică

$V^*(p_i,w)=V(\beta_i,w)$, pentru orice $1 \le i \le k$, şi

$V^*(q,w)=V(q,w)$, pentru orice variabilă propoziţională q, alta decât p_i.

În acest caz $V^*(\alpha,w^*)=0$ şi deci α este nevalidă în $\langle W,R\rangle$.

b) **MP** conservă validitatea în orice cadru. Demonstraţia se bazează pe *Cond* $[\alpha \circ \beta]$. Căci dacă α şi $\alpha \supset \beta$ sunt valide într-un cadru $\langle W,R\rangle$, înseamnă că cele două formule sunt adevărate în orice $w \in W$ în orice model bazat pe $\langle W,R\rangle$, caz în care şi β este adevărată. Aşadar, β este validă. Şi deci **MP** conservă validitatea într-un cadru arbitrar. (Construiţi o demonstraţie prin reducere la absurd a b)).

c) **N** conservă validitatea în orice cadru. Presupunem că α este validă într-un cadru arbitrar $\langle W,R\rangle$. Rezultă că α este adevărată în orice $w \in W$ în orice model bazat pe $\langle W,R\rangle$. Şi deci pentru orice $w_i \in W$ astfel că wRw_i, $V(\alpha,w_i)=1$. Aşadar, $V(\Box\alpha,w)=1$ şi deci $\Box\alpha$ este validă în $\langle W,R\rangle$.

Remarcă 1. În toate teoremele de corectitudine ale sistemelor $\mathcal{K}$ - $\mathcal{GL}$ ne vom referi la validitatea unei formule într-un *cadru* $\langle W,R\rangle$ şi la faptul că regulile de deducţie conservă validitatea în *cadrul* respectiv. Acest lucru este foarte important, căci din faptul că o formulă este validă într-un model nu rezultă, de exemplu, că orice formulă obţinută din aceasta prin aplicarea regulii substituţiei este de asemenea validă în modelul respectiv. Să presupunem modelul $\langle W,R,V\rangle$ astfel că $V(p,w)=1$ pentru orice $w \in W$. Să presupunem substituţia *p/q* şi că $V(q,w)=0$ pentru orice $w \in W$. În acest caz, evident, formula obţinută prin substituţie este

nevalidă în modelul considerat. În schimb, aşa cum am arătat prin *Lema 2*, dacă α este o formulă validă într-un *cadru* $\langle W, R\rangle$, atunci orice formulă obținută prin aplicarea **Subst** din formula α este o formulă validă în $\langle W, R\rangle$.

Remarcă 2. Cum sistemele $\mathcal{T}$ - $\mathcal{GL}$ sunt toate extensii *proprii* ale sistemului $\mathcal{K}$, pentru demonstrarea corectitudinii lor este suficient să arătăm că axioma sau axiomele proprii acestor sisteme sunt valide în raport cu conceptul validității specific acestui sistem.

$\mathcal{T}$ - validitatea

Nu orice formulă a logicii modale propoziționale este o formulă validă în orice cadru, adică o formulă $\mathcal{K}$-validă. Să considerăm în cele ce urmează axioma sistemului modal $\mathcal{T}$, **T**: $\Box p \supset p$, în două exemple în care formula este validă şi încă unul în care formula este nevalidă.

1. Fie $\langle W,R,V\rangle$ un model bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle$, astfel că: $W=\{w,w_1\}$, au loc relațiile wRw_1, w_1Rw, wRw, w_1Rw_1 şi că $V(p,w)=1$. În acest exemplu $V(\Box p \supset p, w)=1$, indiferent de valoarea logică a propoziției p în w_1 (de ce?).
2. Presupunem modelul din 1 cu singura excepție că $V(p,w)=0$. Şi în acest caz $V(\Box p \supset p, w)=1$ (similar pct. 1).
3. Vom arăta acum că formula **T**: $\Box p \supset p$ nu este $\mathcal{K}$-validă, arătând că există un cadru $\langle W,R\rangle$ în care **T** nu este validă. Adică există un model $\langle W,R,V\rangle$, bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle$, şi o lume $w\in W$ astfel că $V(\Box p \supset p, w)=0$. Să construim un asemenea model.

Fie următoarele determinații: $W=\{w,w_1\}, wRw_1$, w_1Rw, w_1Rw_1 şi *non* wRw (adică relația wRw nu are loc), $V(p,w)=0$ şi $V(p,w_1)=1$. În acest caz $V(\Box p,w)=1$, pentru că din w este accesibilă doar w_1 şi nicidecum w (prin supoziția *non* wRw). În felul acesta, $V(\Box p \supset p, w)=0$.

Comparând exemplele 1 şi 2 cu 3 putem sesiza sursa nevalidității acestei formule în sistemul modal $\mathcal{K}$: relația R nu are loc ca relație a unei lumi cu ea însăşi.

$\langle W, R\rangle$ este un cadru *reflexiv* dacă orice lume din W poartă relația R cu sine; simbolic $\langle W,R\rangle_{refl} =_{df} \forall w\in W : wRw$.

Definiția 7. O formulă α este validă în sistemul $\mathcal{T}$ (sau $\mathcal{T}$- validă) ddacă α este validă în orice cadru reflexiv.

Prin demonstrarea validității axiomei **T**: $\Box p \supset p$ în orice cadru reflexiv am demonstrat corectitudinea sistemului $\mathcal{T}$.

Teorema corectitudinii sistemului $\mathcal{T}$. Dacă $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$, atunci $\models_{\mathcal{T}} \alpha$.

Altfel spus, orice formulă demonstrabilă în sistemul $\mathcal{T}$ este o formulă $\mathcal{T}$-validă (i.e. validă în orice cadru reflexiv).

$\mathcal{D}$ - validitatea

Sistemul modal $\mathcal{D}$, aşa cum am văzut în 4.1.2, se obține din sistemul $\mathcal{K}$ prin adăugarea axiomei **D**: $\Box p \supset \Diamond p$, reprezentând deci o extensie proprie a lui $\mathcal{K}$. Cu privire la $\mathcal{K}$, am văzut că teoremele lui sunt formule valide în orice cadru. Să presupunem acum un cadru $\langle W,R\rangle$, astfel încât W conține o lume w care nu poartă relația R cu nici o altă lume

(diferită sau identică cu ea). O astfel de lume $w \in W$, pentru care *non* wRw_i, pentru orice $w_i \in W$, se numeşte „punct mort" [15]. Cum se comportă axioma **D** într-un asemenea cadru?

Putem răspunde cu uşurinţă dacă determinăm valoarea de adevăr a formulelor modalizate $\Box p$ şi $\Diamond p$ în raport cu un punct mort. Prin *Cond* [$\Box\alpha$] $V(\Box p,w)=1$ ddacă p este adevărată în *orice* $w_i \in W$, pentru care wRw_i are loc. Dacă w nu are o astfel de relaţie cu nici o $w_i \in W$ (deci nici cu ea însăşi!), atunci $\Box p$ este trivial adevărată în w. Pe de altă parte, conform condiţiei de adevăr pentru formulele de genul $\Diamond\alpha$, $V(\Diamond p,w)=1$ ddacă *există* o lume $w_i \in W$, astfel încât wRw_i şi $V(p,w_i)=1$. Cum o astfel de lume *nu* există, rezultă că $V(\Box p \supset \Diamond p,w)=0$.

Remarcă. Faptul că în w $\Box p$ este adevărată poate fi argumentat şi arătând că negaţia acestei formule $\neg\Box p$ este falsă în w. Simplu, căci $\neg\Box p$ este $\Diamond\neg p$ (prin **Intersch**), iar $\Diamond\neg p$ este adevărată ddacă există o lume $w_i \in W$, astfel încât wRw_i şi $V(\neg p, w_i)=1$. Or, o astfel de lume nu există.

Validitatea axiomei **D** reclamă aşadar cadre $\langle W,R\rangle$ în care fiecare lume are relaţia R cu cel puţin o lume. Aceste cadre se numesc *seriale* (i.e. R este serială). Simbolic: $\langle W,R\rangle_{ser} =_{df} \forall w \in W \quad \exists w_i \in W : wRw_i$.

Definiţia 8. O formulă α este validă în sistemul 𝒟 (sau 𝒟-validă) ddacă α este validă în orice cadru serial.

Teorema corectitudinii sistemului 𝒟. Dacă $\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$, *atunci* $\models_{\mathcal{D}} \alpha$.

𝒦4 - validitatea

Sistemul modal 𝒦4, am văzut, se obţine din sistemul modal 𝒦 plus axioma

4: $\Box p \supset \Box\Box p$.

Definiţia 9. O formulă α este validă în sistemul modal 𝒦4 (sau 𝒦4 - validă) ddacă α este validă în orice cadru tranzitiv.

Teorema corectitudinii sistemului 𝒦4 : Dacă $\vdash_{\mathcal{K}4} \alpha$, *atunci* $\models_{\mathcal{K}4} \alpha$.

$\langle W,R\rangle_{trans} =_{df} \forall w \forall w_1 \forall w_2 [(wRw_1 \wedge w_1Rw_2) \supset wRw_2]$

Pentru a demonstra corectitudinea sistemului 𝒦4 este suficient, aşa cum am procedat mai sus, să arătăm că axioma **4** nu poate fi falsificată pe un cadru tranzitiv.

Demonstraţie. Presupunem contrariul: există un cadru tranzitiv $\langle W,R\rangle$ şi un model $\langle W,R,V\rangle$ bazat pe acest cadru, astfel încât pentru o lume $w \in W$, $V(\Box p \supset \Box\Box p,w)=0$. Ceea ce înseamnă: 1. $V(\Box p,w)=1$ şi 2. $V(\Box\Box p,w)=0$. Din 2 deducem, prin *Cond* [$\Box\alpha$] că există o lume $w_1 \in W$, astfel că wRw_1 şi 3. $V(\Box p, w_1)=0$. Din 3 deducem că există o lume w_2, astfel că w_1Rw_2 şi 4. $V(p, w_2)=0$. Întrucât R este tranzitivă (prin presupoziţie), avem wRw_2 şi deci din 1 $V(p, w_2)=1$, ceea ce contrazice 4.

S4 - validitatea

Cum *S4* este $\mathcal{K}+\mathbf{T}+\mathbf{4}$ rezultă că R este reflexivă şi tranzitivă. Avem aşadar:

Definiţia 10. O formulă α este validă în sistemul S4 (sau S4 - validă) ddacă α este validă în orice cadru reflexiv şi tranzitiv.

---

[15] Numele de „punct mort", „capăt mort" (*dead end*) are ca sursă K. Segerberg, *An Essay in Classical Modal Logic* (3 vol), Upsala, 1971.

Teorema corectitudinii sistemului S4. Dacă $\vdash_{S4} \alpha$, *atunci* $\models_{S4} \alpha$.

Teorema rezultă din teoremele corespunzătoare sistemelor *T* şi *K4*.

S5 - validitatea

Sistemul modal *S5* se constituie din sistemul modal *T* plus axioma **5** (sau axioma E[16]): $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$. Mai sus am arătat că T: $\Box p \supset p$ este validă în orice cadru reflexiv. Mai trebuie să arătăm în ce condiţii $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ este o formulă validă. Mai exact, vom arăta că validitatea acestei axiome reclamă condiţiile simetriei şi tranzitivităţii relaţiei *R*. Împreună cu condiţia reflexivităţii lui *R* (condiţie a validităţii lui T) conchidem că *R* trebuie să fie o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 11. O formulă α este validă în sistemul S5 (sau S5 - validă) ddacă α este validă în orice cadru reflexiv, simetric şi tranzitiv (i.e. cadru de echivalenţă).

Teorema corectitudinii sistemului S5. Dacă $\vdash_{S5} \alpha$, *atunci* $\models_{S5} \alpha$.

Tot ceea ce trebuie să facem este să arătăm că **5** nu poate fi falsificată într-un cadru simetric şi tranzitiv.

Demonstraţie: Presupunem contrariul. Rezultă că există un model $\langle W, R, V\rangle$ bazat pe un cadru $\langle W, R\rangle$ simetric şi tranzitiv, astfel că pentru o lume $w \in W$, $V(\Diamond p \supset \Box\Diamond p, w) = 0$. Şi deci 1. $V(\Diamond p, w) = 1$ şi 2. $V(\Box\Diamond p, w) = 0$. Din 1 deducem că există o lume $w_1 \in W$, astfel că wRw_1 şi 3. $V(p, w_1) = 1$. Iar din 2 deducem că există $w_2 \in W$, astfel că wRw_2 şi 4. $V(\Diamond p, w_2) = 0$. Însă din wRw_2 deducem w_2Rw (prin simetrie). Iar prin tranzitivitate, din w_2Rw şi wRw_1 deducem w_2Rw_1. Din w_2Rw_1 şi 4 deducem $V(p, w_1) = 0$, ceea ce contrazice 3.

B - validitatea

Sistemul modal *B* este, am văzut în 4.1.2, sistemul *T* plus axioma **B**: $p \supset \Box\Diamond p$.

Definiţia 12. O formulă α este validă în sistemul B (sau B-validă) ddacă α este validă în orice cadru reflexiv şi simetric.

Ca mai sus, în *S5*, reflexivitatea lui *R* este cerută de axioma **T**.

$\langle W, R\rangle_{sim} =_{df} \forall w \forall w_1 (wRw_1 \supset w_1Rw)$

Teorema corectitudinii sistemului B. Dacă $\vdash_{B} \alpha$, *atunci* $\models_{B} \alpha$.

Trebuie să arătăm că **B**: $p \supset \Box\Diamond p$ este validă în orice cadru simetric.

Demonstraţie: Fie $\langle W, R\rangle$ un cadru simetric arbitrar. Fie $\langle W, R, V\rangle$ un model bazat pe acest cadru. Fie $w \in W$ astfel că $V(p, w) = 1$. Fie $w^* \in W$ o lume arbitrară, astfel că wRw^*. Din simetria lui *R* deducem w^*Rw iar fiindcă $V(p, w) = 1$ rezultă că $V(\Diamond p, w^*) = 1$. Însă w^* este o lume *arbitrară* din *W*, prin urmare $V(\Diamond p, w^*) = 1$ pentru *orice* $w^* \in W$ astfel că wRw^*. Şi deci $V(\Box\Diamond p, w) = 1$. Aşadar, dacă *R* este simetrică, atunci de oricâte ori *p* este adevărată într-o lume şi $\Box\Diamond p$ este adevărată în acea lume. Şi deci **B** nu poate fi falsificată într-un cadru simetric.

GL - validitatea

Sistemul modal *GL* se obţine din sistemul modal *K* plus axioma **W**: $\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p$.

Definiţia 13. O formulă α este validă în sistemul GL (sau GL-validă) ddacă α este validă în orice cadru ireflexiv şi tranzitiv.

[16] Numele „E" face referire la condiţia impusă lui R: *euclidiană* (Cf. Lemmon şi Scott, op. cit.). În 4.2.2. vom vorbi despre *S5* din această perspectivă.

Teorema corectitudinii sistemului $\mathcal{GL}$. Dacă $\vdash_{\mathcal{GL}} \alpha$, atunci $\models_{\mathcal{GL}} \alpha$.

Demonstrație (exercițiu): se face după modelul celor precedente (i.e. se presupune un cadru $\langle W, R\rangle$ ireflexiv și tranzitiv și se deduce că W este validă).

4.2.2. Verificarea validității formulelor în sistemul modal $S5$

În $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$, am văzut mai sus, o formulă α este S-validă ddacă pentru orice S-cadru $\langle W, R\rangle$ și pentru orice model $\langle W, R, V\rangle$ bazat pe cadrul respectiv $V(\alpha, w)=1$, pentru orice $w \in W$. Dar n-am indicat nici un procedeu astfel încât dată fiind o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$ să putem spune dacă sau nu ea este S-validă. Vom încheia acest paragraf cu un exemplu în acest sens. Mai precis, vom expune un procedeu elegant de testare a validității formulelor în sistemul modal $S5$. Este vorba despre procedeul formelor normale conjunctive[17].

Definiția 1[18]*. Prin formule elementare ale logicii modale a propozițiilor înțelegem:*

a) Orice formulă a $\mathcal{L}_p$.

b) Orice formulă de forma $\Box\alpha$, unde α este o formulă a $\mathcal{L}_p$.

c) Orice formulă de forma $\Diamond\alpha$, unde α este o formulă a $\mathcal{L}_p$.

Definiția 2. O formulă α de logică modală propozițională este în forma normală conjunctivă (simbolic: F_c) dacă are forma unei conjuncții $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ $(k \geq 1)$, în care fiecare conjunct are forma unei disjuncții de formule elementare (atomare) [19].

Exemple de formule aflate în F_c: p, $q \wedge \Diamond r$, $(p \vee \Diamond q) \wedge (\Box p \vee r)$, $(\Box(p \supset (q \wedge \neg r) \vee \Diamond q)) \wedge (\Diamond p \vee \Box\neg p)$.

Definiția 3. Gradul modal al unei formule:

a) O variabilă propozițională este de gradul 0.

b) Dacă α este de gradul n, atunci $\neg\alpha$ este de gradul n.

c) Dacă α este de gradul n iar β este de gradul m, atunci dacă $n \geq m$, gradul formulei $(\alpha \circ \beta)$ este n; în caz contrar m.

d) Dacă α este de gradul n, atunci $\Box\alpha$ este de gradul $n+1$.

Așadar, orice formulă a $\mathcal{L}_p$ este de gradul 0, iar negația nu schimbă gradul modal al unei formule. Exemple de formule de gradul *întâi*: $\Box p \supset p$, $(r \vee \Diamond p)$ / $(\Box p \vee \Diamond q)$. În schimb, formula $\Box(p \supset \Diamond p)$ este de gradul *doi*. Deci: o formulă de gradul întâi poate conține unul sau mai mulți operatori modali, însă nici unul nu trebuie să se afle în domeniul vreunui operator modal.

Remarcă. Gradul modal n al unei formule nu trebuie confundat cu ideea de modalitate cu n operatori modali.

Exemplu: fie formulele $\alpha = \Box\Diamond\Diamond\Box(p \supset \Diamond q)$ și $\beta = \Box\Diamond[(p \supset \Box\Box q) \wedge \Diamond r] \vee \Box p$. Ambele sunt formule de gradul 5, însă α are o modalitate de gradul 4, pe când în β cea mai mare modalitate are gradul 2. Deci: Orice formulă care conține o modalitate cu n operatori are gradul modal $\geq n$. Pe când o formulă poate fi de gradul n fără a avea vreo modalitate cu n operatori modali.

Pentru a vedea modul în care formele normale conjunctive funcționează ca metodă de verificare a validității unei formule modale în sistemul $S5$, demonstrăm mai întâi două *teoreme de reducere* cu privire la acest sistem.

---

[17] Metodele de testare a validității formulelor în diferitele sisteme modale nu fac obiectul acestui volum.

[18] Definițiile 1,2,3 explicitează conceptele corespunzătoare, așa cum sunt ele operante în aplicarea formelor normale în $S5$.

[19] Comp. 2.1.4.4.

Teorema de reducere 1. Orice formulă de grad mai mare decât 1 este reductibilă în sistemul modal S5 la o formulă de gradul întâi.

Pentru demonstrarea acestei teoreme este suficient să arătăm cum o formulă de gradul doi se reduce la una de gradul întâi (fiindcă aplicarea iterată a acestui procedeu permite transformarea oricărei formule, de orice grad mai mare decât doi, într-o formulă de gradul întâi). Reducerea este simplă şi se bazează pe relaţii de echivalenţă: echivalenţele din $\mathcal{L}_p$, **Intersch**, teoremele $\mathbf{K_4}$ şi $\mathbf{K_6}$ (cu privire la distributivitatea operatorului $\Box$, respectiv $\Diamond$, în raport cu $\wedge$, respectiv $\vee$), $\mathbf{S4_1}$ şi $\mathbf{S4_3}$, $\mathbf{S5_2}$, $\mathbf{S5_3}$, $\mathbf{S5_4}$, $\mathbf{S5_5}$, $\mathbf{S5_6}$ şi $\mathbf{S5_7}$. Algoritmul reducerii unei formule de gradul doi la o formulă de gradul întâi are următorii paşi:

1. Eliminarea, prin transformări echivalente (echiveridice), a tuturor operatorilor $\mathcal{L}_p$, alţii decât $\neg$, $\wedge$ şi $\vee$. (Formula trebuie să conţină aşadar numai operatorii $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\wedge, \vee$).
2. Eliminarea negaţiilor din faţa operatorilor modali sau a parantezelor care conţin operatori modali.
3. Reducerea modalităţilor iterate la modalităţi cu un singur operator modal.
4. Distribuirea reciprocă a operatorilor $\wedge$ şi $\vee$, în cazul în care formula obţinută prin paşii 1-3 nu este o formulă de gradul întâi. *Exemplu*: fie formula: $\Diamond(\neg p \wedge (q \vee \Box r))$. În această formulă, pe $\Diamond$ nu-l mai putem distribui în raport cu $\wedge$ deoarece nici unul din conjuncţii nu este modalizat. Pentru a-l putea distribui, transformăm formula care constituie domeniul acestui operator: $\Diamond(\neg p \wedge (q \vee \Box r)) \equiv \Diamond((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \Box r)) \equiv \Diamond(\neg p \wedge q) \vee \Diamond(\neg p \wedge \Box r)) \equiv \Diamond(\neg p \wedge q) \vee (\Diamond\neg p \wedge \Box r)$. Similar procedăm cu operatorul $\Box$, cu observaţia că domeniul acestui operator conţine o disjuncţie în care aici un disjunct nu este modalizat (construiţi un exemplu).

Exemplu de reducere a unei formule modale la o formulă de gradul întâi:

$\alpha = \Box[\Box(\Box p \supset \Diamond q) \supset \Diamond(p \supset q)]$

1. $\Box[\neg\Box(\neg\Box p \vee \Diamond q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)]$
2. $\Box[\Diamond\neg(\Diamond\neg p \vee \Diamond q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)]$

   $\Box[\Diamond(\neg\Diamond\neg p \wedge \neg\Diamond q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)]$

   $\Box[\Diamond(\Box p \wedge \Box\neg q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)]$
3. $\Diamond(\Box p \wedge \Box\neg q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)$

   $\Diamond\Box(p \wedge \neg q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)$

   $\Box(p \wedge \neg q) \vee \Diamond(\neg p \vee q)$

Teorema de reducere 2. Orice formulă poate fi redusă în sistemul modal S5 la forma normală conjunctivă (modală) (F_c), echivalentă cu ea.

Demonstraţia acestei teoreme o facem indicând, în funcţie de tipul formulei considerate, modul în care obţinem F_c.

1. Dacă formula a nu conţine operatori modali (este deci o formulă a $\mathcal{L}_p$), atunci a este deja în F_c (prin definiţie).

2. Dacă a este o formulă de gradul întâi, atunci, prin transformări echiveridice în $\mathcal{L}_p$, aducem formula la forma normală conjunctivă şi înlocuim expresiile de forma $\neg\Box$ şi $\neg\Diamond$ cu $\Diamond\neg$ şi $\Box\neg$ (adică eliminăm, prin **Intersch**, negaţiile din faţa operatorilor modali).

3. Dacă α este o formulă al cărei grad este mai mare decât 1, atunci mai întâi o reducem la o formulă de gradul întâi, apoi procedăm ca în 2.

Exemplu: Fie $\alpha = \Box[\Box(\Box p \supset \Box q) \supset \Box(p \supset q)]$

$\Box[\neg\Box(\neg\Box p \vee \Box q) \vee \Box(p \supset q)]$

$\Box[\Diamond\neg(\Diamond\neg p \vee \Box q) \vee \Box(\neg p \vee q)]$

$\Box[\Diamond(\neg\Diamond\neg p \wedge \neg\Box q) \vee \Box(\neg p \vee q)]$

$\Box[\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box(\neg p \vee q)]$

$\Box[(\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Diamond\neg q) \vee \Box(\neg p \vee q)]$

$\Box[(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box(\neg p \vee q)]$

$\Box(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box\Box(\neg p \vee q)$

$(\Box\Box p \wedge \Box\Diamond\neg q) \vee \Box\Box(\neg p \vee q)$

$(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box(\neg p \vee q)$

$[\Box p \vee \Box(\neg p \vee q)] \wedge [\Diamond\neg q \vee \Box(\neg p \vee q)]$

Conform definiției F_c, forma normală conjunctivă a unei formule α este o conjuncție în care fiecare conjunct este o disjuncție de formule elementare. Pentru o elegantă aplicare a formelor normale conjunctive în verificarea validității unei formule modale în *S5* vom ordona formula α, ordonând fiecare conjunct al acestei formule redusă la F_c, în felul următor:

$C_i = \beta \vee \Box\gamma_1 \vee \ldots \vee \Box\gamma_n \vee \Diamond\delta_1 \vee \ldots \vee \Diamond\delta_m$

unde β, γ_i, δ_j sunt formule ale $\mathcal{L}_p$. Așadar, primul disjunct este o formulă nemodală, următorii n disjuncți sunt formule elementare modalizate în $\Box$ iar ceilalți sunt formule elementare modalizate în $\Diamond$. Însă, cum $\Diamond$ este distributiv în raport cu $\vee$ (cf. $\mathbf{K}_6$), formula de mai sus devine:

$C_i = \beta \vee \Box\gamma_1 \vee \ldots \vee \Box\gamma_n \vee \Diamond(\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_m)$, respectiv

$C_i = \beta \vee \Box\gamma_1 \vee \ldots \vee \Box\gamma_n \vee \Diamond\delta$ (forma ordonată).

Așadar, în orice formulă adusă la $F_c: C_i = C_1 \wedge \ldots \wedge C_l$, fiecare conjunct $C_i(1 \leq i \leq l)$ poate fi adus în forma ordonată de mai sus.

Verificarea validității unei formule aduse în F_c

Evident, o formulă α în forma normală conjunctivă este validă ddacă fiecare conjunct este o formulă validă. Pentru a verifica dacă un conjunct arbitrar C_i este valid vom construi $n+1$ disjuncții distincte ale $\mathcal{L}_p$ în care un argument este formula δ a $\mathcal{L}_p$, iar celălalt argument este una din formulele $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, adică: $\beta \vee \delta, \gamma_1 \vee \delta, \ldots, \gamma_n \vee \delta$. Fie $D_j(1 \leq j \leq n+1)$ un disjunct arbitrar. Atunci

$\models_{S5} C_i$ *ddacă* $\models_{\mathcal{L}_p} D_j$, *pentru cel puțin un* $1 \leq j \leq n+1$

adică, C_i este o formulă validă a sistemului modal *S5* ddacă cel puțin una din cele $n+1$ disjuncții de mai sus este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Așadar, α este o formulă validă în *S5* ddacă fiecare conjunct este valid în modul indicat mai sus. În cazul în care un conjunct oarecare nu conține formula elementară $\Diamond\delta$, ceea ce ne rămâne de verificat este dacă cel puțin una din formulele $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ este validă.

Exemplu: Să vedem, cu ajutorul formelor normale conjunctive, dacă α este o formulă validă sau nu.

$$\alpha = \Box[\Box(p \supset \Box p) \supset \Box p] \supset (\Diamond\Box p \supset \Box p)$$
$$\neg\Box[\neg\Box(\neg p \vee \Box p) \vee \Box p] \vee (\neg\Diamond\Box p \vee \Box p)$$
$$\neg\Box[\Diamond\neg(\neg p \vee \Box p) \vee \Box p] \vee (\Box\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$\Diamond\neg[\Diamond\neg(\neg p \vee \Box p) \vee \Box p] \vee (\Box\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$\Diamond[\neg\Diamond\neg(\neg p \vee \Box p) \wedge \neg\Box p] \vee (\Box\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$\Diamond[\Box(\neg p \vee \Box p) \wedge \Diamond\neg p] \vee (\Box\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$[\Diamond\Box(\neg p \vee \Box p) \wedge \Diamond\Diamond\neg p] \vee (\Box\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$[\Box(\neg p \vee \Box p) \wedge \Diamond\neg p] \vee (\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$[(\Box\neg p \vee \Box p) \wedge \Diamond\neg p] \vee (\Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$(\Box\neg p \vee \Box p \vee \Diamond\neg p \vee \Box p) \wedge (\Diamond\neg p \vee \Diamond\neg p \vee \Box p)$$
$$(\Box\neg p \vee \Box p \vee \Diamond\neg p) \wedge (\Diamond\neg p \vee \Box p)$$

α în F_c are doi conjuncți. În fiecare conjunct putem construi, în acord cu cele spuse mai sus, câte o disjuncție a $\mathcal{L}_p$, $p \vee \neg p$. Aşadar, α este o formulă validă în $S5$.

În fine, va trebui să arătăm că procedeul mai sus indicat, cel al verificării validității unei formule cu ajutorul formelor normale conjunctive, este unul *adecvat*. Cu alte cuvinte, trebuie să argumentăm că dacă o formulă este *validă în $S5$*, atunci validitatea ei este *verificabilă* prin procedeul descris. Sau, echivalent (prin contrapoziție), dacă validitatea formulei nu este verificabilă prin procedeul descris (i.e. nu este conformă procedeului), atunci nu este o formulă validă a sistemului $S5$. Să vedem acest lucru.

Validitatea unei formule α în F_c înseamnă, am văzut mai sus, validitatea fiecărui conjunct. Presupunem că un conjunct arbitrar, C_i, nu este verificabil prin procedeul descris, adică presupunem că nici una din cele $n+1$ disjuncții ($\beta \vee \delta, \gamma_1 \vee \delta, \ldots, \gamma_n \vee \delta$) nu este o formulă validă a $\mathcal{L}_p$. Vom arăta că în acest caz nici conjunctul C_i nu este valid în $S5$. În acord cu conceptul $S5$-validității, formula C_i este $S5$-validă ddacă este validă pe orice cadru reflexiv, simetric şi tranzitiv. Pentru demonstrarea nevalidității lui C_i în $S5$ este suficient să construim un model $\langle W, R, V\rangle$, bazat pe $S5$-cadrul $\langle W, R\rangle$ în care C_i este fals. Cum construim un asemenea model:

$W = \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$; mulțimea W conține $n+1$ lumi posibile, pe care le asociem, în ordine, celor $n+1$ disjuncții ale $\mathcal{L}_p$.

R = relația de accesibilitate, devine dispensabilă prin asumpția: wRw_i are loc pentru *orice* $w, w_i \in W$.

V = funcția evaluare o definim astfel încât fiecare disjuncție, în lumea care-i corespunde, ia valoarea logică fals, adică

1. $V(\beta \vee \delta, w_0) = 0$
2. $V(\gamma_i \vee \delta, w_i) = 0$, pentru orice $1 \le i \le n$.

Din 1. deducem că $V(\beta, w_0) = 0$ şi $V(\delta, w_0) = 0$.

Din 2. deducem a) $V(\gamma_i, w_i) = 0$ şi deci $V(\Box\gamma_i, w_0) = 0$ (întrucât pentru orice i există o lume (w_i) în care γ_i este falsă) şi b) $V(\delta, w_i) = 0$, pentru orice i (δ este deci falsă în toate lumile posibile), şi astfel $V(\Diamond\delta, w_0) = 0$. Din 1. şi 2. laolaltă deducem aşadar: $V(\beta, w_0) = 0$,

$V(\Box\gamma_i, w_0)=0$ şi $V(\Diamond\delta, w_0)=0$. Aşadar, fiecare disjunct din C_i ia valoarea logică fals în modelul astfel construit şi astfel C_i nu este $S5$-valid.

Remarci. **1.** Modele de acest gen, în care un conjunct este fals, pot fi construite pentru orice fel de conjunct. Dacă C_i nu conţine, de exemplu, formula β (adică o formulă a $\mathcal{L}_p$), atunci din W se omite w_0 şi se arată că $V(C_i, w_i)=0$, unde w_i poate fi orice lume din W (fără w_0). Dacă C_i nu conţine formule elementare $\Box\gamma$, atunci din W se omit lumile posibile $w_1 ... w_{n+1}$. Iar dacă C_i nu conţine formule $\Diamond\delta$, atunci nevaliditatea lui C_i în w_0 înseamnă nevaliditatea formulelor $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n$.

2. Procedeul mai sus descris, cel al formelor normale conjunctive, nu este aplicabil oricărui sistem modal, deoarece nu în orice sistem modal orice formulă modală este echivalentă cu forma ei normală conjunctivă. Însă, aplicat la $S5$, acest procedeu are valenţe incontestabile: nu numai că permite verificarea validităţii unei formule în $S5$, dar reprezintă totodată şi o elegantă demonstraţie de completitudine pentru $S5$. Adică, dacă α este o formulă validă a lui $S5$ procedeul formelor normale conjunctive ne permite şi construirea *efectivă* a unei demonstraţii în $S5$ a formulei α (construind o demonstraţie pentru fiecare conjunct şi legând prin conjuncţie toate aceste demonstraţii). În felul acesta procedeul este şi unul de *decizie* pentru $S5$. Deşi problema completitudinii face obiectul paragrafului 4.3.3, vom încheia cu câteva consideraţii cu privire la demonstrarea completitudinii sistemului $S5$ cu ajutorul formelor normale conjunctive.

Teorema de completitudine pentru $S5$

Dacă $\models_{S5}\alpha$, *atunci* $\vdash_{S5}\alpha$,

adică *orice formulă validă a sistemului $S5$ este o teoremă a sistemului $S5$*.

Cum validitatea formulei α înseamnă validitatea tuturor conjuncţilor ei, vom reformula teorema de completitudine în raport cu un conjunct arbitrar, adică

Dacă $\models_{S5}C_i$, atunci $\vdash_{S5}C_i$.

Însă validitatea lui C_i în $S5$ înseamnă, în raport cu procedeul mai sus descris, a) $\models_{\mathcal{L}_p}\beta\vee\delta$ sau b) $\models_{\mathcal{L}_p}\gamma_i\vee\delta$. Să luăm pe rând cele două situaţii. Presupunem a) $\models_{\mathcal{L}_p}\beta\vee\delta$. Rezultă că $\beta\vee\delta$ este o teoremă a lui $S5$ (deoarece toate formulele valide ale $\mathcal{L}_p$ sunt teoreme ale sistemului $\mathcal{K}$ şi deci şi teoreme ale lui $S5$). Construim, plecând de la acest fapt, o demonstraţie în $S5$ a lui C_i.

1. $\beta\vee\delta$
2. $p\supset\Diamond p$; $\mathbf{T_1}$
3. $\delta\supset\Diamond\delta$; 2, p/δ
4. $(q\supset r)\supset[(p\vee q)\supset(p\vee r)]$; $\mathbf{L_p}$
5. $(\delta\supset\Diamond\delta)\supset[(\beta\vee\delta)\supset(\beta\vee\Diamond\delta)]$; 4, q/δ, $r/\Diamond\delta$, p/β
6. $(\beta\vee\delta)\supset(\beta\vee\Diamond\delta)$; 3, 5 **MP**
7. $\beta\vee\Diamond\delta$; 1, 6, **MP**

Cum $\beta\vee\Diamond\delta$ este o teoremă în $S5$, rezultă că C_i este o teoremă a sistemului $S5$.

Presupunem acum b) $\models_{\mathcal{L}_p}\gamma_i\vee\delta$. Similar, $\gamma_i\vee\delta$ este o teoremă a lui $S5$.

1. $\gamma_i\vee\delta$
2. $\Box(\gamma_i\vee\delta)$; 1 **N**

3. $\Box(p \vee q) \supset (\Box p \vee \Diamond q)$; $\mathbf{K_8}$

4. $\Box(\gamma_i \vee \delta) \supset (\Box \gamma_i \vee \Diamond\delta)$; 3, p/γ_i, q/δ

5. $\Box(\gamma_i \vee \Diamond\delta)$; 2, 4 **MP**

şi deci C_i este o teoremă a sistemului $S5$.

4.2.3. Cadrele sistemelor modale

Definiţia 1. Un cadru $\langle W, R\rangle$ ***pentru*** *un sistem modal* ***normal*** S *este un cadru în care orice teoremă a sistemului* S *este o formulă validă a lui* S.

În 4.2.1 am explicitat conceptul validităţii pentru fiecare din sistemele modale considerate. Am demonstrat totodată teoremele corectitudinii acestor sisteme. În 4.3.3 vom demonstra şi teoremele de completitudine care, laolaltă cu cele de corectitudine, demonstrează următoarea *coextensivitate*:

$\vdash_S \alpha$ *ddacă* $\models_S \alpha$.

Să presupunem că S este sistemul modal T. Coextensivitatea precedentă devine: o formulă α este demonstrabilă în T (i.e. T-demonstrabilă) ddacă α este T-validă (i.e. validă în orice cadru reflexiv; cf. Def. 7, 4.2.1.). Această aserţiune cu privire la T ne arată deja o anumită relaţie dintre sistemul modal T şi clasa tuturor cadrelor reflexive. Nu răspunde însă la întrebarea dacă *clasa tuturor cadrelor pentru* T este coextensivă *clasei tuturor cadrelor reflexive.*

Analiza acestei teme o putem face în două moduri distincte.

1. Ne prevalăm de teorema corectitudinii specifică fiecărui sistem S, în următorul mod: din faptul că dacă o formulă este T-demonstrabilă, atunci ea este validă pe orice cadru reflexiv (i.e. corectitudinea lui T) conchidem că *orice cadru reflexiv este un cadru pentru* T (i.e. T-cadru), adică, în acord cu cele demonstrate în paragraful întâi, *dacă* $\langle W, R\rangle$ *este reflexiv, atunci* $\mathbf{T}: \Box p \supset p$ *este validă.* În felul acesta o implicaţie din enunţul coextensivităţii cadrelor este deja demonstrată. Mai trebuie demonstrată conversa acesteia: *dacă* $\Box p \supset p$ *este validă, atunci* $\langle W, R\rangle$ *este reflexiv* şi astfel am arătat că cele două clase de cadre coincid.

2. Prin aparatul semantic din 4.2.1 demonstrăm, fără a face apel la teoremele corectitudinii, coextensivitatea pentru câteva sisteme. Vom alege acest al doilea mod, primul fiind indicat în exerciţii şi soluţiile aferente.

Teorema 1. $\Box p \supset p$ *este validă în* $\langle W, R\rangle$ *ddacă* $\langle W, R\rangle$ *este reflexiv.*

Demonstraţie

a) Dacă $\Box p \supset p$ este validă în $\langle W, R\rangle$, atunci $\langle W, R\rangle$ este reflexiv (i.e. R este reflexivă pe W). Presupunem că $\Box p \supset p$ este validă în $\langle W, R\rangle$. Fie w o lume arbitrară din W. Fie V o evaluare astfel că $V(p, w_i) = 1$ ddacă wRw_i pentru orice $w_i \in W$. Dacă wRw_i, atunci $V(p, w_i) = 1$ şi astfel $V(\Box p, w) = 1$. Fiindcă $V(\Box p \supset p, w) = 1$ (prin presupoz) rezultă că $V(p, w) = 1$ şi astfel wRw.

b) Dacă $\langle W, R\rangle$ este reflexiv, atunci $\Box p \supset p$ este validă în $\langle W, R\rangle$. Presupunem aşadar că R este reflexivă pe W. Fie $w \in W$ o lume arbitrară şi V o evaluare astfel că $V(\Box p, w) = 1$. Atunci pentru orice $w_i \in W$, astfel că wRw_i, rezultă $V(p, w_i) = 1$ şi deci şi $V(p, w) = 1$ (pentru că wRw are loc prin asumpţia reflexivităţii). Şi deci dacă $V(\Box p, w) = 1$, atunci $V(p, w) = 1$ şi astfel $V(\Box p \supset p, w) = 1$.

Teorema 2. $\Box p \supset \Box\Box p$ *este validă în* $\langle W,R\rangle$ *ddacă* $\langle W,R\rangle$ *este tranzitiv.*

Demonstrație

a) Dacă $\Box p \supset \Box\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$, atunci $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv. Presupunem că $\Box p \supset \Box\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$ şi că wRw_1 şi w_1Rw_2. Fie V o evaluare astfel că pentru orice $w_i \in W$: $V(p,w_i)=1$ ddacă wRw_i. Atunci $V(\Box p,w)=1$, căci dacă wRw_i, atunci $V(p,w_i)=1$. Şi deci, sub asumpția validității implicației $\Box p \supset \Box\Box p$ în $\langle W,R\rangle$, deducem că $V(\Box\Box p,w)=1$. Întrucât wRw_1, rezultă că $V(\Box p, w_1)=1$. Iar fiindcă w_1Rw_2, rezultă că $V(p,w_2)=1$. Şi astfel wRw_2.

b) Dacă $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv, atunci $\Box p \supset \Box\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$. Presupunem că R este tranzitivă. Fie V o evaluare astfel că $V(\Box p,w)=1$ şi wRw_1. Dacă w_1Rw_2, atunci wRw_2 (prin tranzitivitate). Şi deci $V(p,w_2)=1$. Rezultă apoi că $V(\Box p, w_1)=1$, pentru că în w p este necesară iar wRw_1 are loc şi deci $V(p, w_1)=1$ şi pentru că $V(p,w_2)=1$ şi w_1Rw_2. Şi deci $V(\Box\Box p,w)=1$.

Sistemul modal $S5$, am văzut, se constituie din sistemul modal T la care se adaugă axioma **E**: $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$. Denumirea **E** ne arată că validitatea axiomei reclamă simetria şi tranzitivitatea relației R pe W, adică R trebuie să fie *euclidiană.*

Definiția 2. O relație R se numeşte euclidiană dacă pentru orice x,y,z: dacă xRy şi xRz, atunci yRz.

Lemă. O relație R este reflexivă şi euclidiană ddacă R este o relație de echivalență.

Demonstrație

a) Dacă R este reflexivă şi euclidiană, atunci a1. R este reflexivă, a2. R este simetrică şi a3. R este tranzitivă.

a1 (trivial)

a2 Presupunem că R este reflexivă şi euclidiană. Dacă xRy, atunci xRy şi xRx (refl) şi deci yRx (eucl); aşadar R este simetrică.

a3 Presupunem că R este reflexivă şi euclidiană. Dacă xRy şi yRz, atunci yRx (prin a2). Iar din yRx şi yRz deducem (prin eucl) xRz, adică tranzitivitatea lui R.

b) Conversa lui a): Dacă R este o relație de echivalență (refl, sim, tranz), atunci b1. R este reflexivă (trivial) şi b2. R este euclidiană.

b2 Dacă xRy şi xRz, atunci yRx (prin sim) şi deci yRz (prin tranz). Şi deci din xRy şi xRz deducem yRz.

Teorema 3. $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ *este validă în* $\langle W,R\rangle$ *ddacă* $\langle W,R\rangle$ *este euclidian.*

Demonstrație

a) Dacă $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ este validă în $\langle W,R\rangle$ atunci $\langle W,R\rangle$ este euclidian. Presupunem că $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ este validă în $\langle W,R\rangle$. Fie V o evaluare astfel că $V(p,w_i)=1$ ddacă $w_i = w^{**}$. Presupunem că wRw^{**} şi wRw^{*}. Din wRw^{**} deducem $V(p, w^{**})=1$ şi deci $V(\Diamond p,w)=1$. Din validitatea formulei $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ în $\langle W,R\rangle$ deducem $V(\Box\Diamond p,w)=1$. Din wRw^{*} deducem $V(\Diamond p, w^{*})=1$ şi deci există $w_i \in W$ astfel că $w^{*}Rw_i$ şi $V(p,w_i)=1$. Însă, prin V, $w_i = w^{**}$. Şi deci $w^{*}Rw^{**}$.

b) Dacă $\langle W, R\rangle$ este euclidian, atunci $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ este validă în $\langle W, R\rangle$. Presupunem că R este euclidiană pe W: dacă wRw^* şi wRw^{**}, atunci w^*Rw^{**} (sau $w^{**}Rw^*$). Presupunem că $V(\Diamond p,w)=1$. **1.** Din wRw^* deducem că $V(p,w^*)=1$. Dacă şi wRw^{**}, atunci w^*Rw^{**} (prin eucl) şi deci $w^{**}Rw^*$ (prin sim) şi deci $V(\Diamond p,w^{**})=1$. **2.** Din wRw^{**} deducem că $V(p,w^{**})=1$. Dacă şi wRw^*, atunci $w^{**}Rw^*$ şi deci w^*Rw^{**} (prin sim) şi astfel $V(\Diamond p,w^*)=1$. Din $V(\Diamond p,w)=1$, **1** şi **2** deducem $V(\Box\Diamond p,w)=1$.

$\mathcal{GL}$-cadru

Definiţia 3. O relaţie R este bine-fondată dacă pentru orice mulţime nevidă Γ există cel mai mic R-element al lui Γ (i.e. un element $w\in\Gamma$ astfel că non w_iRw pentru orice $w_i\in\Gamma$).

Definiţia 4. O relaţie R este convers bine-fondată dacă pentru orice mulţime nevidă Γ există cel mai mare R-element al lui Γ (i.e. un element $w\in\Gamma$ astfel că non wRw_i pentru orice $w_i\in\Gamma$).

Pe proprietatea „convers bine-fondată" a unei relaţii R se bazează *demonstraţia prin inducţie pe conversa lui R.* Adică, dacă despre un element $w\in W$ deducem că are proprietatea P din asumpţia că toate elementele $w_i\in W$, astfel că wRw_i, au proprietatea P, atunci putem conchide că fiecare element al lui W are proprietatea P. Să arătăm pe scurt acest lucru.

Să presupunem despre toate elementele $w\in W$ că au proprietatea P dacă toate elementele $w_i\in W$, astfel că wRw_i, au proprietatea P. Fie $\Gamma=\{w\in W: w$ nu are $P\}$. Va trebui să arătăm că Γ nu are cel mai mare R-element. Fie $w\in\Gamma$, aşadar w nu are proprietatea P. Şi cum wRw_i (prin asumpţie), rezultă că w_i n-are proprietatea P. $w_i\in W$ (R fiind o relaţie pe W) şi deci $w_i\in\Gamma$. Şi deci Γ nu are cel mai mare R-element. Cum R este o relaţie convers bine-fondată, rezultă că Γ trebuie să fie vidă. Şi deci fiecare element $w\in W$ are proprietatea P.

Teorema 4. $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$ ddacă $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv şi convers bine-fondat.

Demonstraţie

a) Dacă $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$ atunci $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv şi convers bine-fondat. Faptul că R este tranzitivă (i.e. $\langle W,R\rangle$ este un $\mathcal{GL}$-cadru) rezultă din faptul că **4**: $\Box p\supset\Box\Box p$ este o teoremă a sistemului modal $\mathcal{GL}$ (i.e. $\mathbf{GL_1}$) şi astfel, prin teorema corectitudinii este o formulă validă a sistemului $\mathcal{GL}$. De unde, prin teorema 2 rezultă că R este tranzitivă pe W.

Vom arăta că R este convers bine-fondată. Presupunem că există o mulţime nevidă Γ fără cel mai mare R-element. Fie $w\in\Gamma$ şi fie V o evaluare, astfel că pentru orice $w_j\in W$ $V(p,w_j)=1$ ddacă $w_j\notin\Gamma$. Vom arăta că în acest caz $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$ nu este validă în $\langle W,R\rangle$, ceea ce contrazice antecedentul lui a).

Presupunem wRw_i, deci $w_i\in W$. Presupunem că $V(p,w_i)=0$. Rezultă că $w_i\in\Gamma$ şi că există $w_k\in\Gamma$, astfel că w_iRw_k, $w_k\in W$ şi $V(p,w_k)=0$ şi deci $V(\Box p,w_i)=0$ şi astfel $V(\Box p\supset p,w_i)=1$ şi deci $V(\Box(\Box p\supset p),w)=1$. Din wRw_i şi $V(p,w_i)=0$, avem $V(\Box p,w)=0$.

b) Dacă $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv şi convers bine-fondat, atunci $\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$.

Presupunem un model $\langle W,R,V\rangle$ bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle$ şi că $V(\Box p,w)=0$. Vom arăta că sub ipoteza din b) $V(\Box(\Box p\supset p),w)=0$ şi astfel implicaţia este validă în $\langle W,R\rangle$.

Fie $\Gamma=\{w_i\in W: wRw_i \wedge V(p,w_i)=0\}$. Din $V(\Box p,w)=0$ rezultă că există w^*, astfel că wRw^* şi $V(p,w^*)=0$. Şi deci $w^*\in\Gamma$ şi astfel $\Gamma\neq\Phi$. Cum R este convers bine-fondată, există $w^{**}\in\Gamma$, astfel că *non* $w^{**}Rw_i$ pentru orice $w_i\in\Gamma$. Avem aşadar $w^{**}\in\Gamma$, wRw^{**} şi $V(p,w^{**})=0$. Presupunem $w^{**}Rw_i$. Rezultă că $w_i\notin\Gamma$, wRw_i (prin tranzitivitate) şi $V(p,w_i)=1$. Şi astfel $V(\Box p,\ w^{**})=1$. $V(\Box p\supset p,w^{**})=0$ şi astfel $V(\Box(\Box p\supset p),w)=0$.

Exerciţii

4.2.1. S-validitatea formulelor $\mathcal{L}_p{}^{\Box}$

1. Să se arate că $p\supset\Box p$ nu este o teoremă a sistemului $\mathcal{T}$.
2. Să se demonstreze că 4: $\Box p\supset\Box\Box p$ nu este $\mathcal{T}$-validă.
3. Să se arate că 5: $\Diamond p\supset\Box\Diamond p$ nu este $\mathcal{S4}$-validă.
4. Să se demonstreze că dacă $\langle W,R\rangle$ este un cadru finit şi tranzitiv, atunci următoarea coextensivitate are loc: $\langle W,R\rangle_{irefl}$ *ddacă R este convers bine-fondată.*

4.2.2. Verificarea validităţii formulelor în sistemul modal $\mathcal{S5}$

Sunt următoarele formule ale logicii modale propoziţionale $\mathcal{S5}$-valide? (Răspundeţi cu ajutorul formelor normale conjunctive).

$\alpha_1=(\Diamond p\wedge\Box\Box\Diamond p)\supset\Diamond\Box\Diamond p$

$\alpha_2=\Box(p\equiv\neg\Box p)\supset(p\equiv\neg\Box(p\wedge\neg p))$

$\alpha_3=\Box(\neg p\wedge\neg q)\supset[\Box(\Box(p\vee q)\supset r)\wedge\neg(r\wedge\neg\Box(\neg p\vee p))]$

$\alpha_4=\Box[\Box(\Box p\supset\Box q)\supset\Box(\neg q\supset\neg p)]$

$\alpha_5=\Box(p\supset q)\supset\Box[\Diamond(p\wedge\neg\Box p)\supset\Diamond(q\wedge\Box(p\supset\Box p))]$

$\alpha_6=[\Box(\Box(p\supset q)\supset q)\supset p]\supset\Diamond(\Box q\supset p)$

$\alpha_7=\Diamond(p\wedge q)\supset\Box(\Box(\neg\Box p\vee\Box q)\supset\Diamond q)$

4.2.3. Cadrele sistemelor modale

1. Să se demonstreze prin contrapoziţie următoarea aserţiune: Dacă $\Box p\supset p$ este validă în $\langle W,R\rangle$, atunci $\langle W,R\rangle$ este reflexiv.
2. Să se demonstreze teorema corectitudinii sistemului $\mathcal{D}$.
3. Să se demonstreze prin contrapoziţie următoarea aserţiune: Dacă $\Box p\supset\Box\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$, atunci $\langle W,R\rangle$ este tranzitiv.
4. Demonstraţi următoarea aserţiune cu privire la sistemul modal $\mathcal{B}$: Dacă $p\supset\Box\Diamond p$ este validă în $\langle W,R\rangle$, atunci $\langle W,R\rangle$ este simetric.
5. Demonstraţi prin contrapoziţie următoarea aserţiune cu privire la sistemul modal $\mathcal{B}$: Dacă $\neg p\supset\Box\neg\Box p$ este validă în $\langle W,R\rangle$, atunci $\langle W,R\rangle$ este simetric.

4.3. Modele canonice

4.3.1. Mulțimi maximal consistente de formule

Definiția 1. Fie Γ *o mulțime de formule ale* $\mathcal{L}_p$ *°.* Γ *este o mulțime inconsistentă în raport cu un sistem* S *sau* S *-inconsistentă (abrev.* S *-inc) ddacă există o submulțime finită* $\Gamma^* = \{\alpha_1,...,\alpha_n\} \subseteq \Gamma$ *astfel că* $\vdash_S \neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ *; abrev* $\vdash_S \neg\Lambda\Gamma^*$.

În caz contrar este S *-consistentă (abrev.* S *-con).*

Dacă Γ are un singur element, α, atunci Γ este S *-con* ddacă *non* $\vdash_S \neg\alpha$.

Lema 1. Dacă Γ *este o mulțime* S *-con, iar* α *este o formulă arbitrară, atunci* $\{\Gamma,\alpha\}$ *este* S *-con sau* $\{\Gamma,\neg\alpha\}$ *este* S *-con (unde* $\{\Gamma,\alpha\}$ *înseamnă* $\Gamma\cup\{\alpha\}$ *iar* $\{\Gamma,\neg\alpha\}$ *înseamnă* $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$.

Demonstrație (reductio ad absurdum). Presupunem că ambele mulțimi $\{\Gamma,\alpha\}$ și $\{\Gamma,\neg\alpha\}$ sunt S-inc. Există așadar două submulțimi finite Γ_1^* și Γ_2^*, cu $\Gamma_1^* \subseteq \{\Gamma,\alpha\}$ și $\Gamma_2^* \subseteq \{\Gamma,\neg\alpha\}$, astfel încât $\vdash_S \neg\Lambda\Gamma_1^*$ și $\vdash_S \neg\Lambda\Gamma_2^*$.

Fie acum mulțimile $\Delta_1 = \Gamma_1^* - \{\alpha\}$ și $\Delta_2 = \Gamma_2^* - \{\neg\alpha\}$. Δ_1 și Δ_2 sunt deci submulțimi finite ale mulțimii Γ și $\vdash_S \neg(\Lambda\Delta_1 \wedge \alpha)$ și $\vdash_S \neg(\Lambda\Delta_2 \wedge \neg\alpha)$. În acest caz însă $\vdash_S \neg\Lambda\{\Delta_1,\Delta_2\}$. Însă $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ este o submulțime a lui Γ și deci Γ este S-inc, ceea ce contrazice ipoteza lemei.

Definiția 2. Fie Γ *o mulțime de formule ale* $\mathcal{L}_p$ *°.* Γ *este o mulțime maximală ddacă pentru orice formulă modală* α*:* $\alpha \in \Gamma$ *sau* $\neg\alpha \in \Gamma$.

Definiția 3. Γ *este o mulțime maximal* S *-consistentă (abrev. max* S *-con) ddacă* Γ *este simultan maximală și* S *-con.*

Lema 2. Fie Γ *o mulțime max* S *-con. Atunci:*

1. *Pentru orice formulă* α*, exact unul din elementele mulțimii* $\{\alpha,\neg\alpha\}$ *aparține lui* Γ.
2. $\alpha \supset \beta \in \Gamma$ *ddacă* $\alpha \notin \Gamma$ *sau* $\beta \in \Gamma$.
3. *Dacă* $\alpha \in \Gamma$ *și* $\alpha \supset \beta \in \Gamma$*, atunci* $\beta \in \Gamma$ *(Orice mulțime max* S *-con este închisă sub modus ponens).*
4. *Dacă* $\vdash_S \alpha$*, atunci* $\alpha \in \Gamma$ *(Orice teoremă este conținută în orice mulțime max* S *-con).*
5. *Dacă* $\alpha \in \Gamma$ *și* $\vdash_S \alpha \supset \beta$*, atunci* $\beta \in \Gamma$.

Demonstrație

1. a) *Cel puțin unul* din elementele mulțimii $\{\alpha,\neg\alpha\}$ aparține lui Γ. Aceasta rezultă din maximalitate.

   b) *Cel mult unul* din elementele mulțimii $\{\alpha,\neg\alpha\}$ aparține lui Γ. Aceasta rezultă din consistență. Căci în caz contrar $\vdash_S \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ și deci Γ ar fi S-inc.

2. a) Dacă $\alpha \supset \beta \in \Gamma$, atunci $\alpha \notin \Gamma$ sau $\beta \in \Gamma$. Presupunem antecedentul lui a), $\alpha \supset \beta \in \Gamma$, și negația consecventului lui a), $\alpha \in \Gamma$ și $\beta \notin \Gamma$. Atunci $\neg\beta \in \Gamma$ (prin max).

Însă $\{\alpha \supset \beta, \alpha, \neg\beta\}$ este S-inc, deoarece $\vdash_S \neg[(\alpha \supset \beta) \wedge \alpha \wedge \neg\beta]$ și deci Γ este S-inc; contradicție.

b) Dacă $\alpha \notin \Gamma$ sau $\beta \in \Gamma$, atunci $\alpha \supset \beta \in \Gamma$. Ca mai sus, presupunem $\alpha \notin \Gamma$ și $\alpha \supset \beta \notin \Gamma$. Atunci $\neg\alpha \in \Gamma$ și $\neg(\alpha \supset \beta) \in \Gamma$ (prin max). Însă $\{\neg\alpha, \neg(\alpha \supset \beta)\}$ este S-inc

pentru că $\vdash_S \neg[\neg\alpha \wedge \neg(\alpha \supset \beta)]$ şi deci Γ este S-inc; contradicţie. Celălalt caz, $\beta \in \Gamma$, se tratează similar (exerciţiu).

3. Similar (arătăm că mulţimea formată din antecedent şi negaţia consecventului este S-inc) (exerciţiu).

4. Dacă $\vdash_S \alpha$, atunci $\alpha \in \Gamma$. Prin teorema corectitudinii sistemului S (i.e. Dacă o formulă este teoremă a lui S, atunci formula este S-validă) conchidem asupra S-validităţii lui α şi deci asupra S-inc negaţiei, $\neg\alpha$. Cum $\neg\alpha$ nu poate aparţine lui Γ (Γ fiind S-con), rezultă că $\alpha \in \Gamma$ (prin max).

5. Dacă $\alpha \in \Gamma$ şi $\vdash_S \alpha \supset \beta$, atunci $\beta \in \Gamma$. Dacă $\vdash_S \alpha \supset \beta$ rezultă că $\alpha \supset \beta \in \Gamma$ (prin 4) şi cum $\alpha \in \Gamma$ rezultă că $\beta \in \Gamma$ (prin 3).

Lema 3 (Lindenbaum)[20]. *Orice mulţime S-con de formule Γ poate fi extinsă într-o mulţime max S-con Δ, astfel că $\Gamma \subseteq \Delta$.*

Demonstraţie. Presupunem că Γ este o mulţime S-con de formule. Fie $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ o enumerare a tuturor formulelor modale. Construim acum un şir de mulţimi de formule $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ în felul următor:

$\Delta_0 = \Gamma$

$\Delta_{i+1} =$ a) $\{\Delta_i, \gamma_i\}$, dacă mulţimea $\{\Delta_i, \gamma_i\}$ este consistentă

b) $\{\Delta_i, \neg\gamma_i\}$, în caz contrar.

Vom arăta că: 1. Fiecare Δ_i este S-con.

2. $\Delta = \cup\{\Delta_i : i = 0,1,2,\ldots\}$ este S-con.

3. Δ este max S-con.

1. *Fiecare Δ_i este S-con.* Constatăm mai întâi că dacă $i \leq j$, atunci $\Delta_i \subseteq \Delta_j$. Δ_0 este S-con, căci $\Delta_0 = \Gamma$, iar Γ este o mulţime S-con prin ipoteză. Presupunem că Δ_i este consistentă. Atunci fie $\{\Delta_i, \gamma_i\}$ este consistentă şi deci $\Delta_{i+1} = \{\Delta_i, \gamma_i\}$; fie $\{\Delta_i, \neg\gamma_i\}$este consistentă şi deci $\Delta_{i+1} = \{\Delta_i, \neg\gamma_i\}$. De unde, prin Lema 1 Δ_{i+1} este consistentă.

2. $\Delta = \cup\{\Delta_i : i = 0,1,2,\ldots\}$ *este S-con.* Dacă Δar fi S-inc, atunci ar exista o submulţime finită a ei $\Delta^* = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ astfel că $\vdash_S \neg\{\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n\}$. Fiindcă $\delta_1 \in \Delta$, δ_1 aparţine unei mulţimi Δ_{i_1}, ..., fiindcă $\delta_n \in \Delta$, δ_n aparţine unei mulţimi Δ_{i_n}.

Fie acum $i = \max(i_1, \ldots, i_n)$. Şi deci toate formulele $\delta_1, \ldots, \delta_n$ aparţin mulţimii Δ_i. Şi deci Δ_i este S-inc, deoarece$\vdash_S \neg\{\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n\}$, ceea ce contrazice 1, de mai sus. Şi deci Δeste S-con.

3. *Δ este max S-con.* Căci dacă $\gamma_i \notin \Delta$, atunci $\gamma_i \notin \Delta_{i+1}$ şi deci $\{\Delta_i, \gamma_i\}$ este S-inc. Atunci $\{\Delta_i, \neg\gamma_i\} = \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$ şi deci $\neg\gamma_i \in \Delta$. Aşadar $\Gamma \subseteq \Delta$ şi Δ este max S-con.

Deşi am presupus că mulţimile cu care operăm sunt mulţimi de formule ale logicii modale propoziţionale, demonstraţiile de mai sus au fost făcute în logica nemodală propoziţională (în $\mathcal{L}_p$), fiind astfel valabile pentru orice sistem care include $\mathcal{L}_p$, fie el modal sau nu.

În cele ce urmează ne interesează însă mulţimi max S-con de formule *modale*. Fie o mulţime Γ_γ care conţine toate formulele γ astfel încât $\Box\gamma \in \Gamma$. Simbolic: $\Gamma_\gamma = \{\gamma : \Box\gamma \in \Gamma\}$.

---

[20] Comp. 2.3.3, Lema 1.

Lema 4. Fie S un sistem normal de logică modală propozițională. Fie Γ o mulțime S-con de formule astfel încât $\neg\Box\alpha \in \Gamma$. Atunci $\{\Gamma_\gamma, \neg\alpha\}$ este S-con.

Demonstrație (contrapoziție)

Presupunem că $\{\Gamma_\gamma, \neg\alpha\}$ este S-inc şi vom arăta că în acest caz şi Γ este S-inc. Dacă $\{\Gamma_\gamma, \neg\alpha\}$ este S-inc, atunci există o submulțime finită $\{\gamma_1,...,\gamma_n\} \subseteq \Gamma_\gamma$ astfel că:

$\vdash_S \neg(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \neg\alpha)$, adică

$\vdash_S \neg(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \vee \alpha$, respectiv

$\vdash_S (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \alpha$, şi deci

$\vdash_S \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box\alpha$, prin $\mathbf{R}_3$

$\vdash_S (\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \supset \Box\alpha$, prin $\mathbf{K}_4^*$

$\vdash_S \neg(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\alpha)$

Însă această din urmă expresie redă S-inc mulțimii $\{\Box\gamma_1,...,\Box\gamma_n, \neg\Box\alpha\}$, care este o submulțime a lui Γ şi deci Γ este S-inc, contrar asumpției.

4.3.2. Modele canonice

Construcția modelelor canonice are ca sursă ideea lui Lindenbaum, potrivit căreia orice mulțime consistentă poate fi extinsă într-o mulțime maximal consistentă (Lema 3, 4.3.1.), ideea lui Carnap despre lumile posibile ca mulțimi de propoziții şi ideea lui Kripke a relației de accesibilitate, definită într-un mod anume. Construcția acestor modele prezintă o deosebită importanță pentru logica modală. Pentru orice sistem modal normal consistent S există un model canonic al său, $\mathcal{M}_{Can}$, cu următoarea proprietate remarcabilă:

Can $\quad \models_{\mathcal{M}_{Can}} \alpha$ *ddacă* $\vdash_S \alpha$,

adică α este o formulă validă în modelul canonic al lui S ddacă α este demonstrabilă în S.

Modelele canonice sunt instrumente foarte utile în investigarea sistemelor modale, înainte de toate în demonstrarea completitudinii lor. Coextensivitatea *Can*, de mai sus, sugerează deja cum este posibil acest lucru. Se demonstrează mai întâi, în modul în care am procedat în 4.2, S-corectitudinea sistemului respectiv (i.e. orice teoremă a lui S este validă în raport cu conceptul specific al validității sistemului S, adică S-validă), iar apoi se arată că cadrul modelului canonic al lui S are proprietățile reclamate de conceptul S-validității (i.e. reflexivitatea, tranzitivitatea etc.). De unde se conchide că dacă α este o formulă S-validă, atunci α este validă în cadrul modelului canonic al lui S şi deci este validă în modelul canonic $\mathcal{M}_{Can}$. Şi deci, pe baza *Can*, conchidem asupra S-demonstrabilității ei.

Să vedem, în continuare, cum construim un $\mathcal{M}_{Can}$ pentru S.

În cele relatate până acum despre sistemele modale lumile au fost considerate, simplu, elementele punctiforme ale unei mulțimi nevide *W*. Acum ne interesează însă şi „structura" lor, respectiv ce anume poate conține o lume posibilă. În cele ce urmează vom considera că o lume este o mulțime anume de formule, astfel încât o formulă aparține mulțimii respective (i.e. lumii posibile) dacă şi numai dacă formula ia valoarea logică adevărat în lumea respectivă. Scurt spus, lumile posibile sunt mulțimi maximal consistente de formule în raport cu un sistem specificat S.

Definirea $\mathcal{M}_{Can}$ pentru S înseamnă specificarea itemilor *W*, *R* şi *V*:

W este mulțimea tuturor mulțimilor max S-con.

R va fi definită astfel: dacă Γ şi Δ sunt două mulţimi max S-con de formule (i.e. două lumi), iar α este o formulă arbitrară astfel încât $\Box\alpha\in\Gamma$, atunci $\alpha\in\Delta$, adică

$\Gamma R\Delta$ ddacă pentru orice α: dacă $\Box\alpha\in\Gamma$, atunci $\alpha\in\Delta$, echivalent

wRw^* ddacă pentru orice α: dacă $\Box\alpha\in w$, atunci $\alpha\in w^*$

(***dual*** wRw^* ddacă pentru orice α: dacă $\alpha\in w^*$, atunci $\Diamond\alpha\in w$)

V o vom defini astfel: $V(p,w)=1$ ddacă $p\in w$ (unde p este o variabilă propoziţională arbitrară).

O dată asignate valori variabilelor propoziţionale, valoarea logică a oricărei formule, în orice lume, poate fi univoc determinată. Un rezultat fundamental cu privire la modelele canonice este următoarea lemă care arată că *orice* formulă este adevărată într-o lume w a modelului canonic ddacă formula aparţine lumii respective w.

Lemă. Fie $\mathcal{M}_{Can}=\langle W,R,V\rangle$ *modelul canonic al unui sistem modal normal consistent* S *al* $\mathcal{L}_p{}^{\circ}$*. Atunci:* $V(\alpha,w)=1$ *ddacă* $\alpha\in w$*, pentru orice* α *şi pentru orice* $w\in W$.

Demonstraţia o facem prin inducţie structurală. Adică, orice formulă a $\mathcal{L}_p{}^{\circ}$ are proprietatea P dacă:

1. Pasul de bază: orice formulă elementară are proprietatea P.
2. Paşii inductivi (ipoteza inducţiei):

a) Dacă α are proprietatea P, atunci $\neg\alpha$ are proprietatea P.
b) Dacă α şi β au proprietatea P, atunci $\alpha\circ\beta$ are proprietatea P.
c) Dacă α are proprietatea P, atunci $\Box\alpha$ are proprietatea P.
Prin definiţia funcţiei V, lema este valabilă pentru orice formulă elementară (i.e. variabilă propoziţională). Trebuie să demonstrăm aşadar că a, b şi c au loc cu referire la lemă.
a) Dacă lema este valabilă pentru α, atunci este valabilă şi pentru $\neg\alpha$.
Fie $\neg\alpha$ o formulă arbitrară şi $w\in W$ o lume arbitrară. Din *Cond* $[\neg\alpha]$ avem $V(\neg\alpha,w)=1$ ddacă $V(\alpha,w)=0$. Prin antecedentul lui a) lema este valabilă pentru α şi deci $V(\alpha,w)=0$ ddacă $\alpha\notin W$. Însă prin *Lema* 2 (1), 4.3.1., $\alpha\notin W$ ddacă $\neg\alpha\in w$. Şi deci $V(\neg\alpha,w)=1$ ddacă $\neg\alpha\in w$.

b) Dacă lema este valabilă pentru α şi β, atunci este valabilă şi pentru $\alpha\circ\beta$. Fie „$\circ$" operatorul „$\supset$". Fie deci $\alpha\supset\beta$. Însă $\vdash_S\neg(\alpha\supset\beta)\equiv(\alpha\wedge\neg\beta)$. Cum w este o mulţime max S-con, rezultă că $\neg(\alpha\supset\beta)\in w$ ddacă $\alpha\in w$ şi $\neg\beta\in w$. Şi deci $\alpha\supset\beta\in w$ ddacă $\neg(\alpha\supset\beta)\notin w$ ddacă $\alpha\notin w$ sau $\neg\beta\notin w$ ddacă $\alpha\notin w$ sau $\beta\in w$ ddacă fie $V(\alpha,w)=0$, fie $V(\beta,w)=1$ (prin ipot. ind.) ddacă $V(\alpha\supset\beta,w)=1$. (Construiţi o demonstraţie utilizând Lema 2(2) din 4.3.2).

c) Dacă lema este valabilă pentru α, atunci este valabilă şi pentru $\Box\alpha$. Fie aşadar formula $\Box\alpha$.
1. Presupunem $\Box\alpha\in w$. Prin definiţia relaţiei de accesibilitate R în $\mathcal{M}_{Can}$ avem: pentru orice w^* astfel că wRw^* $\alpha\in w^*$. Cum, prin asumpţie, lema este valabilă pentru α, avem aşadar $V(\alpha,w^*)=1$ pentru orice w^* astfel că wRw^*. Şi deci, prin *Cond* $[\Box\alpha]$, $V(\Box\alpha,w)=1$.
2. Presupunem $\Box\alpha\notin w$. Atunci $\neg\Box\alpha\in w$ (prin max). Şi deci $w_\gamma\cup\{\neg\alpha\}$ este S-con (prin *Lema* 4, 4.3.1) (unde $w_\gamma=\{\gamma:\Box\gamma\in w\}$). Şi astfel, prin *Lema* 3 există o lume $w^*\in W$ astfel încât $\{w_\gamma,\neg\alpha\}\subseteq w^*$, adică a) $w_\gamma\in w^*$ şi b) $\neg\alpha\in w^*$. Din a) deducem că wRw^* (prin def.

lui R) iar din b) deducem $\alpha \notin w^*$. Cum lema are loc pentru α, din $\alpha \notin w^*$ deducem $V(\alpha, w^*) = 0$ şi deci, prin *Cond* [$\Box\alpha$], conchidem că $V(\Box\alpha, w) = 0$.

Aceste rezultate ne permit să demonstrăm existenţa proprietăţii remarcabile $\mathcal{Can}$, cu privire la modelele canonice: $\models_{\mathcal{M}_{Can}} \alpha$ ddacă $\vdash_S \alpha$.

Demonstraţie: a) Dacă $\vdash_S \alpha$, atunci $\models_{\mathcal{M}_{Can}} \alpha$. Fie $\mathcal{M}_{Can} = \langle W, R, V \rangle$. Presupunem antecedentul lui a): $\vdash_S \alpha$. Rezultă că α aparţine oricărei mulţimi max S-con (prin *Lema* 2(4), 4.3.1), echivalent, oricărei lumi $w \in W$. Aşadar, $V(\alpha, w) = 1$ pentru orice $w \in W$ (prin *Lemă*, 4.3.2.) şi deci α este validă în $\mathcal{M}_{Can} = \langle W, R, V \rangle$.

b) Dacă $\models_{\mathcal{M}_{Can}} \alpha$, atunci $\vdash_S \alpha$. Demonstrăm b) prin contrapoziţie. Presupunem că *non* $\vdash_S \alpha$. Atunci $\{\neg\alpha\}$ este S-con. Şi deci există o mulţime max S-con, căreia $\neg\alpha$ îi aparţine; adică există o lume $w \in W$, astfel că $\neg\alpha \in w$. Şi deci $\alpha \notin w$. De unde, prin *Lema* de mai sus, $V(\alpha, w) = 0$. Şi deci *non* $\models_{\mathcal{M}_{Can}} \alpha$ (i.e. α nu este validă în modelul canonic).

4.3.3. Completitudinea sistemelor modale

Demonstraţia de mai sus a $\mathcal{Can}$ este şi o demonstraţie de completitudine pentru sistemul modal $\mathcal{K}$, cu ajutorul modelelor canonice. Căci dacă α este validă în orice model bazat pe un $\mathcal{K}$-cadru $\langle W, R \rangle$, atunci α este validă şi în modelul *canonic* bazat pe $\langle W, R \rangle$ şi deci, prin b), α este $\mathcal{K}$-demonstrabilă.

Aşadar, a demonstra completitudinea unui sistem modal S cu ajutorul modelelor canonice înseamnă a demonstra că modelul canonic al sistemului respectiv se bazează pe un cadru *specific* sistemului S (i.e. reflexiv, tranzitiv etc.). În cazul sistemului $\mathcal{K}$ avem deja o demonstraţie de completitudine, deoarece modelul canonic se bazează pe *orice* cadru $\langle W, R \rangle$.

Teorema 1. Sistemul modal $\mathcal{T}$ este complet în raport cu orice cadru reflexiv (i.e. $\mathcal{T}$-cadru).

Ceea ce trebuie să arătăm aşadar este că wRw are loc pentru orice $w \in W$, adică R este *reflexivă* în modelul canonic. În acord cu definiţia lui R în $\mathcal{M}_{Can}$, wRw are loc ddacă pentru orice formulă α, dacă $\Box\alpha \in w$, atunci $\alpha \in w$. Demonstraţia este simplă. Cum $\Box p \supset p$ este o axiomă a sistemului $\mathcal{T}$ (şi deci şi teoremă), ea face parte din orice mulţime max $\mathcal{T}$-con şi deci şi din w (prin *Lema* 2 (4), 4.3.1). Prin substituţie obţinem $\Box\alpha \supset \alpha \in w$ care, cu asumpţia $\Box\alpha \in w$ dă $\alpha \in w$ (prin *Lema* 2 (5), 4.3.1).

Teorema 2. Sistemul modal $\mathcal{D}$ este complet în raport cu orice cadru serial ($\mathcal{D}$-cadru).

Trebuie să demonstrăm că R este serială în modelul canonic, adică $\forall w \exists w^* wRw^*$. Cum $\Diamond(p \supset p)$ este o teoremă a lui $\mathcal{D}$ (i.e. $\mathbf{D_1}$), ea face parte din orice $w \in W$ din modelul canonic al lui $\mathcal{D}$. De unde, prin *Lemă*, 4.3.2 $V(\Diamond(p \supset p), w) = 1$. Şi deci există o lume w^* astfel că wRw^* şi deci R este serială.

Teorema 3. Sistemul modal $\mathcal{K}4$ este complet în raport cu orice cadru tranzitiv (i.e. $\mathcal{K}4$-cadru).

Acum trebuie să demonstrăm că R este tranzitivă în modelul canonic al lui $\mathcal{K}4$, adică $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 [(w_1 R w_2 \wedge w_2 R w_3) \supset w_1 R w_3]$. Presupunem $w_1 R w_2$ şi $w_2 R w_3$. Trebuie să arătăm că $w_1 R w_3$ are loc, adică trebuie să arătăm că dacă $\Box\alpha \in w_1$, atunci $\alpha \in w_3$. Cum $\Box p \supset \Box\Box p$ este

axioma 4 a acestui sistem, formula $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$ este demonstrabilă în $\mathcal{K}4$. De unde, sub asumpţia $\Box\alpha \in w_1$, prin *Lema* 2 (5), 4.3.1, obţinem $\Box\Box\alpha \in w_1$. Cum $w_1 R w_2$ (prin presupoz.) rezultă $\Box\alpha \in w_2$ (prin def. lui R). Iar fiindcă $w_2 R w_3$ (prin presupoz.), similar, $\alpha \in w_3$.

Teorema 4. Sistemul modal S4 este complet în raport cu orice cadru reflexiv şi tranzitiv (i.e. S4-cadru).

Cum *S4* este $\mathcal{T}+\mathbf{4}$, R este relaţia din sistemele modale $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{K}4$. Aşadar, completitudinea sistemului *S4* rezultă din teoremele 1. şi 3.

Teorema 5. Sistemul modal $\mathcal{B}$ este complet în raport cu orice cadru reflexiv şi simetric (i.e. $\mathcal{B}$-cadru).

Cum $\mathcal{B}$ este $\mathcal{T} + p \supset \Box\Diamond p$, reflexivitatea relaţiei R în modelul canonic al lui $\mathcal{B}$ rezultă din Teorema 1. Ceea ce trebuie să demonstrăm este simetria relaţiei R: $\forall w \forall w^*(wRw^* \supset w^*Rw)$, pentru orice $w \in W$ în $\mathcal{M}_{\mathcal{C}an}$. Adică trebuie să arătăm că dacă wRw^* atunci w^*Rw; adică dacă $\Box\alpha \in w^*$, atunci $\alpha \in w$, pentru orice formulă α.

Presupunem că $\alpha \notin w$. Atunci $\neg\alpha \in w$ (prin *max*). Însă $\vdash_{\mathcal{B}} \neg\alpha \supset \Box\Diamond\neg\alpha$ (prin axioma **B** şi **Subst**), echivalent $\vdash_{\mathcal{B}} \neg\alpha \supset \Box\neg\Box\alpha$ (prin **Intersch**). De unde, prin *Lema* 2 (5), 4.3.1 obţinem $\Box\neg\Box\alpha \in w$. Întrucât wRw^* are loc (prin presupoz.), obţinem $\neg\Box\alpha \in w^*$ (prin def. lui R) şi deci $\Box\alpha \notin w^*$ (prin max)[21].

Teorema 6. Sistemul modal S5 este complet în raport cu orice cadru de echivalenţă (i.e. S5-cadru: reflexiv, simetric şi tranzitiv).

Demonstraţia acestui fapt rezultă din teoremele 1, 4 şi 5.

Încheiem acest paragraf cu câteva consideraţii cu privire la *convergenţă*. Sistemul modal *S4.2* se obţine din sistemul modal *S4* plus axioma $\mathbf{G_1}$: $\Diamond\Box p \supset \Box\Diamond p$[22].

Teorema 7. Sistemul modal S4.2 este complet în raport cu orice cadru reflexiv, tranzitiv şi convergent (i.e. S4.2-cadru).

Un cadru $\langle W, R\rangle$ se numeşte *convergent* ddacă relaţia R satisface următoarea condiţie: pentru orice w_1, w_2, w_3 din W, dacă $w_1 R w_2$ şi $w_1 R w_3$, atunci există $w_4 \in W$ astfel că $w_2 R w_4$ şi $w_3 R w_4$.

Demonstrarea completitudinii sistemului *S4.2* se rezumă, în acord cu ideea convergenţei, la demonstrarea *S4.2*-consistenţei mulţimii $A = \{w_{2\alpha}, w_{3\beta}\}$, adică a mulţimii $w_{2\alpha} \cup w_{3\beta}$, unde $w_{2\alpha} = \{\alpha : \Box\alpha \in w_2\}$ iar $w_{3\beta} = \{\beta : \Box\beta \in w_3\}$. Căci dacă A este o mulţime consistentă, atunci ea poate fi extinsă într-o mulţime max *S*-con w, astfel că $A \subseteq w$ (prin *Lema* 3, 4.3.1) (iar w poate fi considerată mulţimea w_4 căutată). Reflexivitatea şi tranzitivitatea relaţiei R sunt demonstrate prin teoremele 1. şi 3.

Demonstraţie (reductio ad absurdum). Presupunem că A nu este *S4.2*-con. Există deci formulele $\Box\alpha_1, \ldots, \Box\alpha_n$ în w_2 şi $\Box\beta_1, \ldots, \Box\beta_m$ în w_3 astfel că

1. $\vdash_{S4.2} \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$, echivalent
2. $\vdash_{S4.2} \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \vee \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$, echivalent

---

[21] Aceasta echivalează şi cu o demonstraţie de completitudine pentru sistemul $\mathcal{KB}$ ale cărui axiome sunt axiomele lui $\mathcal{K}$ plus axioma **B**: $p \supset \Box\Diamond p$.

[22] Numele axiomei, $\mathbf{G_1}$, este dat de P.T. Geach (cf. M.A.E. Dummett şi E.J. Lemmon, Modal Logics between *S4* and *S5*, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5/1959, 250-264). Conversa axiomei $\mathbf{G_1}$ este axioma **M**: $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p$; adăugată sistemului *S4* formează sistemul modal *S4M*.

3. $\vdash_{S4.2} (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$, şi deci

4. $\vdash_{S4.2} \Diamond(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset \Diamond\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$ (prin $\mathbf{R_5}$), adică

5. $\vdash_{S4.2} \Diamond(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \supset \neg\Box(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$ (**Intersch**)

Însă fiindcă w_1Rw_2 are loc iar $\Box(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in w_2$ (prin exerc. 3a, 4.3 (mai jos) plus teorema **K4***) rezultă că $\Diamond\Box(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in w_1$. De unde, prin axioma $\mathbf{G_1}$, **Subst** şi *Lema* 2 (5), 4.3.1 obţinem $\Box\Diamond(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in w_1$. Întrucât w_1Rw_3, rezultă că $\Diamond(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in w_3$, care împreună cu 5 de mai sus dă $\neg\Box(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \in w_3$. Însă $\Box\beta_1, ..., \Box\beta_m$, echivalent, prin exer. 3a, 4.3 plus Teorema **K4***, $\Box(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$ aparţine lui w_3 care împreună cu formula precedentă fac mulţimea w_3 inconsistentă. Şi deci A este *S4.2*-con şi poate fi extinsă într-o mulţime max *S4.2*-con, w (i.e. mulţimea w_4 căutată).

Remarci

1. Deşi sistemul *S4.2* este *S4* (i.e. $\mathcal{K}+\mathcal{T}+\mathbf{4}$) plus $\mathbf{G_1}$, în demonstrarea completitudinii lui în raport cu orice cadru *convergent* (i.e. în demonstrarea convergenţei relaţiei R în modelul canonic al lui *S4.2*) nu s-a apelat nici la axioma **T**, nici la **4**, ci doar la $\mathbf{G_1}$. Acest lucru arată faptul că sistemul $\mathcal{K}+\mathbf{G_1}$ este complet în raport cu orice cadru convergent, indiferent dacă R este reflexivă sau tranzitivă.

2. Dacă sistemului *S4* i se adaugă axioma $\mathbf{D_1}$: $\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$, atunci se obţine sistemul modal *S4.3*, sistem complet în raport cu orice cadru reflexiv, tranzitiv şi conex. O relaţie R se numeşte conexă ddacă pentru orice $w_1, w_2, w_3 \in W$ următoarea implicaţie are loc: $(w_1Rw_2 \wedge w_1Rw_3) \supset (w_2Rw_3 \vee w_3Rw_2)$. Remarca 1 de mai sus este valabilă şi despre *S4.3*, în următorul sens: sistemul $\mathcal{K}+\mathbf{D_1}$ este complet în raport cu orice cadru conex, indiferent dacă R este reflexivă sau tranzitivă.

Rămânem la ideea convergenţei. Demonstrăm însă mai întâi o lemă care permite generalizarea rezultatelor de mai sus.

Fie W o mulţime şi R o relaţie binară definită pe W. Pentru orice $i = 0,1,2,...$ definim relaţia R^i în felul următor:

1. wR^0w^* ddacă $w = w^*$, R^0 este deci relaţia de identitate pe W.
2. $wR^{i+1}w^*$ ddacă există o w^{**} astfel că wR^iw^{**} şi $w^{**}Rw^*$, adică $R^{i+1} = \{\langle w, w^* \rangle : \exists w^{**}(wR^iw^{**} \wedge w^{**}Rw^*)\}$.

Deci R^1 este relaţia wRw^* iar wR^nw^* are loc ddacă $\exists w_1 .. \exists w_n (w = w_1Rw_2R...Rw_n = w^*)$. Înşiruirea de lumi $w_1R...Rw_n$, astfel că 1 şi 2 au loc, se numeşte *R-lanţ*.

Fie α o formulă modală. Definim $\Box^i\alpha$ şi $\Diamond^i\alpha$ după cum urmează:

1. $\Box^0\alpha = \alpha$	3. $\Diamond^0\alpha = \alpha$
2. $\Box^{i+1}\alpha = \Box\Box^i\alpha$	4. $\Diamond^{i+1}\alpha = \Diamond\Diamond^i\alpha$

Lema de mai jos arată corelaţia dintre aceste concepte şi modelele canonice.

Lemă. Fie S un sistem modal consistent normal. Atunci

wR^iw^* ddacă pentru orice formulă α: dacă $\Box^i\alpha \in w$, atunci $\alpha \in w^*$,

dual, *wR^iw^* ddacă pentru orice formulă β: dacă $\beta \in w^*$, atunci $\Diamond^i\beta \in w$.*

Demonstrație (prin inducție pe i). Cazul $i=0$ este evident.

a) Dacă $wR^i w^*$, atunci pentru orice formulă α: dacă $\Box^i \alpha \in w$, atunci $\alpha \in w^*$. Presupunem $wR^{i+1}w^*$ și $\Box^{i+1}\alpha = \Box\Box^i \alpha = \Box^i \Box \alpha \in w$. Există așadar w^{**} astfel încât $wR^i w^{**}$ și $w^{**}Rw^*$. Însă $\Box \alpha \in w^{**}$ (prin ipoteza inducției) și deci $\alpha \in w^*$ (prin definiția lui R în modelele canonice).

b) Dacă pentru orice α: dacă $\Box^i \alpha \in w$, atunci $\alpha \in w^*$, atunci $wR^i w^*$. Presupunem că pentru orice α: dacă $\Box^{i+1}\alpha \in w$, atunci $\alpha \in w^*$. Și vom arăta că $wR^{i+1}w^*$.

Fie $A = \{\Diamond\beta\colon \beta \in w^*\} \cup \{\gamma : \Box^i \gamma \in w\}$. A este o mulțime consistentă. Căci dacă n-ar fi consistentă, atunci pentru $\beta_1,\ldots,\beta_k \in w^*$ și $\Box^i \gamma_1,\ldots,\Box^i \gamma_l \in w$ am avea $\vdash_S \neg(\Diamond\beta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\beta_k \wedge \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_l)$. Fie $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$ iar $\gamma = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_l$. Însă din $\vdash_S \beta \supset (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k)$ deducem $\vdash_S \Diamond\beta \supset \Diamond(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k)$ (prin $\mathbf{R}_5$), iar $\vdash_S \Diamond(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k) \supset (\Diamond\beta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\beta_k)$ (prin $\mathbf{K}_7^*$) și deci $\vdash_S \Diamond\beta \supset (\Diamond\beta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\beta_k)$.

Așadar, $\vdash_S \neg(\Diamond\beta \wedge \gamma)$, respectiv $\vdash_S \neg\Diamond\beta \vee \neg\gamma$, echivalent $\vdash_S \gamma \supset \neg\Diamond\beta$, adică $\vdash_S \gamma \supset \Box\neg\beta$. Însă, prin i aplicații ale regulii **N** obținem $\vdash_S \Box^i \gamma \supset \Box^{i+1}\neg\beta$. Cum $\Box^i \gamma \in w$, rezultă că $\Box^{i+1}\neg\beta \in w$ și deci $\neg\beta \in w^*$ (prin presupoziție) care, împreună cu $\beta \in w^*$, face A inconsistentă.

Însă dacă A este consistentă, atunci ea poate fi extinsă la o mulțime maximal consistentă w^{**}, astfel că $A \subseteq w^{**}$. Pentru orice γ, dacă $\Box^i \gamma \in w$, atunci $\gamma \in w^{**}$ și deci $wR^i w^{**}$ (prin ipoteza inducției) și pentru orice β, dacă $\beta \in w^*$, atunci $\Diamond\beta \in w^{**}$ și deci $w^{**}Rw^*$. Are loc așadar $wR^i w^{**}Rw^*$ și deci $wR^{i+1}w^*$

Următoarele relații sunt imediate:

1. $V(\Box^n \alpha, w) = 1$ ddacă pentru orice w^* astfel că $wR^n w^*$, $V(\alpha, w^*) = 1$.

2. $V(\Diamond^n \alpha, w) = 1$ ddacă există w^* astfel că $wR^n w^*$ și $V(\alpha, w^*) = 1$.

Așa cum am arătat în 4.2 un $\mathcal{S}$-cadru este explicitat prin anumite condiții. Un $\mathcal{D}$-cadru, de exemplu, este un cadru *serial*, adică un cadru $\langle W, R\rangle$ care validează condiția $\forall w \exists w^* wRw^*$, unde $w, w^* \in W$. În logica predicatelor de ordinul întâi aceasta este o formulă, unde R este un predicat diadic. Cu alte cuvinte, $\mathcal{S}$-cadrele sistemelor modale pot fi *definite* prin formule ale logicii de ordinul întâi. Modul în care se face această definire este complet explicitabil prin teoremele aferente. Să luăm un exemplu.

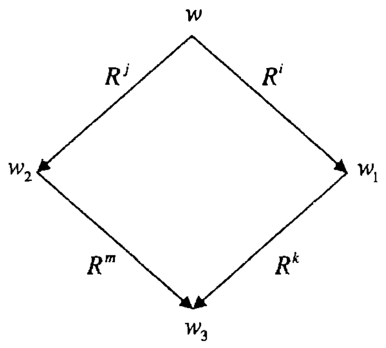
Fie formula $\Diamond^i \Box^k \alpha \supset \Box^j \Diamond^m \alpha$ [23]. Formula este o generalizare a axiomei specifice a sistemului modal *S4.2* (cf. Remarcă 1). Cadrele oricărui sistem modal obținut din $\mathcal{K}$ plus formule care au forma celei de mai sus (unde *i, j, k, m* sunt numere naturale) trebuie să satisfacă cerința convergenței, pentru ca toate și numai teoremele sistemului să fie formule valide ale sistemului astfel obținut. Această cerință poate fi redată prin următoarea formulă a logicii de ordinul întâi:

Conv $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(wR^i w_1 \wedge wR^j w_2) \supset \exists w_3 (w_1 R^k w_3 \wedge w_2 R^m w_3)]$

Orice cadru $\langle W, R\rangle$ care satisface această cerință este un cadru *i, j, k, m*-convergent (aferent, R este o relație *i, j, k, m-conv*.)

---

[23] Comp. Lemmon și Scott, op. cit., 151 și urm. Și B.F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge UP 1980, 85-90.



Teorema 8. Fie $\langle W,R,V\rangle$ *un model arbitrar bazat pe cadrul i, j, k, m-conv* $\langle W,R\rangle$. *Atunci orice formulă* $\Diamond^i\Box^k\alpha\supset\Box^j\Diamond^m\alpha$ *este validă în* $\langle W,R,V\rangle$ (i.e. adevărată în orice $w\in W$).

Demonstrație. Fie $w\in W$, astfel că $V(\Diamond^i\Box^k\alpha,w)=1$ și wR^jw_2. Trebuie să arătăm că pentru w_3, $w_2R^mw_3$ și $V(\alpha,w_3)=1$. Din $V(\Diamond^i\Box^k\alpha,w)=1$ deducem că există o lume w_1 astfel că wR^iw_1 și $V(\Box^k\alpha,w_1)=1$. Din asumpția *i, j, k, m-conv* lui R deducem că există w_3 astfel că $w_1R^kw_3$ și $V(\alpha,w_3)=1$. Iar din asumpția wR^jw_2, prin *i, j, k, m-conv* lui R, rezultă $w_2R^mw_3$.

Teorema 9. Dacă $\vdash_S\Diamond^i\Box^k\alpha\supset\Box^j\Diamond^m\alpha$, *atunci* R_c *este i, j, k, m-conv (unde* R_c *este relația unui model canonic).*

Demonstrație. Presupunem că au loc: $wR_c^iw_1$ și $wR_c^jw_2$. Trebuie să demonstrăm că există un w_3 astfel că $w_1R_c^kw_3$ și $w_2R_c^mw_3$. Fie $\Gamma=\{\alpha:\Box^k\alpha\in w_1\}\cup\{\beta:\Box^m\beta\in w_2\}$. Dacă Γ este o mulțime S-consistentă, atunci ea poate fi extinsă într-o mulțime max S-consistentă (prin Lema 3, 4.3.1.) w_3 astfel că $\Gamma\subseteq w_3$. De unde deducem că $w_1R^kw_3$ și $w_2R^mw_3$ (prin *Lemă*, 4.3.3).

Demonstrăm, prin reducere la absurd, că Γ este o mulțime S-consistentă. Presupunem că Γ este S-inc. Există așadar formulele $\alpha_1,\dots,\alpha_{n_1}$ (astfel că $\Box^k\alpha_1,\dots,\Box^k\alpha_{n_1}\in w_1$) și $\beta_1,\dots,\beta_{n_2}$ (astfel că $\Box^m\beta_1,\dots,\Box^m\beta_{n_2}\in w_2$) astfel încât:

$$\vdash_S\neg(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{n_1}\wedge\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_{n_2}).$$

Fie $\alpha=\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{n_1}$ și $\beta=\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_{n_2}$. Așadar, $\vdash_S\neg(\alpha\wedge\beta)$, echivalent $\vdash_S\alpha\supset\neg\beta$.
Și deci $\vdash_S\Diamond^m\alpha\supset\Diamond^m\neg\beta$ (prin m aplicații ale $\mathbf{R}_5$) și deci $\vdash_S\Diamond^m\alpha\supset\neg\Box^m\beta$. Însă din faptul că $\Box^k\alpha\in w_1$ și asumpția $wR_c^iw_1$ deducem că $\Diamond^i\Box^k\alpha\in w$ (prin *Lemă*, 4.3.3, dual). Iar din ipoteza *Teoremei* 9 și formula precedentă deducem că $\Box^j\Diamond^m\alpha\in w$ (prin *Lema* 2(5),4.3.1). Iar din asumpția $wR_c^jw_2$ plus $\Box^j\Diamond^m\alpha\in w$ deducem, prin *Lemă*, 4.3.3, că $\Diamond^m\alpha\in w_2$, care laolaltă cu formula demonstrabilă în S, de mai sus, $\Diamond^m\alpha\supset\neg\Box^m\beta$, dă $\neg\Box^m\beta\in w_2$ (prin *Lema* 2 (5), 4.3.1), ceea ce contrazice asumpția de mai sus: $\Box^m\beta\in w_2$.

Fie acum Θ o mulțime de cvadrupli (*i, j, k, m*). Fie $\mathcal{K}\Theta$ sistemul modal obținut din $\mathcal{K}$ plus orice număr de formule de forma $\Diamond^i\Box^k\alpha\supset\Box^j\Diamond^m\alpha$, unde α este o formulă arbitrară iar $(i,j,k,m)\in\Theta$.

Definiție. Un model $\langle W,R,V\rangle$ *este* Θ*-convergent (*Θ*-conv) dacă pentru orice* $(i,j,k,m)\in\Theta$, $\langle W,R,V\rangle$ *este i,j,k,m-convergent.*

Teorema 10. $\vdash_{K\Theta}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model* $\langle W,R,V\rangle$ Θ*-conv.*

Demonstrație. a) Dacă $\vdash_{K\Theta}\alpha$, atunci α este validă în orice model Θ-conv. Presupunem că $\vdash_{K\Theta}\alpha$ și $\langle W,R,V\rangle$ este un model arbitrar Θ-conv. Prin *Teorema 8* rezultă că orice teoremă a sistemului $\mathcal{K}\Theta$ este validă în modelul $\langle W,R,V\rangle$ și deci și α este validă în $\langle W,R,V\rangle$.

b) Dacă α este validă în orice model Θ-conv, atunci $\vdash_{K\Theta}\alpha$. Prin *Teorema* 9 modelul canonic al sistemului $\mathcal{K}\Theta$ este Θ-conv. Și deci dacă α este validă în orice model Θ-conv, atunci α este validă și în modelul canonic al sistemului $\mathcal{K}\Theta$. De unde, prin ***Càn*** (4.3.2) rezultă $\vdash_{K\Theta}\alpha$.

Teorema 11.

1. R este reflexivă ddacă R este 0, 0, 1, 0-conv.
2. R este simetrică ddacă R este 0, 1, 0, 1-conv.
3. R este tranzitivă ddacă R este 0, 2, 1, 0-conv.
4. R este euclidiană ddacă R este 1, 1, 0, 1-conv.

Demonstrație (4). Prin ***Conv*** *R* este 1, 1, 0, 1-conv ddacă

$\forall w\forall w_1\forall w_2[(wR^1w_1\wedge wR^1w_2)\supset\exists w_3(w_1R^0w_3\wedge w_2R^1w_3)]$ ddacă

$\forall w\forall w_1\forall w_2[(wRw_1\wedge wRw_2)\supset\exists w_3(w_1=w_3\wedge w_2Rw_3)]$ ddacă

$\forall w\forall w_1\forall w_2[(wRw_1\wedge wRw_2)\supset w_2Rw_1]$ ddacă

$\forall w\forall w_1\forall w_2[(wRw_1\wedge wRw_2)\supset w_1Rw_2]$ ddacă *R* este euclidiană.

Demonstrație (1,2,3) – exercițiu.

Din *Teorema 11* și considerațiile precedente cu privire la construcția sistemelor modale deducem:

$\mathcal{T}=\mathcal{K}+\Box p\supset p=\mathcal{K}\{(0,0,1,0)\}$

$\mathcal{S}4=\mathcal{K}+\Box p\supset p+\Box p\supset\Box\Box p=\mathcal{K}\{(0,0,1,0),(0,2,1,0)\}$

$\mathcal{B}=\mathcal{K}+\Box p\supset p+p\supset\Box\Diamond p=\mathcal{K}\{(0,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ etc.

Din considerațiile de mai sus cu privire la modelele canonice rezultă că acestea reprezintă un instrument util pentru demonstrarea completitudinii sistemelor modale (cf. *Teoremele* 1-7, 4.3.3). Analiza centrată pe ideea convergenței, conjugată cu modelele canonice, ne permite derivarea teoremelor de corectitudine și completitudine pentru sistemele modale. Din *Teoremele* 10 și 11 obținem direct aceste rezultate, adică

Teorema 12

1. $\vdash_{\mathcal{K}}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model.*

2. $\vdash_{\mathcal{T}}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model reflexiv.*

3. $\vdash_{\mathcal{K}4}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model tranzitiv.*

4. $\vdash_{\mathcal{S}4}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model reflexiv și tranzitiv.*

5. $\vdash_{\mathcal{S}5}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model reflexiv și euclidian.*

6. $\vdash_{\mathcal{B}}\alpha$ *ddacă* α *este validă în orice model reflexiv și simetric.*

Cum $\Box p\supset\Box\Box p$ este demonstrabilă în $\mathcal{GL}$ (comp. $\mathbf{GL}_1$, 4.1.2), rezultă că în $\mathcal{GL}$ este demonstrabilă $\Diamond^0\Box^1\alpha\supset\Box^2\Diamond^0\alpha$; de unde deducem, prin *Teorema* 9 că R_c este 0, 2, 1, 0-

conv, adică tranzitivă. Deci modelul canonic al lui $\mathcal{GL}$ este tranzitiv. R_c, pentru modelul canonic al lui $\mathcal{GL}$, nu este însă şi convers bine fondată.

Exerciţii

1. Să se demonstreze *Teorema 11* (1,2,3).

2. Fie α o teoremă a $\mathcal{L}_p{}^{o}$. Fie Γ o mulţime arbitrară de formule modale. Ce putem spune despre Γ dacă $\vdash_S \alpha \supset \neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ şi $\vdash_S \alpha \supset \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$, unde $\alpha_1, ..., \beta_m \in \Gamma$?

3. Să se demonstreze că dacă Γ este o mulţime max $\mathcal{S}$-con de formule, atunci

a) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ ddacă $\alpha \in \Gamma$ şi $\beta \in \Gamma$

b) $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ ddacă $\alpha \in \Gamma$ sau $\beta \in \Gamma$

c) $\alpha / \beta \in \Gamma$ ddacă $\alpha \notin \Gamma$ sau $\beta \notin \Gamma$

d) $\alpha \downarrow \beta \in \Gamma$ ddacă $\alpha \notin \Gamma$ şi $\beta \notin \Gamma$

4. Să se demonstreze completitudinea sistemului modal $\mathcal{S}4.3$ în raport cu orice $\mathcal{S}4.3$ - cadru.

4.4. Modele finite

În demonstraţiile de completitudine a sistemelor modale, făcute în 4.3.3, am utilizat conceptul de model canonic. Am arătat astfel că modelele canonice au proprietatea remarcabilă $\mathcal{C}an$ potrivit căreia aceste modele validează *toate şi numai* teoremele unui sistem modal $\mathcal{S}$. Tot ceea ce trebuia să facem în demonstrarea completitudinii unui sistem modal era să arătăm că cadrul modelului canonic are toate proprietăţile unui $\mathcal{S}$-cadru arbitrar. În felul acesta, dacă o formulă α era $\mathcal{S}$-validă, atunci ea era validă în orice $\mathcal{S}$-cadru (în acord cu definiţia $\mathcal{S}$-validităţii) şi deci era validă şi în cadrul modelului canonic. De unde, prin $\mathcal{C}an$, conchideam asupra demonstrabilităţii ei în $\mathcal{S}$. În toate aceste cazuri cadrul modelului *canonic* al lui $\mathcal{S}$ este şi un cadru pentru $\mathcal{S}$.

Definiţia 1. Un sistem modal $\mathcal{S}$ se numeşte canonic *ddacă cadrul modelului canonic al sistemului $\mathcal{S}$ este şi un cadru pentru $\mathcal{S}$; în caz contrar se numeşte* non-canonic.

Toate sistemele modale analizate în 4.3.3 sunt sisteme canonice. Însă în logica modală întâlnim şi cazuri în care cadrul modelului canonic al unui sistem $\mathcal{S}$ *nu* este şi un cadru pentru $\mathcal{S}$ (i.e. sisteme non-canonice). Un astfel de caz este sistemul modal $\mathcal{GL}$.

Chiar dacă $\mathcal{GL}$ nu este un sistem canonic, el este totuşi un sistem complet, adică orice formulă validă a sistemului este demonstrabilă în sistemul însuşi. Însă demonstraţia acestui lucru n-o putem face cu ajutorul modelelor canonice, ci cu ajutorul *modelelor finite.* Această metodă de demonstraţie este valabilă şi pentru celelalte sisteme modale, analizate în 4.3.3 (fără a fi totuşi valabilă pentru orice sistem!).

Construcţia modelului finit este similară, în multe privinţe, construcţiei modelului canonic. Schematic, demonstraţia completitudinii unui sistem modal $\mathcal{S}$ cu ajutorul modelelor finite se desfăşoară astfel. Trebuie să demonstrăm că dacă α este validă într-un $\mathcal{S}$-cadru finit arbitrar $\langle W, R \rangle_\alpha$; echivalent: α este validă în orice model finit $\langle W, R, V \rangle_\alpha$ bazat pe $\langle W, R \rangle_\alpha$, atunci α este demonstrabilă în $\mathcal{S}$, adică

$\mathcal{C}ompl$ *Dacă* $\models_{\mathcal{M}fin} \alpha$, *atunci* $\vdash_S \alpha$,

unde $\mathcal{M}fin$ este un model finit arbitrar $\langle W, R, V \rangle_\alpha$ bazat pe un cadru arbitrar $\langle W, R \rangle_\alpha$. Însă, prin contrapoziţie $\mathcal{C}ompl$ devine, echivalent,

Dacă non$\vdash_S \alpha$*, atunci non* $\models_{Mfin} \alpha$.

Însă dacă *non* $\vdash_S \alpha$ (i.e. α nu este o teoremă a lui S), atunci $\{\neg\alpha\}$ este S-consistentă şi deci este inclusă într-o mulţime maximal S-consistentă Γ, $\neg\alpha \subseteq \Gamma$. Cum $\neg\alpha \in \Gamma$ iar Γ este max S-con rezultă că $\alpha \notin \Gamma$, echivalent $V(\alpha) = 0$ (prin *Lema* 1 de mai jos) şi astfel α este falsă în *Mfin* şi astfel α nu este o formulă validă în $\langle W, R \rangle_\alpha$ (i.e. teorema de completitudine).

Asemănările dintre *Mfin* şi *Mcan* sunt evidente. Pentru a explicita complet deosebirile şi deci modul în care construim un *Mfin* vom analiza mai întâi conceptele aferente.

Un model în care α este falsificabilă nu trebuie să considere toate formulele logicii modale (caz în care el este infinit), căci valoarea de adevăr a formulei α depinde strict de valorile de adevăr ale subformulelor sale, în diferite lumi, iar numărul subformulelor oricărei formule modale este *finit*.

Fie S un sistem de logică modală propoziţională iar α o formulă modală. Fie $A_\alpha = \{\beta$: β este o subformulă a lui $\alpha\}$. Dacă, de exemplu, α este formula $\Box(p \supset q) \supset \Box(\neg p \vee \Diamond(q \wedge \neg r))$, atunci $A_\alpha = \{\Box(p \supset q) \supset \Box(\neg p \vee \Diamond(q \wedge \neg r))$, $\Box(p \supset q)$, $\Box(\neg p \vee \Diamond(q \wedge \neg r))$, $p \supset q$, $\neg p \vee \Diamond(q \wedge \neg r)$, p, q, $\neg p$, $\Diamond(q \wedge \neg r)$, $q \wedge \neg r$, $\neg r$, $r\}$. Fie acum $A_\alpha^{\cup} = A_\alpha \cup \{\neg\beta : \beta \in A_\alpha\}$.

Cum numărul subformulelor oricărei formule α este finit, rezultă că există doar un număr finit de mulţimi de subformule. Aşadar, A_α este finită şi deci $A_\alpha^{\cup}$ este finită.

Definiţia 2. O mulţime Γ *de formule se numeşte α-* S *-consistentă (α-* S *-con) dacă*

1. $\Gamma \subseteq A_\alpha^{\cup}$
2. *Dacă* $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, *atunci non* $\vdash_S \neg\{\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n\}$.

Definiţia 3. O mulţime Γ *de formule se numeşte α-maximal-* S *-consistentă (α-max-* S *-con) dacă*

1. Γ *este α-* S *-con*
2. *Pentru orice* $\beta \in A_\alpha$, *fie* $\beta \in \Gamma$, *fie* $\neg\beta \in \Gamma$ *(α-maximalitate).*

Lema 1. Dacă Γ *este α-max-* S *-con, atunci*

1. *Dacă* $\beta \in A_\alpha$, *atunci* exact unul *din elementele mulţimii* $\{\beta, \neg\beta\}$ *aparţine lui* Γ.
2. *Dacă* $\beta \supset \gamma \in A_\alpha$, *atunci* $\beta \supset \gamma \in \Gamma$ *ddacă* $\beta \notin \Gamma$ *sau* $\gamma \in \Gamma$.

Demonstraţie (exerciţiu) [24].

Lema 2. Orice mulţime α *-* S *-consistentă* $B \subseteq A_\alpha^{\cup}$ *poate fi extinsă într-o mulţime α-max-* S *-con* Γ, *astfel că* $B \subseteq \Gamma$.

Demonstraţie. Procedăm similar demonstraţiei *Lemei 3*, din 4.3.1. Adică construim mulţimea Γ în felul următor: ordonăm formulele mulţimii $A_\alpha^{\cup}$ într-un şir $\beta_1, \ldots, \beta_n$ şi punem $\Gamma_0 = B$, iar pentru orice $0 \le i \le n$ construim mulţimea $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta_{i+1}\}$ dacă aceasta este consistentă. Dacă nu, atunci Γ_{i+1} va fi $\Gamma_i \cup \{\neg\beta_{i+1}\}$. Apoi arătăm că $\Gamma_n = \Gamma$ este consistentă (exerciţiu).

Componentele modelului finit $\langle W, R, V \rangle_\alpha$ sunt aşadar următoarele:

---

[24] Aceste rezultate sunt similare rezultatelor corespunzătoare din 4.3. Singura deosebire rezidă în faptul că mulţimile α-max- S -con sunt mulţimi *finite* de formule din $A_\alpha^{\cup}$.

W este mulţimea (finită) a tuturor mulţimilor α-max-$\mathcal{S}$-consistente. Dacă α nu este o formulă demonstrabilă în $\mathcal{S}$ rezultă că negaţia ei, $\neg\alpha$, este o formulă α-$\mathcal{S}$-con şi deci inclusă într-o mulţime α-max-$\mathcal{S}$-con w^{**} şi astfel W este nevidă.

R, relaţia de accesibilitate, va fi definită în raport cu sistemul modal considerat astfel încât să satisfacă următoarele două condiţii:

Cond. 1. $\langle W, R\rangle_\alpha$ este un $\mathcal{S}$-cadru.

Cond. 2. Pentru orice subformulă $\beta\in A_\alpha$ şi pentru orice $w\in W$: $\Box\beta\in w$ ddacă pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta\in w^*$.

V, funcţia evaluare, o definim astfel: $V(p,w)=1$ ddacă $p\in W$, pentru orice $w\in W$ şi pentru orice variabilă propoziţională $p\in A_\alpha$; în caz contrar p ia o valoare arbitrară.

Presupunem acum că R a fost astfel definită încât satisface cele două condiţii. Fie $M=\langle W,R,V\rangle_\alpha$ un model finit bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle_\alpha$. Demonstrăm în continuare o lemă care conectează echivalent adevărul într-o lume cu apartenenţa la acea lume.

Lema 3. Pentru orice $\beta\in A_\alpha$ *şi pentru orice* $w\in W$: $\beta\in w$ *ddacă* $V(\beta,w)=1$.

Demonstraţie. Pentru variabilele propoziţionale din A_α rezultatul este imediat, prin construcţia funcţiei evaluare.

Presupunem că $\gamma\supset\delta\in A_\alpha$ şi presupunem că lema este valabilă pentru γ şi δ (inducţie structurală). Cum $\gamma\supset\delta\in A_\alpha$ rezultă că $\gamma,\delta\in A_\alpha$. Întrucât în $\mathcal{S}$ sunt demonstrabile următoarele formule din logica propoziţiilor: $\neg(\gamma\supset\delta)\supset\gamma$, $\neg(\gamma\supset\delta)\supset\neg\delta$ şi $\gamma\supset(\neg\delta\supset\neg(\gamma\supset\delta))$, avem: $\gamma\supset\delta\notin w$ ddacă $\neg(\gamma\supset\delta)\in w$ ddacă $\gamma\in w$ şi $\neg\delta\in w$ ddacă $\gamma\in w$ şi $\delta\notin w$ (α-max-$\mathcal{S}$-con) ddacă $V(\gamma,w)=1$ şi $V(\delta,w)=0$ (prin ipot. ind.) ddacă $V(\gamma\supset\delta,w)=0$. De aici rezultatul: $\gamma\supset\delta\in w$ ddacă $V(\gamma\supset\delta,w)=1$.

Presupunem, în fine, că $\Box\gamma\in A_\alpha$ şi că lema este valabilă pentru γ. Cum $\Box\gamma\in A_\alpha$, rezultă că $\gamma\in A_\alpha$. Însă prin *Cond. 2* $\Box\gamma\in A_\alpha$ ddacă pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\gamma\in w^*$. Cum lema e valabilă pentru γ iar $\gamma\in A_\alpha$ rezultă că $V(\gamma,w^*)=1$ (prin ipot. ind.). Şi deci $\Box\gamma\in w$ ddacă pentru orice $w^*\in W$ astfel că wRw^*, $V(\gamma,w^*)=1$ ddacă $V(\Box\gamma,w)=1$.

Rezultatele de până aici arată următoarele: cum w^{**} este o mulţime α-max-$\mathcal{S}$-con din W iar $\neg\alpha\in w^{**}$, rezultă că $\alpha\notin w^{**}$ şi deci, prin *Lema 3*, $V(\alpha,w^{**})=0$. α este deci falsă în modelul finit $\langle W,R,V\rangle_\alpha$ şi deci α nu este validă în cadrul finit $\langle W,R\rangle_\alpha$ care este un $\mathcal{S}$-cadru (prin *Cond. 1*).

Relaţia de accesibilitate, spuneam mai sus, este relativă la sistemul modal considerat. Însă pentru toate sistemele ea trebuie să respecte cele două condiţii specificate.

Pentru *sistemul modal* $\mathcal{K}$ relaţia R se defineşte astfel[25]:

wRw^* *ddacă pentru orice* $\Box\beta\in w$, $\beta\in w^*$,

(echivalent: wRw^* *ddacă* $w_\beta\subseteq w^*$)

Prima condiţie este automat îndeplinită, deoarece orice cadru este un $\mathcal{K}$-cadru. Verificarea celei de-a doua condiţii înseamnă verificarea satisfacerii următoarelor enunţuri condiţionale: a) Dacă $\Box\beta\in w$, atunci pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta\in w^*$ (pentru orice $\beta\in A_\alpha$ şi pentru orice $w\in W$).

[25] Pentru $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{D}$ definiţia lui R este cea din modelele canonice.

b) (Conversa lui a). Dacă pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta \in w^*$, atunci $\Box\beta \in w$ (pentru orice $\beta \in A_\alpha$ şi pentru orice $w \in W$); echivalent (prin contrapoziţie): Dacă $\Box\beta \notin w$, atunci există w^* astfel că wRw^* şi $\beta \notin w^*$ (pentru orice $\beta \in A_\alpha$ şi pentru orice $w \in W$).

Valabilitatea lui a) rezultă imediat din definiţia lui R. Căci din echivalenţa conţinută în definiţie rezultă că dacă wRw^* are loc şi $\Box\beta \in w$, atunci $\beta \in w^*$. Acum trebuie să arătăm că pe baza definiţiei lui R are loc b): Dacă $\Box\beta \notin w$, atunci există w^* astfel că wRw^* şi $\beta \notin w^*$.

Fie $\Gamma = \{\neg\beta\} \cup \{\gamma : \Box\gamma \in w\}$ (i.e. $\Gamma = \{\neg\beta\} \cup w_\gamma$)

Γ este α-$\mathcal{K}$-consistentă. Căci în caz contrar, ar exista $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in w$ (astfel că $\Box\gamma_1,\ldots,\Box\gamma_n$ sunt toate formulele de forma $\Box\gamma$ care aparţin lui w), astfel încât

$\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\neg\beta \wedge \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$ şi deci

$\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \vee \beta$

$\vdash_{\mathcal{K}} (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \supset \beta$

$\vdash_{\mathcal{K}} \Box(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \supset \Box\beta$; $\mathbf{R}_3$

$\vdash_{\mathcal{K}} (\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n) \supset \Box\beta$; $\mathbf{K}_4^*$

Cum $\Box\gamma_1,\ldots,\Box\gamma_n \in w$ iar $\Box\beta \in A_\alpha$ rezultă că $\Box\beta \in w$. Şi deci, din presupoziţia inconsistenţei mulţimii Γ am dedus $\Box\beta \in w$. Prin contrapoziţie obţinem aşadar demonstraţia consistenţei lui Γ: dacă $\Box\beta \notin w$, atunci $\Gamma \subseteq A_\alpha^\cup$ este α-$\mathcal{K}$-consistentă. Însă prin *Lema 2* există o mulţime α-max-$\mathcal{S}$-con w^*, astfel încât $\Gamma \subseteq w^*$ şi cum $\neg\beta \in w^*$ rezultă că $\beta \notin w^*$.

Definiţia relaţiei R pentru *sistemul modal* $\mathcal{T}$: la fel ca pentru sistemul $\mathcal{K}$. Trebuie să verificăm doar că definiţia lui R satisface prima condiţie, adică $\langle W, R\rangle_\alpha$ este un $\mathcal{T}$-cadru (i.e. un cadru reflexiv), adică R este o relaţie reflexivă pe W. Trebuie să arătăm aşadar că pentru orice $w \in W$ şi $\Box\beta \in w$: dacă $\Box\beta \in w$, atunci $\beta \in w$, echivalent $w_\beta \subseteq w$. Însă întrucât $\vdash_{\mathcal{T}} \Box\beta \supset \beta$, rezultă că dacă $\Box\beta \in w$, atunci $\beta \in w$.

Remarcă. Dacă α nu conţine nici un operator modal, atunci, evident, α nu conţine nici o formulă de forma $\Box\beta$, caz în care mulţimea w_β este vidă şi deci $w_\beta \subseteq w$. Faptul că $w_\beta \subseteq w$ are loc îl putem argumenta astfel. Presupunem că $w_\beta \notin w$. În acest caz există o formulă $\beta \in A_\alpha$ astfel încât $\Box\beta \in w$ dar $\beta \notin w$. Cum $\beta \notin w$ rezultă că $\neg\beta \in w$. Aşadar, $\{\Box\beta, \neg\beta\} \subseteq w$. Însă atunci w este α-$\mathcal{T}$-inconsistentă, căci $\vdash_{\mathcal{T}} \Box\beta \supset \beta$, echivalent $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\Box\beta \vee \beta$, echivalent $\vdash_{\mathcal{T}} \neg(\Box\beta \wedge \neg\beta)$.

Definiţia relaţiei R pentru *sistemul modal* $\mathcal{D}$: la fel ca pentru sistemul $\mathcal{K}$. De data aceasta însă trebuie să verificăm că $\langle W, R\rangle_\alpha$ este un $\mathcal{D}$-cadru, adică R este o relaţie *serială* pe W. Reamintim că R se numeşte serială pe W dacă pentru orice $w \in W$ există $w^* \in W$ astfel că wRw^*. Demonstraţia faptului că R este serială o facem prin *reductio ad absurdum*. Presupunem că R *nu* este serială. Există aşadar $w \in W$, astfel că nu există nici o lume $w^* \in W$ astfel că wRw^* (i.e. $w_\beta \subseteq w^*$). Vom arăta că în acest caz şi w este inconsistentă. Faptul că nu există nici o lume w^* astfel că wRw^* (i.e. $w_\beta \subseteq w^*$) este echivalent cu asertarea *inconsistenţei mulţimii* w_β. Există aşadar formule $\Box\beta_1,\ldots,\Box\beta_n \in w$ astfel încât

1. $\vdash_{\mathcal{D}} \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n)$ şi deci

2. $\vdash_{\Phi} \Box\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$; prin regula necesitării **N**

3. $\vdash_{\Phi} \Box\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \Diamond\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$; prin **AxD** şi **Subst**

4. $\vdash_{\Phi} \Diamond\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$; 2, 3 **MP**

5. $\vdash_{\Phi} \neg\Box(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$; 4 **Intersch**

6. $\vdash_{\Phi} \neg(\Box\beta_1 \wedge ... \wedge \Box\beta_n)$; 5, $\mathbf{K}_4^*$

Însă $\{\Box\beta_1, ..., \Box\beta_n\} \subseteq w$, ceea ce face w inconsistentă. De unde conchidem că R este serială.

Definiția relației R pentru *sistemul modal* $\mathcal{K}4$. Atunci când am arătat că în sistemul $\mathcal{K}4$ relația R este tranzitivă ne-am prevalat de axioma **4**, astfel: dacă $\Box\beta \in w$, atunci prin ax. **4** ($\Box p \supset \Box\Box p$) şi **Subst** am dedus că $\Box\Box\beta \in w$ şi deci dacă wRw^*, atunci $\Box\beta \in w^*$, iar dacă w^*Rw^{**}, atunci $\beta \in w^{**}$ şi deci dacă $\Box\beta \in w$, atunci $\beta \in w^{**}$ şi deci wRw^{**} (deci R este tranzitivă) (cf. 4.3.3). Această deducție însă nu mai este valabilă aici. Explicația este simplă: din faptul că $\Box\beta \in A_\alpha$ nu rezultă că $\Box\Box\beta \in A_\alpha$. Motiv pentru care va trebui să introducem o definiție adecvată a relației R în aşa fel încât R să fie tranzitivă. Definiția este următoarea:

wRw^* ddacă pentru orice $\Box\beta \in w$: $\Box\beta, \beta \in w^*$

Astfel definită relația R este în mod clar tranzitivă. Deci *Cond. 1* este satisfăcută. Aşadar, $\langle W, R\rangle_\alpha$ este un $\mathcal{K}4$-cadru.

Arătăm acum că R satisface şi *Cond. 2*. Avem de demonstrat, aşadar, cele două condiționale:

a) Pentru orice formulă $\beta \in A_\alpha$ şi pentru orice $w \in W$: Dacă $\Box\beta \in w$, atunci pentru orice $w^* \in W$, astfel că wRw^*, avem $\beta \in w^*$. Însă acest lucru rezultă direct din def. lui R.

b) Pentru orice formulă $\beta \in A_\alpha$ şi pentru orice $w \in W$: Dacă pentru orice $w^* \in W$, astfel că wRw^*, $\beta \in w^*$, atunci $\Box\beta \in w$. Echivalent (prin contrapoziție): Dacă $\Box\beta \notin w$, atunci există $w^* \in W$, astfel că wRw^* şi $\beta \notin w^*$.

Demonstrație. Presupunem că $\Box\beta \notin w$. Vom arăta că în acest caz că $\beta \notin w^*$.

Fie acum mulțimea $\Gamma = \{\neg\beta\} \cup \{\gamma : \Box\gamma \in w\} \cup \{\Box\gamma : \Box\gamma \in w\}$. Arătăm mai întâi că Γ este α-$\mathcal{K}4$-con. Presupunem că Γ nu este α-$\mathcal{K}4$-con. Atunci:

1. $\vdash_{\mathcal{K}4} \neg(\neg\beta \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n)$, adică

2. $\vdash_{\mathcal{K}4} \neg(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \vee \neg\neg\beta$; 1, $\mathbf{L_p}$

3. $\vdash_{\mathcal{K}4} (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \supset \beta$; 2, $\mathbf{L_p}$

4. $\vdash_{\mathcal{K}4} \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \supset \Box\beta$; 3, $\mathbf{R_3}$

5. $\vdash_{\mathcal{K}4} (\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \Box\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\Box\gamma_n) \supset \Box\beta$; 4, $\mathbf{K}_4^*$

6. $\vdash_{\mathcal{K}4} [\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \wedge \Box(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n)] \supset \Box\beta$; 5, $\mathbf{K}_4^*$

7. $\vdash_{\mathcal{K}4} [\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \wedge (\Box\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\Box\gamma_n)] \supset \Box\beta$; 6, $\mathbf{K}_4^*$

8. $\vdash_{\mathcal{K}4} \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)$; din **4**

9. $\vdash_{\mathcal{K}4} \{[(p \wedge q) \supset r] \wedge (p \supset q)\} \supset (p \supset r)$; $\mathbf{L_p}$

10. $\vdash_{\mathcal{K}4} \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box\beta$; 7, 8, 9, prin subst: *p*/$\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)$, *q*/$\Box\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\Box\gamma_n$, *r*/$\Box\beta$

11. $\vdash_{\mathcal{K}4} (\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \supset \Box\beta$; 10, $\mathbf{K}_4^*$

Fiindcă $\Box\gamma_1,...,\Box\gamma_n$ sunt toate formule din w, rezultă că şi $\Box\beta\in w$. Aşadar, din presupoziţia inconsistenţei mulţimii Γ a rezultat $\Box\beta\in w$. De unde, prin contrapoziţie, obţinem: dacă $\Box\beta\notin w$ atunci Γ este α-$\mathcal{K}4$-con. Şi deci este inclusă într-o mulţime α-max-$\mathcal{K}4$-con w^*. Întrucât $\neg\beta\in\Gamma$, rezultă că $\neg\beta\in w^*$ şi deci $\beta\notin w^*$.

Definirea relaţiei R pentru *sistemul modal* $\mathcal{S}4$: este aceeaşi ca pentru sistemul $\mathcal{K}4$. Va trebui să arătăm că R este reflexivă pe W, adică $\langle W,R\rangle$ este un $\mathcal{S}4$-cadru. Cum $\mathcal{S}4=\mathcal{T}+\mathbf{4}$, argumentul reflexivităţii lui R, dat pentru sistemul $\mathcal{T}$, este valabil şi aici.

Definirea relaţiei R pentru *sistemul modal* $\mathcal{B}$:

wRw^* ddacă pentru orice $\Box\beta\in w$, $\beta\in w^*$ şi pentru orice $\Box\beta\in w^*$, $\beta\in w$, (echivalent $w_\beta\subseteq w^*$ şi $w^*_\beta\subseteq w$).

Reflexivitatea şi simetria relaţiei R sunt evidente, aşadar $\langle W,R\rangle$ este un $\mathcal{B}$-cadru. Trebuie să arătăm că R satisface şi *Cond. 2*. Vom proceda similar cazurilor precedente.

a) Pentru orice $\beta\in A_\alpha$ şi pentru orice $w\in W$: Dacă $\Box\beta\in w$, atunci pentru orice $w^*\in W$, astfel că wRw^*, $\beta\in w^*$. Aceasta rezultă imediat din definiţia lui R.

b) Dacă $\Box\beta\notin w$, atunci există w^* astfel că wRw^* şi $\beta\notin w^*$.

Presupunem că $\Box\beta\notin w$. Fie acum mulţimea $\Gamma=\{\neg\beta\}\cup\{\gamma:\Box\gamma\in w\}\cup\{\neg\Box\delta:\neg\delta\in w\}$ astfel încât $\Box\delta\in A_\alpha$. Vom arăta că Γ este o mulţime α-$\mathcal{B}$-con. Presupunem contrariul. Aşadar,

1. $\vdash_{\mathcal{B}}\neg(\neg\beta\wedge\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n\wedge\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\neg\Box\delta_m)$, respectiv
2. $\vdash_{\mathcal{B}}(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n\wedge\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\neg\Box\delta_m)\supset\beta$; 1, $\mathbf{L_p}$
3. $\vdash_{\mathcal{B}}\Box(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n\wedge\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\neg\Box\delta_m)\supset\Box\beta$; 2, $\mathbf{R_3}$
4. $\vdash_{\mathcal{B}}[\Box(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n)\wedge\Box(\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\neg\Box\delta_m)]\supset\Box\beta$; 3, $\mathbf{K}_4^*$
5. $\vdash_{\mathcal{B}}[\Box(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n)\wedge(\Box\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\Box\neg\Box\delta_m)]\supset\Box\beta$; 4, $\mathbf{K}_4^*$
6. $\vdash_{\mathcal{B}}p\supset\Box\Diamond p$; **B**
7. $\vdash_{\mathcal{B}}\neg\delta_i\supset\Box\Diamond\neg\delta_i$; 6 $p/\neg\delta_i$
8. $\vdash_{\mathcal{B}}\neg\delta_i\supset\Box\neg\Box\delta_i$; 7, **Intersch**
9. $\vdash_{\mathcal{B}}(\neg\delta_1\wedge...\wedge\neg\delta_m)\supset\Box\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\Box\neg\Box\delta_m$; 8, $\mathbf{L_p}$
10. $\vdash_{\mathcal{B}}\{[(p\wedge q)\supset r]\wedge(s\supset q)\}\supset[(p\wedge s)\supset q]$; $\mathbf{L_p}$
11. $\vdash_{\mathcal{B}}[\Box(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n)\wedge(\neg\delta_1\wedge...\wedge\neg\delta_m)]\supset\Box\beta$; 5, 9, prin 10, $p/\Box(\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_n)$, $q/\Box\neg\Box\delta_1\wedge...\wedge\Box\neg\Box\delta_m$, $r/\Box\beta$, $s/\neg\delta_1\wedge...\wedge\neg\delta_m$, **MP**
12. $\vdash_{\mathcal{B}}(\Box\gamma_1\wedge...\wedge\Box\gamma_n\wedge\neg\delta_1\wedge...\wedge\neg\delta_m)\supset\Box\beta$; 11 $\mathbf{K}_4^*$

Fiindcă $\Box\gamma_1,...,\Box\gamma_n$, $\neg\delta_1,...,\neg\delta_m\in w$, rezultă că $\Box\beta\in w$. Aşadar, din presupoziţia inconsistenţei lui Γ am obţinut $\Box\beta\in w$. De unde, prin contrapoziţie, rezultă că dacă $\Box\beta\notin w$ atunci Γ este α-$\mathcal{B}$-consistentă. De unde, prin *Lema 2*, Γ poate fi extinsă într-o mulţime α-max-$\mathcal{B}$-consistentă w^*. Însă, cum $\neg\beta\in\Gamma$, rezultă că $\neg\beta\in w^*$ şi deci $\beta\notin w^*$. Mai mult, dacă $\Box\gamma\in w$, atunci $\gamma\in w^*$.

Pentru *sistemul modal* $\mathcal{S}5$ R se defineşte astfel:

wRw^* ddacă pentru orice $\Box\beta$: $\Box\beta\in w$ ddacă $\Box\beta\in w^*$

Din definiție rezultă că R este o relație de echivalență. Va trebui să arătăm că R satisface și *Cond.* 2, respectiv:

a) Dacă $\Box\beta \in w$, atunci pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta \in w^*$.

Presupunem că $\Box\beta \in w$. Atunci dacă wRw^* avem $\Box\beta \in w^*$ (din def. lui R). Cum $\mathcal{S5}$ este o extensie proprie a sistemului $\mathcal{T}$, formula $\Box\beta \supset \beta$ este o teoremă a lui $\mathcal{S5}$. Și deci $\beta \in w^*$.

b) Dacă pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta \in w^*$ atunci $\Box\beta \in w$. Echivalent: Dacă $\Box\beta \notin w$, atunci există w^* astfel că wRw^* și $\beta \notin w^*$.

Presupunem că $\Box\beta \notin w$. Fie $\Gamma = \{\neg\beta\} \cup \{\Box\gamma : \Box\gamma \in w\} \cup \{\neg\Box\delta : \neg\Box\delta \in w\}$. Mulțimea Γ este α-$\mathcal{S5}$-consistentă, căci, în caz contrar

1. $\vdash_{S5} \neg(\neg\beta \wedge \Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\delta_m)$, unde $\Box\gamma_1, \ldots, \Box\gamma_n$ sunt toate formulele de forma $\Box\gamma$ din w iar $\neg\Box\delta_1, \ldots, \neg\Box\delta_m$ sunt toate formulele de forma $\neg\Box\delta$ din w, și deci

2. $\vdash_{S5} \neg(\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\delta_m) \vee \neg\neg\beta$; 1, $\mathbf{L_p}$
3. $\vdash_{S5} (\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\delta_m) \supset \beta$; 2, $\mathbf{L_p}$
4. $\vdash_{S5} \Box(\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\delta_m) \supset \Box\beta$; 3, $\mathbf{R_3}$
5. $\vdash_{S5} (\Box\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box\gamma_n \wedge \Box\neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box\delta_m) \supset \Box\beta$; 4, $\mathbf{K_4^*}$, **Inloc**
6. $\vdash_{S5} \Box\gamma \supset \Box\Box\gamma$; cf. exercițiul 1 ($\mathcal{S5}$), 4.1.
7. $\vdash_{S5} \Diamond\delta \supset \Box\Diamond\delta$; din **Ax5**, **Subst**
8. $\vdash_{S5} \Diamond\neg\delta \supset \Box\Diamond\neg\delta$; 7, $\delta/\neg\delta$
9. $\vdash_{S5} \neg\Box\delta \supset \Box\neg\Box\delta$; 8, **Intersch**
10. $\vdash_{S5} (\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\delta_m) \supset \Box\beta$; 3, 4, 5 prin 7, 9, $\mathbf{L_p}$, **MP**

De unde deducem $\Box\beta \in w$. Așadar, dacă $\Box\beta \notin w$, Γ este o mulțime α-$\mathcal{S}_5$-con. Și deci există o mulțime α-max-$\mathcal{S}_5$-con w^*, astfel că $\Gamma \subseteq w^*$. Cum $\neg\beta \in w^*$ rezultă că $\beta \notin w^*$.

Mai mult, cum $\Gamma \subseteq w^*$ conține toate formulele $\Box\gamma_1, \ldots, \Box\gamma_n$ rezultă că dacă $\Box\gamma \in w$, atunci $\Box\gamma \in w^*$. Iar dacă $\Box\delta \in w^*$, atunci $\Box\delta \in w$ (căci în caz contrar $\Box\delta \notin w$ și deci $\neg\Box\delta \in w$ și deci w^* ar fi inconsistentă, căci $\neg\Box\delta \in \Gamma$ iar $\Gamma \subseteq w^*$. Și deci wRw^* are loc.

În fine, pentru *sistemul modal* $\mathcal{GL}$ R se definește astfel:

wRw^* ddacă pentru $\Box\beta \in w$: $\Box\beta \in w^*$, $\beta \in w^*$ și există $\Box\delta \in w^*$ astfel că $\neg\Box\delta \in w$

Verificarea primei condiții: R este tranzitivă. Presupunem wRw_1 și w_1Rw_2. Dacă $\Box\gamma \in w$, atunci $\Box\gamma \in w_1$ și deci $\Box\gamma \in w_2$ și $\gamma \in w_2$. Cum wRw_1 rezultă că pentru $\Box\delta \in w_1$, $\neg\Box\delta \in w$; cum w_1Rw_2 rezultă că $\Box\delta \in w_2$ și deci wRw_2 are loc.

R este ireflexivă, căci dacă wRw, atunci pentru $\Box\delta$ vom avea $\neg\Box\delta \in w$ și $\Box\delta \in w$, adică w ar fi inconsistentă. Așadar, R este ireflexivă și tranzitivă și deci cadrul $\langle W, R\rangle$ este finit, ireflexiv și tranzitiv. Însă $\langle W, R\rangle$ este $\mathcal{GL}$-cadru ddacă $\langle W, R\rangle$ este tranzitiv și convers bine-fondat (*Teorema* 4, 4.2.3). Trebuie să mai arătăm că orice cadru finit, ireflexiv și tranzitiv este un cadru tranzitiv și convers bine-fondat. Mai exact, dacă $\langle W, R\rangle$ este finit și tranzitiv atunci ireflexivitatea este co-extensivă cu convers bine-fondat.

Lema 4. Dacă $\langle W,R\rangle$ este finit şi tranzitiv, atunci: $\langle W,R\rangle$ este ireflexiv ddacă $\langle W,R\rangle$ este convers bine-fondat.

Din faptul că R este convers bine-fondată rezultă imediat că R este ireflexivă. Căci dacă R ar fi reflexivă, i.e. wRw, atunci $\{w\}$ este o mulţime nevidă din W fără cel mai mare R-element. Iar dacă R este ireflexivă, atunci pentru orice şir de elemente $w_1,...,w_n$ din W astfel că w_iRw_{i+1} (pentru orice $i<n$), dacă $i<j$, atunci $x_i \neq x_j$ (căci în caz contrar $x_i = x_j$ şi deci x_iRx_i are loc şi deci R ar fi reflexivă).

Trebuie să arătăm că dacă R este ireflexivă, atunci R este convers bine-fondată. Presupunem, sub asumpţia că $\langle W,R\rangle$ este finit, că R este ireflexivă şi nu este convers bine-fondată. Fie $\Gamma \subseteq W$ o mulţime nevidă Γ fără cel mai mare R-element, echivalent $\forall w \in \Gamma$ $\exists w^* \in \Gamma: wRw^*$ (comp. *Def. 4*, 4.2.3.). Şi deci pentru orice $n>0$ există un şir de elemente $w_1,...,w_n$ ale lui Γ astfel că w_iRw_{i+1} (pentru orice $i<n$). Şi deci pentru orice $n>0$ mulţimea $\Gamma \subseteq W$ are cel puţin n elemente. Aşadar, W este infinită, ceea ce contrazice asumpţia lemei. Şi deci $\langle W,R\rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{GL}$.

Verificarea *Cond. 2.*

a) Dacă $\Box\beta \in w$, atunci pentru orice w^* astfel că wRw^*, $\beta \in w^*$ (rezultat imediat).

b) Dacă $\Box\beta \notin w$, atunci există w^* astfel că wRw^* şi $\beta \notin w^*$.

Fie acum mulţimea $\Gamma = \{\Box\beta, \neg\beta\} \cup \{\Box\gamma : \Box\gamma \in w\} \cup \{\gamma : \Box\gamma \in w\}$. Dacă Γ ar fi α-$\mathcal{GL}$-inc, atunci

1. $\vdash_{\mathcal{GL}} \neg(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \Box\beta \wedge \neg\beta)$;
2. $\vdash_{\mathcal{GL}} \neg(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \vee \neg(\Box\beta \wedge \neg\beta)$; $\mathbf{L_p}$
3. $\vdash_{\mathcal{GL}} (\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset (\Box\beta \supset \beta)$; $\mathbf{L_p}$
4. $\vdash_{\mathcal{GL}} \Box(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box(\Box\beta \supset \beta)$; 3, $\mathbf{R_3}$
5. $\vdash_{\mathcal{GL}} [\Box\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \wedge \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)] \supset \Box(\Box\beta \supset \beta)$; 4, $\mathbf{L_p}$, $\mathbf{K_4^*}$
6. $\vdash_{\mathcal{GL}} \Box p \supset \Box\Box p$; $\mathbf{GL_1}$
7. $\vdash_{\mathcal{GL}} [(p \wedge q) \supset r] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$; $\mathbf{L_p}$
8. $\vdash_{\mathcal{GL}} \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box(\Box\beta \supset \beta)$; 7 $p/\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)$, $q/\Box\Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)$, $r/\Box(\Box\beta \supset \beta)$; 5, 6, ***Subst***, **MP**
9. $\vdash_{\mathcal{GL}} \Box(\Box\beta \supset \beta) \supset \Box\beta$; **W**, p/β
10. $\vdash_{\mathcal{GL}} (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$; $\mathbf{L_p}$
11. $\vdash_{\mathcal{GL}} \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \supset \Box\beta$; 8, 9, 10 **Subst, MP**
12. $\vdash_{\mathcal{GL}} (\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n) \supset \Box\beta$; 11, $\mathbf{K_4^*}$
13. $\vdash_{\mathcal{GL}} \neg(\Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n \wedge \neg\Box\beta)$; 12 $\mathbf{L_p}$

Însă toate aceste formule: $\Box\gamma_1,...,\Box\gamma_n$, $\neg\Box\beta$ sunt formule din w şi astfel w ar fi ea însăşi inconsistentă. Cum Γ este o mulţime α-$\mathcal{GL}$-con rezultă că există o mulţime α-max-$\mathcal{GL}$-con w^* astfel că $\Gamma \in w^*$. Cum $\neg\beta \in \Gamma$ rezultă că $\neg\beta \in w^*$ şi deci $\beta \notin w^*$.

Definiția 4. Un sistem logic $\mathcal{S}$ (modal sau nu) se numește decidabil ddacă există un procedeu efectiv prin care pentru orice formulă α să se poată determina, într-un număr finit de pași, dacă α este sau nu o teoremă a lui $\mathcal{S}$.

Demonstrațiile de completitudine a sistemelor modale avute în vedere mai sus au arătat că toate aceste sisteme sunt decidabile. Într-adevăr, modelele finite constituie un instrument util în a decide dacă α este sau nu o teoremă a unui sistem specificat. Pentru aceasta este suficient să considerăm cele n subformule ale lui α și să construim cele 2^n mulțimi α-consistente de formule (Numărul acestor mulțimi este cel mult 2^n, pentru că nici o mulțime nu va conține atât o subformulă a lui α cât și negația ei). Dacă α nu este o teoremă a lui $\mathcal{S}$, atunci există un model finit $\langle W,R,V\rangle_\alpha$, bazat pe un $\mathcal{S}$-cadru $\langle W,R\rangle_\alpha$ în care α este falsă. W va conține toate cele 2^n mulțimi α- $\mathcal{S}$-max-con, R este definită în raport cu sistemul considerat, iar V este funcția evaluare astfel că $V(p,m)=1$ ddacă p este o variabilă din α. α va fi o teoremă a lui $\mathcal{S}$ ddacă α este validă în orice $\langle W,R\rangle_\alpha$, i.e. α este validă în orice model $\langle W,R,V\rangle_\alpha$ bazat pe cadrul $\langle W,R\rangle_\alpha$. Cum există un procedeu de construire a tuturor acestor modele pe baza formulei α (numărul lor fiind finit) și de verificare a validității lui α în fiecare model finit, rezultă că $\mathcal{S}$ este un sistem decidabil.

Incompletitudinea sistemului $\mathcal{KH}$

Sistemul modal $\mathcal{KH}$ este format din sistemul modal $\mathcal{K}$ plus axioma specifică, **H**: $\Box(\Box p \equiv p) \supset \Box p$. Spre deosebire de sistemele mai sus investigate, acesta este unul *incomplet* (i.e. există o formulă $\mathcal{KH}$-validă și care nu este teoremă a sistemului $\mathcal{KH}$).

Lema 1. Dacă **H**: $\Box(\Box p \equiv p) \supset \Box p$ *este validă într-un cadru arbitrar* $\langle W,R\rangle$, *atunci* 4: $\Box p \supset \Box\Box p$ *este validă în* $\langle W,R\rangle$.

Demonstrație. (contrapoziție)

Cum 4 este validă în orice cadru tranzitiv, nevaliditatea formulei 4 implică existența $w_1, w_2, w_3 \in W$ astfel că w_1Rw_2, w_2Rw_3 și *non* w_1Rw_3.

Construim, din W, două clase distincte, după cum există sau nu un R-lanț de la o lume $w\in W$ la w_3. În primul caz vom pune $V(p,w)=0$ iar în cel de-al doilea $V(p,w)=1$. Considerăm, așadar, distinct cele două cazuri:

a) Fie așadar $w\in W$ astfel încât există un R-lanț la w_3. În afara cazului în care $w=w_3$, dacă w se află pe R-lanțul ce duce la w_3, există w^* pe același lanț care duce de la w la w_3. Și astfel, $V(p,w)=0$ și $V(p,w^*)=0$; de unde $V(\Box p,w)=0$. Și astfel $V(\Box p \equiv p,w)=1$.

b) Presupunem acum că nu există un asemenea lanț de la w la w_3. Și deci nu există nici un R-lanț de la w^* la w_3, unde w^* este o lume aflată pe R-lanțul de la w la w^*. În acest fel, $V(p,w)=1$ și $V(p,w^*)=1$. Și astfel, $V(\Box p,w)=1$ și $V(\Box p \equiv p,w)=1$.

Și deci $V(\Box p \equiv p,w)=1$ pentru orice $w\in W$ (cu excepția posibilă a lui w_3). Însă *non* w_1Rw_3 și astfel $V(\Box p \equiv p,w)=1$ pentru orice w astfel că w_1Rw. Și astfel $V(\Box(\Box p \equiv p),w_1)=1$. Însă din w_2Rw_3 deducem $V(p,w_2)=0$. Iar din w_1Rw_2 deducem $V(\Box p,w_1)=0$. Și deci, $V(\mathbf{H},w_1)=0$. Și deci ca **H** să fie validă, $\langle W,R\rangle$ trebuie să fie tranzitiv.

Înainte de a demonstra următoarea lemă, facem o mențiune importantă. Până acum am operat cu conceptul *validității într-un model,* ca adevăr în toate lumile modelului. Utilizarea unui asemenea concept necesită însă precauție, deoarece din faptul că o formulă este validă,

într-un model specificat, *nu* rezultă că orice formulă obţinută din această formulă în sistemul modal $\mathcal{K}$, este neaparat validă. Este adevărat, **MP** şi **N** conservă validitatea în modelul respectiv, nu însă şi **Subst**. Să dăm un exemplu. Fie $M = \langle W, R, V \rangle$, în care $W = \{w_1, w_2\}$, are loc $w_1 R w_2$ şi *non* $w_i R w_i$ $(i = 1,2), V(p, w_1) = 1, V(p, w_2) = 1$. În acest model, e uşor de văzut, formula $p \supset \Diamond p$ este una validă, adică adevărată în ambele lumi. Însă, dacă în acest model, pentru o variabilă q avem $V(q, w_1) = 1$ şi $V(q, w_2) = 0$, atunci $V(\Diamond q, w_1) = 0$, căci *non* $w_1 R w_1$ şi $w_1 R w_2$ iar $V(q, w_2) = 0$. Şi astfel, $V(q \supset \Diamond q, w_1) = 0$ şi deci formula este nevalidă.

Însă, dacă orice *exemplificare* a unei formule (i.e. orice formulă obţinută din formula respectivă prin aplicarea **Subst**) este validă într-un model, atunci validitatea ei se conservă în orice aplicare a celor trei reguli în sistemul $\mathcal{K}$. Acest concept al validităţii într-un model îl avem în vedere în demonstrarea lemei de mai jos.

Lema 2. **4:** $\Box p \supset \Box\Box p$ *nu este teoremă a sistemului* $\mathcal{KH}$.

Trebuie, aşadar, construit un model $\langle W, R, V \rangle$ în care 1) **4** nu este validă (i.e. nu orice exemplificare a formulei **4** este validă) şi 2) **H** este validă (i.e. orice exemplificare a lui **H** este validă).

Demonstraţie.

Fie $\langle W, R, V \rangle$ următorul model:

$W = N \cup N^*$ unde N este mulţimea numerelor naturale iar N^* este o copie a ei: $\{0^*, 1^*, 2^*, \ldots\}$.

R este definită astfel: pentru $n, m \in N$, nRm ddacă $n > m$.

pentru $n^*, m^* \in N^*$, $n^* R m^*$ ddacă $n \leq m + 1$

pentru $m \in N$, $n^* \in N^*$, $n^* R m$

$V(p, 0^*) = 0$, $V(p, w) = 1$ pentru orice $w \neq 0^*$.

Pentru a demonstra *Lema 2* este suficient să arătăm că în modelul de mai sus *orice exemplificare* a axiomei **H** este validă iar **4** nu este validă.

1. $V(4, 2^*) = 0$

Din $1^* R 0^*$ şi $V(p, 0^*) = 0$ rezultă $V(\Box p, 1^*) = 0$. Iar din $2^* R 1^*$ rezultă $V(\Box\Box p, 2^*) = 0$. Însă *non* $2^* R 0^*$ şi deci $V(p, w) = 1$ pentru orice w astfel că $2^* R w$. Şi astfel $V(\Box p, 2^*) = 1$. Aşadar, $V(\Box p \supset \Box\Box p, 2^*) = 0$.

Pentru demonstrarea validităţii axiomei **H** vom introduce mai întâi câteva concepte.

Fie α o formulă arbitrară. Prin $|\alpha|$ vom înţelege mulţimea tuturor lumilor posibile în care α este adevărată. Simbolic: $|\alpha| = \{w \in W : V(\alpha, w) = 1\}$. O mulţime $X \subseteq W$ este *cofinită* ddacă *W-X* este finită.

Lema 3. Pentru orice formulă $\alpha : |\alpha|$ *este finită sau cofinită.*

Demonstraţie (inducţie structurală)

1. α este o variabilă propoziţională. În acest caz $|\alpha| = W - \{0^*\}$ şi deci $|\alpha|$ este cofinită.

2. $\neg\alpha$. Dacă $|\alpha|$ este finită, atunci $|\neg\alpha|$ este cofinită, şi reciproc.

3. $\alpha \supset \beta$. Echivalent $\neg\alpha \vee \beta$. Însă $|\neg\alpha \vee \beta| = |\neg\alpha| \cup |\beta|$. Dacă $|\neg\alpha|$ şi $|\beta|$ sunt finite, atunci $|\neg\alpha| \cup |\beta|$ este finită. Dacă una din mulţimi este cofinită, atunci $|\neg\alpha| \cup |\beta|$ este cofinită.

4. $\Box\alpha$. a) Presupunem că există $n \in N$ astfel că $V(\alpha, n) = 0$. Dacă $w \in N$ şi $w > n$, sau dacă $w \in N^*$, $V(\Box\alpha, w) = 0$ şi astfel $|\Box\alpha|$ este finită.

b) Presupunem că pentru orice $n \in N$, $V(\alpha, n) = 1$. În acest caz $|\alpha|$ nu este finită. Este deci cofinită. Există deci un cel mai mare n^* pentru care $V(\alpha, n^*) = 0$ (deoarece α este adevărată pentru orice $n \in N$). Şi deci $V(\Box\alpha, w) = 1$ pentru $w = m^*$ cu $m > n+1$ şi pentru orice $w \in N$. Şi astfel $|\Box\alpha|$ este cofinită.

2. **H** este validă în $\langle W, R, V \rangle$.

Demonstraţie. Trebuie arătat, aşadar, că orice exemplificare a formulei **H** este adevărată în $\langle W, R, V \rangle$. Adică $\Box(\Box\alpha \equiv \alpha) \supset \Box\alpha$ este adevărată în modelul considerat, unde α este o formulă arbitrară.

1. Presupunem că există $n \in N$ astfel încât $V(\alpha, n) = 0$ (Căci dacă $V(\alpha, w) = 1$ pentru orice $w \in W$, atunci $V(\Box\alpha, w) = 1$ pentru orice $w \in W$ şi deci rezultatul are loc). Fie acest n cel mai mic număr astfel că $V(\alpha, n) = 0$. În acest caz pentru orice $m < n$, $V(\alpha, m) = 1$ şi astfel $V(\Box\alpha, m) = 1$ pentru orice $m \leq n$. Şi deci orice exemplificare a lui **H** este adevărată în toate aceste lumi. Fiindcă $V(\alpha, n) = 0$ şi $V(\Box\alpha, n) = 1$ vom avea $V(\Box\alpha \equiv \alpha, n) = 0$. Şi deci dacă $w \in N$ şi $w > n$ sau dacă $w \in N^*$, $V(\Box(\Box\alpha \equiv \alpha), w) = 0$. Şi deci orice exemplificare a formulei **H** este de asemenea adevărată în aceste lumi (implicaţie cu antecedent fals). Şi astfel **H** este validă pentru acest caz.

2. Presupunem că $V(\alpha, n) = 1$ pentru orice $n \in N$. Şi deci $|\alpha|$ nu este finită, este deci cofinită (Lema 3). Şi deci trebuie să existe un cel mai mare $n^* \in N^*$ astfel că $V(\alpha, n^*) = 0$. Însă în acest caz pentru orice $m > n+1$, $V(\Box\alpha, m^*) = 1$ şi pentru orice $m \in N$, $V(\Box\alpha, m) = 1$. Şi deci orice exemplificare a formulei **H** este adevărată în aceste lumi. Însă $V(\Box\alpha, (n+1)^*) = 0$ şi $V(\alpha, (n+1)^*) = 1$. Şi astfel $V(\Box\alpha \equiv \alpha, (n+1)^*) = 0$. Şi deci pentru orice $m \leq n+1$ vom avea $V(\Box(\Box\alpha \equiv \alpha), m^*) = 0$. Şi deci orice exemplificare a formulei **H** va fi adevărată în toate aceste lumi.

Aşa cum am văzut în 4.1 şi 4.2 conceptul demonstrabilităţii şi cel al validităţii sunt relative la sistemele modale considerate, respectiv sunt relative la clase C de cadre $\langle W, R \rangle$. Iar dacă un sistem S este atât corect cât şi complet în raport cu clasa respectivă de cadre, i.e. dacă echivalenţa $\vdash_S \alpha$ ddacă $\models_C \alpha$ are loc, atunci vom spune că S este *caracterizat* de clasa respectivă. Echivalent, teoremele lui S sunt exact formulele valide în orice cadru din C. Evident, un sistem modal este *complet* dacă există o clasă C de cadre care-l caracterizează, în caz contrar este incomplet.

Incompletitudinea sistemului $\mathcal{KH}$ rezultă din cele două leme de mai sus. Căci **H** este o teoremă a sistemului $\mathcal{KH}$ (i.e. axioma specifică) şi deci este o formulă validă a sistemului. Prin *Lema 1*, **4** este de asemenea $\mathcal{KH}$-validă. Însă, prin *Lema 2*, **4** nu este o teoremă a sistemului $\mathcal{KH}$. Şi deci echivalenţa $\vdash_{\mathcal{KH}} \alpha$ ddacă $\models_C \alpha$ nu are loc. Şi deci $\mathcal{KH}$ nu este caracterizat de clasa C de cadre, fiind deci un sistem modal *incomplet*.

Remarcă 1. Sistemul caracterizat de clasa tuturor cadrelor pentru $\mathcal{KH}$ este sistemul $\mathcal{GL}$.

Prin cele două demonstrații conchidem că dacă C este clasa cadrelor pentru $\mathcal{KH}$, atunci $\vdash_{\mathcal{GL}} \alpha$ ddacă $\models_C \alpha$. Căci dacă $\vdash_{\mathcal{GL}} \alpha$, atunci $\vdash_{\mathcal{KH}+4} \alpha$ și fiindcă orice cadru $\langle W,R \rangle \in C$ este un cadru pentru $\mathcal{KH}+4$, prin echivalența caracterizabilității α este C-validă. Dacă *non* $\vdash_{\mathcal{GL}} \alpha$, atunci din completitudinea sistemului $\mathcal{GL}$ deducem că α nu este validă pe vreun cadru pentru $\mathcal{GL}$. Iar fiindcă $\mathcal{GL}$ conține $\mathcal{KH}$, un cadru pentru $\mathcal{GL}$ este și un cadru pentru $\mathcal{KH}$ și deci α nu este C-validă.

Remarcă 2. În acord cu definiția proprietății "modelului finit", un sistem S are această proprietate dacă atât corectitudinea cât și completitudinea lui pot fi definite în raport cu o clasă *finită* C de *cadre*. Și deci C caracterizează S.

Din perspectiva *modelelor* finite, dacă un sistem S este caracterizat de vreo clasă de modele finite, atunci S este caracterizat și de o clasă de cadre finite. Și deci dacă un sistem este incomplet (e.g. $\mathcal{KH}$), în sensul că nu există nici o clasă C de cadre care-l caracterizează, atunci sistemul respectiv n-are proprietatea "modelului finit" (indiferent dacă această proprietate este definită în termenii modelelor sau cadrelor)[26].

Remarcă 3. (Completitudine, incompletitudine, caracterizabilitate). Așa cum am văzut mai sus (4.2.3), un important rezultat cu referire la cadrele sistemelor modale, $\mathcal{T}$ de exemplu, este dat de următoarea echivalență:

Echival $\langle W,R \rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{T}$ ddacă $\langle W,R \rangle$ este reflexiv.

Ceea ce înseamnă: a) Dacă $\langle W,R \rangle$ este reflexiv, atunci $\langle W,R \rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{T}$.

b) Dacă $\langle W,R \rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{T}$, atunci $\langle W,R \rangle$ este reflexiv.

a) se poate ușor obține din teorema corectitudinii sistemului $\mathcal{T}$, potrivit căreia orice teoremă a lui $\mathcal{T}$ este validă pe orice cadru reflexiv; echivalent, orice cadru reflexiv este un cadru pentru $\mathcal{T}$.

b) este demonstrația Th. 1, 4.2.3.

Această *Echival* nu trebuie însă identificată cu echivalența extensională conținută în *Eq* $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$ ddacă $\models_C \alpha$, unde C este clasa tuturor cadrelor reflexive, și care este asertarea simultană a corectitudinii și completitudinii sistemului $\mathcal{T}$. Din *Eq* conchidem, în acord cu definiția caracterizabilității, că $\mathcal{T}$ *este caracterizat de clasa tuturor cadrelor reflexive*. Însă din *Eq* nu putem deduce *Echival.* Căci, așa cum am văzut în 4.4 sistemul axiomatic $\mathcal{T}$ este caracterizat de clasa tuturor cadrelor reflexive *finite*. Însă $\mathcal{T}$ este caracterizat și de clasa care conține cadrul modelului canonic pentru $\mathcal{T}$ (cf. 4.3.3). Însă cele două clase nu au nici un element comun. În principiu vorbind, din faptul că $\mathcal{T}$ este caracterizat de clasa tuturor cadrelor reflexive nu putem conchide că $\mathcal{T}$ nu poate fi caracterizat de vreo clasă care conține vreun cadru nereflexiv. Doar *Echival* elimină această posibilitate. În fond, *Echival* și caracterizabilitatea unui sistem S de vreo clasă C de cadre sunt lucruri *distincte.* Cu referire la $\mathcal{T}$, *Echival* asertează că clasa tuturor cadrelor pentru $\mathcal{T}$ este clasa tuturor cadrelor *reflexive*, idee care, evident, se bazează pe asumpția: există o clasă C de cadre care caracterizează $\mathcal{T}$. Însă verificarea acestei asumpții reclamă un alt aparat conceptual decât cel conținut în *Echival.*

[26] Ceea ce nu înseamnă că dacă sistemul este complet, i.e. este caracterizat de vreo clasă C de cadre, atunci el are proprietatea "modelului finit" (comp. sistemul $\mathcal{MK} = \mathcal{T} + \mathbf{M_k}$:$\Box(\Box\Box p \supset \Box q) \supset (\Box p \supset q)$).

Exemplu. Prin *Remarcă 1*, am văzut, sistemul caracterizat de clasa tuturor cadrelor pentru $\mathcal{KH}$ este sistemul $\mathcal{GL}$ ($\mathcal{KH}+\mathbf{4}$). Am văzut, de asemenea, că un cadru $\langle W,R\rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{KH}$ ddacă $\langle W,R\rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{GL}$ (i.e. *Echival* pentru $\mathcal{KH}$). Aceasta nu înseamnă însă că sistemul $\mathcal{KH}$ este caracterizat de clasa tuturor acestor cadre, deoarece în $\mathcal{KH}$ formula **4** este validă, fără a fi însă şi teoremă a acestui sistem.

Capitolul 5

Logica modală a predicatelor ($\mathcal{L}_P{}^{\square}$)

5.1. Preliminar[1]

Elaborarea unei logici modale a predicatelor este o sarcină dificilă. Aceasta pentru că nici simpla adăugare a logicii nemodale a predicatelor la o logică modală propozițională, nici adăugarea unor logici nemodale alternative nu conduc la o teorie formală complet adecvată unei semantici *intuitive*. Mai mult, fiecare din aceste construcții prezintă, în grade diferite, dezavantaje din punct de vedere *formal*. Semnalăm, în cele ce urmează, câteva din dificultățile construirii unei $\mathcal{L}_P{}^{\square}$.

Calea cea mai simplă a edificării unei logici modale a predicatelor o reprezintă adăugarea aparatului formal al logicii predicatelor ($\mathcal{L}_P$), cu sau fără identitate, la o logică modală propozițională. Cum în $\mathcal{L}_P$ cu identitate, de exemplu, identitatea $d = d$ este demonstrabilă, prin generalizarea existențială ($\exists$-Gen) deducem $\exists x(x = d)$. Iar dacă prin constanta "*d*" înțelegem "Pegas", atunci în $\mathcal{L}_P$ cu identitate putem deriva existența calului înaripat "Pegas". Sursa acestei derivări ilicite o reprezintă faptul că în semantica $\mathcal{L}_P$ orice constantă are ca denotat (i.e. se referă la) un obiect din domeniul Ω al cuantificării. Nici încercările alternative de eliminare a anomaliilor de acest gen, pentru termenii care nu denotă, apelând la teoria russeliană a descripțiilor, nu conduc la soluții satisfăcătoare[2].

Mai mult, identitatea, din $\mathcal{L}_P$ cu identitate, fundamentează regula substituției termenilor identici în orice context extensional. Construcția unor logici intensionale face ca aplicațiile acestei reguli să fie drastic limitate. În caz contrar, se obțin derivări nevalide de următorul gen:

> K. Gödel este descoperitorul fenomenului incompletitudinii.
> Ionescu vrea să știe dacă K. Gödel este descoperitorul fenomenului incompletitudinii.
>
> ---
>
> Ionescu vrea să știe dacă K. Gödel este K. Gödel.

La fel de ușor putem construi alte exemple de derivări nevalide dacă în locul expresiei intensionale "Ionescu vrea să știe" vom pune expresia intensională "Este necesar că".

Nici soluția *ad hoc* a limitării substituției la formule elementare (e.g. $t_1 = t_2 \Rightarrow P(t_1) \supset P(t_2)$) nu este o soluție, deoarece ea nici nu este eficientă pentru $\mathcal{L}_P$ cu identitate (în care aplicarea substituției este universală) și nici nu validează în toate cazurile substituirea termenilor identici aflați în domeniul unor operatori intensionali.

---

[1] Cititorul nefamiliarizat cu limbajul logicii modale a predicatelor poate omite acest *Preliminar*. Toate explicațiile necesare înțelegerii acestui capitol sunt date în paragrafele aferente, independent de cele prezentate aici.

[2] Comp. S. Kripke, Naming and Necessity în D. Davidson, G. Harman (eds), *Semantics of Natural Language*, Reidel, Dordrecht, 1972.

Alte dificultăţi legate de elaborarea $\mathcal{L}_P$ ▫ au ca sursă discuţiile cu privire la *peste ce anume se cuantifică*, altfel spus, diferenţele dintre semanticile acestor logici cu privire la *domeniul cuantificării*. Unele sisteme modale cuantifică peste *obiecte*, altele peste ceea ce Carnap numea *concepte individuale*[3]. Iar alegerea domeniului are consecinţe notabile, atât intuitive cât şi formale. Să vedem, pe scurt, acest lucru.

Presupunem, în cele ce urmează, că o logică modală a predicatelor se obţine dintr-o logică modală propoziţională la care se adaugă logica (nemodală) a predicatelor cu identitate[4]. Limbajul acesteia din urmă conţine simboluri pentru predicate *n*-adice (cu $n \geq 1$ finit), simboluri pentru termeni (în care cele pentru variabile individuale sunt infinit de multe), simbolul identităţii " = ", şi simbolul pentru cuantificatorul universal " $\forall$ ". Pentru un domeniu specificat Ω (nevid) *extensiunile* termenilor şi predicatelor sunt cele din $\mathcal{L}_P$ prin funcţiile ι, μ (i.e. extensiunea unui termen *t* este $t^{\iota,\mu} \in \Omega$ iar a unui predicat $P(t_1,\dots,t_n)$ este $P^{\iota} \subseteq \Omega^n$.

Un $\psi(\Omega)$*-model* pentru limbajul acestei logici este un cvintuplu $\langle W, R, \Omega, \psi(\Omega), \iota \rangle$, în care *W* este o mulţime de indici (mulţimea lumilor posibile), *R* o relaţie binară definită pe *W* (relaţia de accesibilitate), Ω o mulţime nevidă de elemente (obiecte) numită domeniu, $\psi(\Omega)$ este o funcţie care determină domeniul cuantificării iar ι este funcţia interpretare, care asignează termenilor (funcţii şi constante) şi predicatelor limbajului specificat *intensiunile* lor (în raport cu *W* şi Ω). *Intensiunea* unei expresii (termen, predicat) este extensiunea *specificată în raport cu o lume posibilă*. Altfel spus, intensiunea este o funcţie de la *W* la Ω.

Acest aparat formal este suficient pentru exemplificarea diferenţelor dintre sisteme de logică modală a predicatelor în raport cu domeniul cuantificării. Să ne oprim mai întâi la primul caz, respectiv la sisteme modale care cuantifică peste *obiecte* (i.e. cuantifică *obiectual*). Două astfel de sisteme sunt elaborate de Kripke, în studiul său classic despre cuantificare în logica modală [5]. În ambele sisteme termenii sunt *designatori rigizi*, adică extensiunile lor sunt aceleaşi în toate lumile posibile. Altfel spus, intensiunile lor sunt funcţii constante.

Rig $\langle t^{\iota,\mu} \rangle_w = \langle t^{\iota,\mu} \rangle_{w^*}$, pentru orice $w, w^* \in W$

Un $\psi(\Omega)$*-model* pentru unul din aceste sisteme (fie el $\mathcal{K}r1$) este cvintuplul $\langle W, R, \Omega, Kr1, \iota \rangle$, unde $\psi(\Omega) = Kr1 = \Omega$, funcţiile ι şi μ satisfac clauza **Rig** iar clauza pentru cuantificatorul universal este

$\forall\mathcal{K}r1$ $\quad [\forall x \alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$, pentru oricare asignare ν *x*-variantă a asignării μ în Ω.

Sistemul modal $\mathcal{K}r1$ este elegant din punct de vedere formal. Cum un astfel de sistem se poate construi dintr-un sistem S de logică modală propoziţională adăugând $\mathcal{L}_P$ cu identitate, **Rig** şi formula *Barcan* (*Bar*: $\forall x \Box \alpha \supset \Box \forall x \alpha$) o dată demonstrată completitudinea lui S în raport cu S-cadrele specificate, completitudinea acestui sistem rezultă din completitudinea lui S. (În paragraful următor vom considera un sistem similar, prezentând integral demonstraţiile aferente). Cu toate acestea, semantica expresiilor cuantificate, proprie acestui sistem, este inadecvată în raport cu cea a limbajului natural. Să dăm un singur exemplu. Din $x = x$, teoremă a $\mathcal{L}_P$ cu identitate, obţinem $\exists y(y = x)$ (prin $\exists$-Gen), apoi $\Box \exists y(y = x)$ (prin N) şi deci $\forall x \Box \exists y(y = x)$ (prin generalizare universală, $\forall$-Gen). Această

---

[3] Cf. R. Carnap, *Meaning and Necessity*, Chicago UP, 1947. Comp. şi R. Montague, *Formal Philosophy*, Yale U.P., 1974, Cap. 5 (On the nature of certain philosophical entities).

[4] Câteva detalii ale unei asemenea construcţii sunt menţionate în *Remarcă 2*, 5.4.

[5] S. Kripke, Semantical Considerations on Modal Logic, *Acta Philosophica Fennica* 16, 1963, 83-94.

din urmă expresie înseamnă: "tot ceea ce există există în mod necesar", care contrazice intuiția noastră comună cu privire la existența lucrurilor, potrivit căreia în lumi diferite pot exista lucruri diferite.

Celălalt sistem modal construit de Kripke (fie acesta $\mathcal{K}r2$) *relativizează domeniile la lumi posibile*. În acest caz un $\psi(\Omega)$-model este cvintuplul $\langle W, R, \Omega, Kr2, \iota \rangle$, unde $\mathcal{K}r2$ este funcția care asignează fiecărei lumi posibile $w \in W$ o submulțime Ω_w a lui Ω, ι, μ satisfac **Rig** iar clauza pentru cuantificatorul universal este

$\forall \mathcal{K}r2$ $\quad [\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$ pentru oricare asignare ν x-variantă a lui μ în Ω_w.

Nici în acest caz o logică modală a predicatelor bazată pe conceptul $\mathcal{K}r2$-validității, cu păstrarea logicii clasice a predicatelor cu identitate, nu este lipsită de inadvertențe. Expresia $\exists x(x = y)$ își conservă validitatea doar dacă extensiunea lui y aparține oricărei lumi posibile (y fiind variabilă liberă). Motiv pentru care acest sistem kripkean introduce închiderea universală a formulelor cu variabile libere. În acest caz formula de mai sus devine $\forall y \exists x(x = y)$. Numai că o asemenea închidere are efectul semantic al eliminării tuturor termenilor (în acest sistem singurii termeni sunt variabilele individuale), căci variabilele devin cuantificatori universali deghizați.

Nici în alte logici modale care relativizează domeniile la lumi posibile și păstrează $\mathcal{L}_P$ cu identitate (altele decât $\mathcal{K}r2$) anomaliile nu sunt complet eliminabile. Să presupunem că o expresie de genul $\exists y(y = t)$ este adevărată într-o lume $w \in W$ într-un model doar dacă $t^{\iota,\mu} \in \Omega_w$. Întrucât expresia este o teoremă a $\mathcal{L}_P$ cu identitate, putem arăta, exact ca mai sus la $\mathcal{K}r1$, că extensiunea oricărui termen t al limbajului se află în orice lume posibilă, caz în care ideea relativizării domeniilor la lumi posibile se volatilizează. Sau, dacă păstrăm această idee, atunci laolaltă cu $\mathcal{L}_P$ cu identitate trebuie să conchidem că limbajul utilizat *nu are termeni* pentru obiecte care există în anumite lumi și nu în altele.

Ideea relativizării domeniilor la lumi posibile, laolaltă cu păstrarea $\mathcal{L}_P$ cu identitate sunt incompatibile și în următorul sens. Într-o logică care conține aceste determinații este demonstrabilă *conversa formulei Barcan* (*CBar*: $\Box \forall x\alpha \supset \forall x \Box \alpha$). Iar un model în care *CBar* este validă implică următoarea condiție:

Incl. Dacă wRw^*, atunci $\Omega_w \subseteq \Omega_{w^*}$.

Însă cu ajutorul N și *CBar* este demonstrabilă următoarea formulă $\forall x \Box \exists y(y = x)$, a cărei semnificație este cea semnalată la sistemul $\mathcal{K}r1$ (i.e. orice este necesar) și care anulează idea relativizării la lumi.

Apoi, formula *Bar* prezintă particularitatea că este demonstrabilă în orice sistem care include sistemul $\mathcal{B}$. Dacă R este o relație de echivalență, de exemplu, atunci **Incl** implică $\Omega_w = \Omega_{w^*}$ pentru orice $w, w^* \in W$, contrar ideii relativizării domeniilor la lumi.

O altă insuficiență a construcțiilor din logicile modale mai sus prezentate rezultă nemijlocit din asignarea **Rig**, potrivit căreia orice termen are aceeași referință în orice lume posibilă. Evident, expresia "cea mai inteligentă ființă" are o extensiune diferită în lumi diferite (i.e. intensiunea unui termen nu poate fi o funcție constantă). Un sistem modal care satisface această exigență renunță așadar la **Rig**. Pentru a evita și implicațiile adoptării logicii predicatelor cu identitate un astfel de sistem poate adopta aparatul formal al unei "free logic", cu unele avantaje notabile în raport cu construcțiile precedente. Cum într-o "free logic" regula generalizării existențiale arată astfel

$$\exists \text{ Gen FL} \quad \frac{P(t) \wedge E(t)}{\exists x P(x)}$$

derivarea existenței lui Pegas, menționată la începutul paragrafului, nu se mai poate face, deoarece, în prealabil, trebuie garantată existența referentului lui t (prin $E(t)$). Similar, regula instanțierii universale din logica clasică,

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t)}$$

devine

$$\forall \text{Inst FL} \quad \frac{\forall x P(x)}{E(t) \supset P(t)}$$

pentru orice termen t.

Cu ajutorul acestei reguli următoarea formulă este demonstrabilă: $[\Box(t=t) \wedge E(t)] \supset \exists x \Box (x=t)$. Însă $\Box(t=t)$ este demonstrabilă. Şi deci este demonstrabilă şi formula $E(t) \supset \exists x \Box (x=t)$. Numai că sensul intuitiv al acestei formule nu poate fi acceptat. Să construim un exemplu. Să luăm următorii termeni "M. Scorsese" şi "Regizorul filmului "Aviator"". Ceea ce spune formula de mai sus, pentru acest exemplu, este următorul lucru: Dacă regizorul filmului "Aviator" există, atunci *în mod necesar* există cineva care este regizorul filmului "Aviator". Însă aceasta contrazice intuiția curentă, pentru că nimeni (i.e. nici un element) nu poate fi regizorul acestui film în orice lume posibilă.

Am prezentat mai sus câteva construcții posibile ale logicii modale cuantificate, logici care cuantifică *obiectual*, şi principalele dificultăți în calea elaborării lor. Indiferent dacă apelează la **Rig** sau nu, intuițiile noastre curente cu privire la transformarea lucrurilor în timp scot în evidență un alt neajuns al acestor logici. Devenirea temporală arată că extensiunile termenilor (i.e. lucrurile) nu se conservă. E mai adecvat aşadar să vorbim despre lucruri ca intensiuni ale termenilor, adică despre concepte *individuale*. Logica modală aferentă ar fi deci o logică modală a predicatelor, care *cuantifică conceptual*. Deşi intuitiv acceptabile, ele sunt suspecte filosofic: "lucrurile" ontologiei conceptuale sunt foarte diferite de lucrurile lumii noastre. Nici din punct de vedere formal o astfel de logică nu este impecabilă. O carență de fond are ca sursă faptul că domeniul cuantificării îl reprezintă intensiuni (i.e. funcții de la W la Ω), caz în care limbajul utilizat are puterea de expresie a aritmeticii de ordinal doi. Prin teoremele lui Gödel, sistemul modal astfel construit este incomplet.

Cu aceasta, în fine, ajungem la o altă problemă, care priveşte direct aparatul formal al logicilor modale cuantificate, cea a demonstrării completitudinii lor. Dificultatea de principiu legată de idea completitudinii este absența unei strategii generale, de felul celei funcționale în logica clasică a predicatelor sau în logica modală propozițională[6]. Fiecare din strategiile utilizate îşi are adecvările, performanțele şi limitele ei. Pentru lucrarea de față, din multitudinea sistemelor de logică modală a predicatelor, am ales două tipuri de sisteme modale, cele care conțin ca axiomă formula *Bar* şi cele care n-o conțin, considerând, distinct, problemele completitudinii şi incompletitudinii lor.

---

[6] Pentru o taxonomie a logicilor modale cuantificate şi diferite strategii de demonstrare a completitudinii lor, cf. J.W. Garson, Quantification in Modal Logic, în D. Gabbay; F. Guenthner (eds), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II, Cap. II. 5.

5.2. Sintaxa $\mathcal{L}_P^{\Box}$

5.2.1. Limbajul $\mathcal{L}_P^{\Box}$ este în esență limbajul $\mathcal{L}_P$ la care se adaugă determinațiile specifice conceptelor modale. Vom considera așadar limbajul logicii nemodale a predicatelor, a cărui listă de simboluri a fost expusă în 3.1.1, cu mențiunea că mulțimea $\mathcal{T}$ a termenilor logici o vom restrânge la variabilele individuale $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ Conceptele „formulă elementară" și „substituție" vor fi așadar regândite în acord cu această restricție. Ca regulă *specific modală* de construcție a formulelor vom adăuga: dacă α este o formulă, atunci $\Box\alpha$ este o formulă.

5.2.2. Sisteme de logică modală a predicatelor

Construcția unui sistem de logică modală a predicatelor se poate face, de exemplu, prin considerarea simultană a unui sistem $\mathcal{S}$ de logică modală propozițională și a unui sistem de logică clasică a predicatelor, Q^x. Fie, în cele ce urmează, $Q^x\mathcal{S}$ (i.e. $Q^x + \mathcal{S}$) următorul sistem[7] de logică modală a predicatelor.

$Ax1^x$. Orice exemplificare (prin substituție) a oricărei formule valide a unui sistem de logică modală propozițională $\mathcal{S}$ (i.e. a oricărei teoreme) cu formule ale $\mathcal{L}_P^{\Box}$ este o axiomă a $Q^x\mathcal{S}$.

Exemple: a) exemplificări ale formulelor nemodalizate

În $(p \wedge q) \supset p$, în loc de p punem $\exists xP(x)$, iar în loc de q $\forall yQ(x, y)$ și obținem $(\exists xP(x) \wedge \forall yQ(x, y)) \supset \exists xP(x)$.

b) exemplificări ale formulelor modalizate

În $\Diamond(p \supset q) \equiv (\Box p \supset \Diamond q)$, în loc de p punem $P(x)$, iar în loc de q punem $\exists xQ(x)$ și obținem $\Diamond(P(x) \supset \exists xQ(x)) \equiv (\Box P(x) \supset \Box\exists xQ(x))$.

Univ 1^x $\forall x\alpha(x) \supset \alpha(x / y)$; y este orice variabilă liberă x în $\alpha(x)$.

Univ 2^x $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x\beta)$; x nu apare liberă în α.

Reguli de deducție.

Modus ponens (MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \supset \beta}{\beta}$ Gen $\dfrac{\alpha}{\forall x\alpha}$ N $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

Este ușor de constatat că sintaxa $\mathcal{L}_P^{\Box}$ admite construcții de formule care combină cuantificatorii cu operatorii modali. O astfel de formulă este *formula Barcan* (*Bar*): $\forall x\Box\alpha \supset \Box\forall x\alpha$ [8]. În anumite sisteme modale, e.g. $Q^x\mathcal{B}$, $Q^x\mathcal{S}5$, această formulă este o teoremă. Nu este însă demonstrabilă în alte sisteme modale, e.g. $Q^x\mathcal{K}$, $Q^x\mathcal{T}$ sau $Q^x\mathcal{S}4$. De aceea, ea poate fi adăugată ca axiomă oricărui sistem $Q^x\mathcal{S}$, obținându-se astfel sisteme modale $Q^x\mathcal{S}$ *Bar*. În cele ce urmează vom avea în vedere astfel de sisteme.

---

[7] Deși ne referim la el ca la un sistem, în realitate orice specificare a lui $\mathcal{S}$ (i.e. $\mathcal{K}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, \beta$ ...) generează propriu-zis un sistem.

[8] Cf. R.B. Marcus, A functional calculus of first order based on strict implication, *The Journal of Symbolic Logic*, 11/1946, 1-16.

5.3. Semantica $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$

Semantica logicii modale a predicatelor este o extensie adecvată a celei nemodale.

Definiția 1. Un model pentru un limbaj $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$ *al logicii modale a predicatelor este o mulțime ordonată a următorilor patru itemi* $\langle W, R, \Omega, \iota \rangle$, *unde*

1. $\langle W, R \rangle$ *este un cadru*
2. Ω *este o mulțime nevidă (domeniu)*
3. ι *este funcția interpretare, care asignează fiecărui simbol predicativ n-adic* P^n, *în orice* $w \in W$, *o semnificație* $(P^n)^{\iota} \subseteq \Omega^n$.

Similar notației adoptate în logica clasică a predicatelor, prin $[\alpha]_w^{\iota,\mu}$ vom înțelege valoarea logică a formulei α într-un model $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$ și o asignare μ în Ω. Simbolul inferior w relativizează valorile la o lume $w \in W$.

Definiția 2. Adevărul unei formule într-un model $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$, *într-o lume* $w \in W$ *și o asignare* μ *în M.*

$[R]$ $\quad [R(x_1,\ldots,x_n)]_w^{\iota,\mu} = 1$ *ddacă* $\langle x_1^{\mu},\ldots,x_n^{\mu} \rangle_w \in R^{\iota}$

$[\neg]$ $\quad [\neg\alpha]_w^{\iota,\mu} = \neg[\alpha]_w^{\iota,\mu}$

$[\circ]$ $\quad [\alpha \circ \beta]_w^{\iota,\mu} = [\alpha]_w^{\iota,\mu} \circ [\beta]_w^{\iota,\mu}$, *unde denotă orice operator binar din* $\{\wedge, \vee, \supset, \equiv, +, /, \downarrow\}$.

$[\Box]$ $\quad [\Box\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *ddacă* $[\alpha]_{w^*}^{\iota,\mu} = 1$ *pentru orice* $w^* \in W$ *astfel că* wRw^*.

$[\Diamond]$ $\quad [\Diamond\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *ddacă* $[\alpha]_{w^*}^{\iota,\mu} = 1$ *pentru cel puțin o* $w^* \in W^*$ *astfel că* wRw^*.

$[\forall]$ $\quad [\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *ddacă* $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$ *pentru orice asignare* ν *x-variantă a lui* μ.

$[\exists]$ $\quad [\exists x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *ddacă* $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$ *pentru cel puțin o asignare* ν *x-variantă a lui* μ.

Definiția 3. O formulă α *este validă într-un model* $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$ *dacă* $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *pentru orice* $w \in W$ *și pentru orice asignare* μ *în M. (În acest caz vom spune și că* α *este adevărată într-un model M).*

Definiția 4. O formulă α *este validă într-un cadru* $\langle W, R \rangle$ *dacă* α *este validă în orice model bazat pe cadrul* $\langle W, R \rangle$.

5.4. Corectitudinea sistemelor modale $Q^x S$ *Bar*

Definiția 1. Un cadru $\langle W, R \rangle$ *este un cadru pentru un sistem* $Q^x S$ *Bar dacă orice teoremă a sistemului* $Q^x S$ *Bar este o formulă validă în* $\langle W, R \rangle$.

După cum se poate ușor constata un cadru pentru S este același lucru ca un cadru pentru $Q^x S$ *Bar*, iar acest fapt fundamentează următoarea corespondență structurală semnificativă între S și $Q^x S$ *Bar*.

Teoremă. $\langle W, R \rangle$ *este un cadru pentru* S *ddacă* $\langle W, R \rangle$ *este un cadru pentru* $Q^x S$ *Bar.*

a) Dacă $\langle W, R \rangle$ *este un cadru pentru* S, *atunci* $\langle W, R \rangle$ *este un cadru pentru* $Q^x S$ *Bar.*

Demonstrarea acestui enunț înseamnă demonstrarea faptului că orice teoremă a sistemului $Q^{x}S$ *Bar* este o formulă validă pe $\langle W,R\rangle$. Echivalent, orice exemplificare a schemelor de axiome și orice formulă obținută prin aplicarea regulilor de deducție ale sistemului $Q^{x}S$ *Bar* este o formulă validă în $\langle W,R\rangle$; echivalent, este o formulă adevărată în orice model bazat pe $\langle W,R\rangle$.

Ax1^{x}. Orice exemplificare a unei formule valide (i.e. teoreme) a unui sistem S cu formule ale $\mathcal{L}_{p}{}^{\square}$ este o formulă validă în $\langle W,R\rangle$.

Fie $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$ o formulă validă a sistemului S. Fie $\alpha^{*}(p_1/\beta_1,\ldots,p_n/\beta_n)$ formula obținută din α prin substituția simultană a variabilelor $p_1,\ldots,p_n$ cu formulele $\mathcal{L}_{p}{}^{\square}$ $\beta_1,\ldots,\beta_n$. Trebuie să arătăm că dacă α este o formulă validă, atunci și α^{*} este o formulă validă.

Prin contrapoziție, presupunem că α^{*} nu este o formulă validă. Există deci un model $M=\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$ în care α^{*} nu este adevărată. Există deci o lume w și o asignare μ în M astfel încât $[\alpha^{*}]_{w}^{\iota,\mu}=0$.

Fie $\langle W,R,V\rangle$ un model pentru logica modală propozițională $\mathcal{L}_{p}{}^{\square}$, în care $\langle W,R\rangle$ este exact cadrul din modelul $M=\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$, astfel încât pentru orice $w\in W$ și pentru orice p_i $(1\leq i\leq n)$ are loc: $V(p_i,w)=[\beta_i]_{w}^{\iota,\mu}$. În acest caz $V(\alpha,w)=0$. Și cum există un model pentru $\mathcal{L}_{p}$, $\langle W,R,V\rangle$, bazat pe $\langle W,R\rangle$, și o lume $w\in W$ în care α este falsă, rezultă că α nu este validă.

Univ 1^{x}. $\forall x\alpha(x)\supset\alpha(x/y)$; y este orice variabilă liberă pentru x în $\alpha(x)$.

(*Reductio ad absurdum*). Presupunem că *Univ* 1^{x} nu este validă. Există deci un model $M=\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$, o lume $w\in W$ și o asignare μ în M astfel că

1. $[\forall x\alpha(x)\supset\alpha(x/y)]_{w}^{\iota,\mu}=0$. Deducem, mai departe, că 2. $[\forall x\alpha(x)]_{w}^{\iota,\mu}=1$ și 3. $[\alpha(x/y)]_{w}^{\iota,\mu}=0$. Din 2 obținem 4. $[\alpha(x)]_{w}^{\iota,\nu}=1$ pentru orice ν x-variantă a lui μ. Fie acum $x^{\nu}=y^{\mu}$. În acest caz obținem $[\alpha(x/y)]_{w}^{\iota,\mu}=1$, ceea ce contrazice 3.

Univ 2^{x}. $\forall x(\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\forall x\beta)$; x nu apare liberă în α.

(*Reductio ad absurdum*). Presupunem că *Univ* 2^{x} este nevalidă. Există deci un model $M=\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$, o lume $w\in W$ și o asignare μ în M astfel că

1. $[\forall x(\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\forall x\beta)]_{w}^{\iota,\mu}=0$. Din 1 deducem 2. $[\forall x(\alpha\supset\beta)]_{w}^{\iota,\mu}=1$ și 3. $[(\alpha\supset\forall x\beta)]_{w}^{\iota,\mu}=0$. Din 3 deducem 4. $[\alpha]_{w}^{\iota,\mu}=1$ și 5. $[\forall x\beta]_{w}^{\iota,\mu}=0$. Din 5 deducem că există o asignare ν x-variantă a lui μ astfel că 6. $[\beta]_{w}^{\iota,\nu}=0$. Din 4 deducem 7. $[\alpha]_{w}^{\iota,\nu}=1$, deoarece x nu este liberă în α. Iar din 6 și 7 deducem 8. $[\alpha\supset\beta]_{w}^{\iota,\nu}=0$. Din 2, în schimb, deducem 9$[\alpha\supset\beta]_{w}^{\iota,\nu}=1$ pentru orice asignare ν x-variantă a lui μ, ceea ce contrazice 8.

Exercițiu. Construiți o demonstrație directă (prin presupunerea antecedentului expresiei *Univ* 2^{x}) și o demonstrație prin contrapoziție.

Bar $\forall x\Box\alpha(x)\supset\Box\forall x\alpha(x)$.

Fie $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$ un model arbitrar bazat pe $\langle W, R \rangle$, fie μ o asignare arbitrară în M, fie $w \in W$ o lume arbitrară astfel că $[\forall x \Box \alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$. Rezultă că $[\Box \alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$ pentru orice asignare ν x-variantă a lui μ. Fie acum $w^* \in W$ astfel că wRw^*. Vom avea $[\alpha]_{w^*}^{\iota,\nu} = 1$. Întrucât acest lucru are loc pentru orice ν x-variantă a lui μ, vom avea $[\forall x \alpha]_{w^*}^{\iota,\mu} = 1$. Iar întrucât acest fapt are loc pentru orice w^* astfel că wRw^*, vom avea $[\Box \forall x\, \alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$.

Valabilitatea regulilor de deducție MP şi N este cea specificată la sistemele $\mathcal{S}$ de logică modală propozițională, iar validitatea Gen este cea specificată în logica clasică a predicatelor.

b) Dacă $\langle W, R \rangle$ este un cadru pentru $Q^x\mathcal{S}$ Bar , atunci $\langle W, R \rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{S}$.

(*Contrapoziție*). Presupunem că $\langle W, R \rangle$ nu este un cadru pentru $\mathcal{S}$. Există deci un model $\langle W, R, V \rangle$, bazat pe $\langle W, R \rangle$, şi o lume $w \in W$ astfel încât $V(\alpha, w) = 0$, unde $\alpha(p_1, ..., p_n)$ este o *teoremă* a sistemului $\mathcal{S}$, care conține variabilele propoziționale $p_1, ..., p_n$. Fie $P_1(x), ..., P_n(x)$, n predicate monadice distincte. Fie $\alpha^*(p_1 / P_1(x), ..., p_n / P_n(x))$ formula $\mathcal{L}_P$ ° obținută din α prin substituția simultană a variabilelor p_i cu predicatele monadice $P_i(x)$ $(1 \le i \le n)$. Cum α^* este o exemplificare (prin substituție) a formulei α rezultă că α este o teoremă a sistemului $Q^x\mathcal{S}$ *Bar*. Acum, pentru a demonstra că $\langle W, R \rangle$ nu este un cadru pentru $Q^x\mathcal{S}$ *Bar*, în acord cu definiția conceptului, trebuie să arătăm că α^* nu este validă în $\langle W, R \rangle$, respectiv trebuie să construim un model $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$, bazat pe acest cadru, astfel încât pentru o asignare μ în acest model să avem $[\alpha^*]_w^{\iota,\mu} = 0$. Mai general, ideea construcției modelului este următoarea: predicatele monadice $P_i(x)$ sunt adevărate, pentru orice asignare μ în modelul $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$, exact în acele lumi $w \in W$ în care variabilele propoziționale p_i, conținute în α, sunt adevărate în lumile $w \in W$ din modelul $\langle W, R, V \rangle$. Pentru aceasta este suficient să considerăm un domeniu Ω arbitrar, astfel încât pentru orice $w \in W$ şi pentru orice $1 \le i \le n$ să avem, pentru orice element $e \in \Omega$, $\langle e \rangle_w \in P^i$ ddacă $V(p_i, w) = 1$. Cum formula $\alpha^*(p_1 / P_1(x), ..., p_n / P_n(x))$ este construită exact ca formula $\alpha(p_1, ..., p_n)$, cu singura deosebire că în locul variabilelor p_i intră formulele elementare $P_i(x)$, rezultă că cele două formule, α şi α^*, au aceeaşi valoare în orice lume posibilă. Cum $V(\alpha, w) = 0$ rezultă că $[\alpha^*]_w^{\iota,\mu} = 0$. Şi deci $\langle W, R \rangle$ nu este un cadru pentru $Q^x\mathcal{S}$ *Bar*.

Semnificația teoremei de mai sus

Semnificația rezultatului din a) este imediată, căci în acord cu definiția „cadru pentru $\mathcal{S}$" rezultă că dacă $\langle W, R \rangle$ este un cadru pentru $\mathcal{S}$, atunci $\langle W, R \rangle$ este un cadru pentru $Q^x\mathcal{S}$ *Bar* şi deci orice teoremă a $Q^x\mathcal{S}$ *Bar* este o formulă validă a $Q^x\mathcal{S}$ *Bar*. Aşadar, teorema de corectitudine a unui sistem $\mathcal{S}$ de logică modală propozițională plus rezultatul din a) al teoremei de mai sus echivalează cu o demonstrație de corectitudine pentru sistemele $Q^x\mathcal{S}$ *Bar* (i.e. $Q^x\mathcal{K}$ *Bar*, $Q^x\mathcal{T}$ *Bar*, $Q^x\mathcal{D}$ *Bar*, $Q^x\mathcal{K}4$ *Bar*, $Q^x\mathcal{S}4$ *Bar*, $Q^x\mathcal{S}5$ *Bar*, $Q^x\mathcal{B}$ *Bar*), sub aceleaşi condiții impuse relației R ca în sistemele $\mathcal{S}$.

Remarcă 1. Deşi b) este conversa lui a), b) nu oferă vreun rezultat cu privire la completitudinea sistemelor $Q^x S$ *Bar*. Aşa cum Teorema (a şi b) nu oferă un astfel de rezultat cu privire la caracterizabilitate.

Remarcă 2. Logica nemodală a predicatelor poate fi extinsă în logica nemodală a predicatelor cu identitate $\mathcal{L}_P^=$, respectiv prin introducerea unui simbol predicativ diadic pentru ideea identităţii: „=". Adică, dacă $M = \langle \Omega, \iota \rangle$ este un model pentru $\mathcal{L}_P$, atunci $=^\iota$ este mulţimea tuturor perechilor de forma $\langle e, e \rangle$, unde $e \in \Omega$. În logica modală a predicatelor, pentru orice asignare μ şi pentru orice $w \in W$ vom avea $[x = y]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $x^\mu = y^\mu$.

Corespunzător, axiomele identităţii în $\mathcal{L}_P^=$ sunt:

Id 1 $\quad x = x$

Id 2 $\quad (x = y) \supset (\alpha \supset \beta)$, unde α şi β diferă strict prin faptul că formula α are variabila x liberă într-un număr arbitrar de ocurenţe în care β are variabila y liberă.

Fie, în continuare, $Q^x S$ *BarId* un sistem modal axiomatic obţinut dintr-un sistem $Q^x S$ *Bar* prin adăugarea axiomelor *Id 1* şi *Id 2.* În acest sistem este demonstrabilă formula *NecId* $(x = y) \supset \Box(x = y)$, potrivit căreia *toate propoziţiile de identitate sunt necesare* (comp. exerc. 7).

La fel de bine, în orice extensie a sistemului $\mathfrak{B}$ se poate demonstra similar *NecId,* însă pentru nonidentităţi, *NecNonId* $(x \neq y) \supset \Box(x \neq y)$, adică *toate propoziţiile de nonidentitate sunt necesare* (comp. exerc. 8).

În orice caz, dată fiind simetria celor două formule, *NecId* şi *NecNonId,* ele pot face parte din acelaşi sistem modal.

Revenind la *NecId,* ideea exprimată de teoremă a stîrnit multe comentarii. Fie, de exemplu, următoarea propoziţie:

(1) Cel care a demonstrat consistenţa teoriei ZF a mulţimilor cu negaţia ipotezei continuului este descoperitorul fenomenului incompletitudinii.

Sau, utilizând predicatul identităţii,

Cel care a demonstrat consistenţa teoriei ZF a mulţimilor cu negaţia ipotezei continuului = descoperitorul fenomenului incompletitudinii.

O obiecţie elementară *împotriva* necesităţii acestei identităţi rezidă în aceea că cele două fapte (demonstraţia de consistenţă şi descoperirea incompletitudinii puteau avea autori diferiţi, nu neaparat aceeaşi persoană, i. e. Kurt Gödel. Şi deci identitatea este una contingentă.

Există însă o altă posibilitate de interpretare a propoziţiei (1), astfel încât ea exprimă un adevăr *necesar.* Fireşte, e un fapt contingent că persoana care a executat demonstraţia de consistenţă (i. e. Kurt Gödel) este de fapt persoana care a executat această demonstraţie. La fel, e un fapt contingent că persoana care a descoperit fenomenul incompletitudinii (i. e. Kurt Gödel) este persoana care a descoperit acest fenomen. Însă, dacă vom înţelege propoziţia (1) astfel: persoana care a executat demonstraţia de consistenţă este identică cu persoana care a descoperit incompletitudinea, atunci (1) spune că o anumită persoană (explicitată diferit prin isprăvile sale) este identică cu sine insăşi şi care, fireşte, nu poate fi decât un adevăr necesar şi astfel un argument în favoarea *NecId.*

Spre deosebire de *NecId,* a cărei expresie conţine variabile individuale, (1) este o expresie care conţine *descripţii definite*[9].Cum ar putea fi exprimată formal (1)?

[9] Această temă este o preocupare constantă a logicienilor de la Frege şi Russell încoace.

Din perspectiva teoriei russelliene a descripțiilor (1) devine

(2) $\exists ! xP(x) \wedge \exists ! xQ(x) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))$,

unde $\exists !x$ înseamnă „există exact un x", iar P și Q sunt proprietățile corespunzătoare: „cel care a demonstrat consistența" și „cel care a descoperit incompletitudinea". (2) poate fi redată, echivalent, în așa fel încât să apară simbolul identității, astfel:

(3) $\exists ! xP(x) \wedge \exists ! xQ(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \supset (x = y))$

Acum, în acord cu *NecId* avem două posibilități distincte de a plasa operatorul „□", iar acest lucru are de-a face cu distincția *de dicto / de re*.[10] Dacă-l plasăm în fața tuturor cuantificatorilor (cazul *de dicto*), atunci dintr-o propoziție adevărată ((2) sau (3)) vom obține una falsă. În schimb, dacă-l plasăm în fața identității din (3) (cazul *de re*), atunci obținem:

(4) $\exists ! xP(x) \wedge \exists ! xQ(x) \wedge \forall x \forall y\, (P(x) \wedge Q(y) \supset \Box(x = y))$, iar aceasta este o propoziție adevărată, care motivează argumentul de mai sus în favoarea *NecId*.

Remarcă 3. NecId și *NecNonId* sunt fundamentate, am văzut, de ideea că $\langle e_1, e_2 \rangle_w \in ='$ ddacă e_1 este același obiect din Ω ca e_2, iar acest lucru are loc pentru *orice* $w \in W$. Identitatea din exemplul (1) de mai sus încetează de a mai fi necesară, dacă există o lume $w \in W$ în care persoana care a efectuat demonstrația de consistență și descoperitorul fenomenului incompletitudinii sunt persoane *distincte*. $x = y$ este deci falsă dacă există lumi în care x^μ și y^μ sunt elemente distincte din Ω. Ceea ce înseamnă că asignarea μ se relativizează la lumile posibile. Aparatul semantic rămâne în esență cel din 5.3. Se modifică doar clauza evaluării formulelor elementare.

$[R]$ $\quad [R(x_1,...,x_n)]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_{1_w}^\mu,...,x_{n_w}^\mu \rangle_w \in R^\iota$

iar conceptul de x-variantă se generalizează astfel: μ și ν sunt x-variante ddacă $y_w^\mu = y_w^\nu$, pentru orice variabilă y, cu excepția posibilă a lui x, și pentru orice $w \in W$.

Este ușor de văzut, cu acest aparat semantic, că *NecId* este falsificabilă. Mai mult, *Id* 2 rămâne o formulă validă, însă cu restricția: α și β nu conțin operatori modali. (Sistemele modale în care *Id 2* este axiomă, cu restricția menționată, se numesc sisteme ale identității contingente). Formula $\Box \exists x P(x) \supset \exists x \Box P(x)$, este o formulă validă (cf. exerc. 9). Și în cazul acestei formule, similar exemplului din remarca precedentă, putem găsi un sens în care ea, deși intuitiv implauzibilă, poate fi totuși acceptată. E clar, din faptul că în mod necesar există cineva care va fi ales președinte nu putem conchide că există o persoană anume care în mod sigur va fi președinte. Însă dacă prin „președinte" înțelegem un singur element (obiect) care în situații diferite (i.e. lumi) poate fi de fiecare dată altul, atunci din asumpția antecedentului implicației putem conchide că există o persoană care *în mod necesar* va fi președinte, respectiv, persoana aleasă. Entitățile de acest gen se numesc *obiecte intensionale* sau *concepte individuale*.[11]

De dicto / De re

Fie următoarea formulă a $\mathcal{L}_{P^\Box}$: $\Box \exists x P(x) \supset \exists x \Box P(x)$. După cum ușor se poate constata, între antecedentul și consecventul acestei implicații există o deosebire logic relevantă. Spre deosebire de antecedent, consecventul conține variabila liberă x în domeniul operatorului modal □. Această diferență formală se traduce intuitiv printr-o diferență de sens. Consecventul, $\exists x \Box P(x)$, are următorul înțeles: există ceva (un lucru / *de re*) iar *acesta* este P în orice lume posibilă. Antecedentul, în schimb, spune: în orice lume posibilă propoziția (*dictum*) că *ceva* este P este adevărată (fără ca acest "ceva" să fie același în orice lume

[10] Comp. mai jos.

[11] Comp. R. Carnap, *Meaning and Necessity*.

posibilă). Aşadar, formulele $\mathcal{L}_P{}^{\circ}$ se divid în formule *de dicto*, în care nici o variabilă nu apare liberă în domeniul unui operator modal, şi *de re*, în cel puţin o variabilă liberă apare în domeniul unui astfel de operator.

Unele formule *de re* sunt echivalente cu cele *de dicto* în orice sistem $Q^x S$, altele doar în unele sisteme. În esenţă însă, nu există nici un sistem modal în care *toate* formulele *de re* să fie echivalente cu formulele *de dicto*. O demonstraţie a acestui lucru, pentru sistemul modal $Q^x S5Bar$, se bazează pe următorul fapt: pentru formulele *de dicto* un model care permută elementele din Ω este echivalent cu modelul pentru care această permutare nu se execută, fapt care nu are loc pentru formulele *de re*. Prezentăm mai jos demonstraţia [12].

Fie următoarele două modele: $M_1 = \langle W, R, \Omega, \iota_1 \rangle$ şi $M_2 = \langle W, R, \Omega, \iota_2 \rangle$ în care *W*, *R* şi Ω sunt aceleaşi. Fie $W = \{w_1, w_2\}$, *R* are loc între orice lumi, $\Omega = \{e_1, e_2\}$. $P^{\iota_1} = \{\langle e_1 \rangle_{w_1}, \langle e_1 \rangle_{w_2}\}$ şi $Q^{\iota_1} = \emptyset$, pentru orice $Q \neq P$. $P^{\iota_2} = \{\langle e_1 \rangle_{w_1}, \langle e_2 \rangle_{w_2}\}$ şi $Q^{\iota_2} = \emptyset$, pentru orice $Q \neq P$. Fie μ^* anti-asignarea lui μ, adică pentru orice variabilă *x* are loc: $x^{\mu} \neq x^{\mu^*}$ [13]. Ceea ce trebuie deci demonstrat este teorema de mai jos.

Teoremă. Dacă α *este o formulă de dicto, atunci* $[\alpha]_{w_1}^{\iota_1,\mu} = [\alpha]_{w_1}^{\iota_2,\mu}$ şi $[\alpha]_{w_2}^{\iota_1,\mu} = [\alpha]_{w2}^{\iota_2,\mu^*}$

Aşadar, dacă α este *de dicto*, atunci un model care schimbă reciproc locul elementelor e_1 şi e_2 în w_2 este echivalent, în raport cu w_1, cu unul care nu face această permutare. Iar acest lucru poate fi arătat prin inducţie pe construcţia formulelor.

Fie $P(x)$ o formulă elementară.

$[P(x)]_{w_1}^{\iota_1,\mu} = 1$ ddacă $\langle x^{\mu} \rangle_{w_1} \in P^{\iota_1}$ ddacă $\langle x^{\mu} \rangle_{w_1} = e_1$ ddacă $\langle x^{\mu} \rangle_{w_1} \in P^{\iota_2}$ ddacă $[P(x)]_{w_1}^{\iota_2,\mu} = 1$.

$[P(x)]_{w_2}^{\iota_1,\mu} = 1$ ddacă $\langle x^{\mu} \rangle_{w_2} \in P^{\iota_1}$ ddacă $x^{\mu} = e_1$ ddacă $x^{\mu^*} = e_2$ ddacă $\langle x^{\mu^*} \rangle_{w_2} \in P^{\iota_2}$ ddacă $[P(x)]_{w_2}^{\iota_2,\mu^*} = 1$.

Pentru formulele de forma $\neg\alpha$ şi $\alpha \circ \beta$ demonstraţia este simplă. Presupunem acum că formula considerată este $\forall x \alpha$. Fiind o formulă *de dicto*, rezultă că şi α este *de dicto*. Şi deci vom avea: $[\forall x \alpha]_{w_1}^{\iota_1,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_{w_1}^{\iota_1,\nu} = 1$ (pentru orice ν *x*-var a lui μ) ddacă $[\alpha]_{w_1}^{\iota_2,\nu} = 1$ (pentru orice ν *x*-var a lui μ) (prin ipoteza inducţiei) ddacă $[\forall x \alpha]_{w_1}^{\iota_2,\mu} = 1$.

$[\forall x \alpha]_{w_2}^{\iota_1,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_{w_2}^{\iota_1,\nu} = 1$ (pentru orice ν *x*-var a lui μ) ddacă $[\alpha]_{w_2}^{\iota_2,\nu^*} = 1$ (prin ipoteza inducţiei). Dacă ν este *x*-var a lui μ, atunci orice *x* variantă ν a lui μ^* va fi ν^*. Şi deci $[\alpha]_{w_2}^{\iota_1,\nu} = 1$ (pentru orice ν *x*-var a lui μ) ddacă $[\alpha]_{w_2}^{\iota_2,\nu} = 1$ (pentru orice ν *x*-var a lui μ^*), adică ddacă $[\forall x \alpha]_{w_2}^{\iota_2,\mu^*} = 1$.

În fine, dacă formula *de dicto* considerată este $\Box\alpha$, atunci α nu conţine variabile libere şi deci valoarea ei logică într-o lume posibilă arbitrară *w* nu este relativă la asignări. Vom avea, aşadar, $[\alpha]_{w}^{\iota_1,\mu} = [\alpha]_{w}^{\iota_1,\nu}$ şi $[\alpha]_{w}^{\iota_2,\mu} = [\alpha]_{w}^{\iota_2,\nu}$, pentru orice asignări μ, ν. Şi deci,

---

[12] Dată pentru prima dată de P. Tichý, On *de dicto* modalities in quantified S5, *Journal of Philosophical Logic*, 2/1973, 687-692; comp. şi Hughes, Cresswell, *A New Introduction*..., Cap. 13.

[13] Restrângem aici mulţimea termenilor logici la mulţimea variabilelor.

a) $[\Box\alpha]_{w}^{i_1,\mu}=1$ ddacă b) $[\alpha]_{w_1}^{i_1,\mu}=1$ şi c) $[\alpha]_{w_2}^{i_1,\mu}=1$. Însă gradul formulei α este strict mai mic decât gradul formulei $\Box\alpha$ şi astfel, prin ipoteza inducţiei, b) are loc ddacă d) $[\alpha]_{w_1}^{i_2,\mu}=1$. Similar, c) are loc ddacă e) $[\alpha]_{w_2}^{i_2,\mu'}=1$. Însă e) este echivalentă cu f) $[\alpha]_{w_2}^{i_2,\mu}=1$ (deoarece α nu conţine variabile libere). De aici echivalenţa dintre f) şi c). Însă d) şi e) sunt echivalente ddacă g) $[\Box\alpha]_{w}^{i_2,\mu}=1$. Din faptul că b) este echivalent cu d) şi c) cu e) plus g) deducem că a) are loc ddacă g) are loc. Pentru $w=w_1$ rezultatul este imediat. Dacă $w=w_2$, atunci g) are loc ddacă h) $[\Box\alpha]_{w_2}^{i_2,\mu^*}=1$ (deoarece $\Box\alpha$ nu conţine variabile libere).

O dată demonstrată teorema de mai sus, trebuie arătat că o formulă *de re*, de exemplu $\exists x\Box P(x)$, nu este echivalentă în $Q^x S5Bar$ cu nici o formulă *de dicto*. Trebuie menţionat că orice teoremă a $Q^x S5Bar$ este satisfiabilă în ambele modele, M_1 şi M_2, de mai sus. Presupunem astfel că există o formulă *de dicto* α astfel încât echivalenţa $\exists x\Box P(x)\equiv\alpha$ este demonstrabilă în $Q^x S5Bar$. Şi astfel vom avea:

$[\exists x\Box P(x)]_{w}^{i_1,\mu}=[\alpha]_{w}^{i_1,\mu}$, respectiv $[\exists x\Box P(x)]_{w}^{i_2,\mu}=[\alpha]_{w}^{i_2,\mu}$, unde μ este o asignare arbitrară. Cum α este o formulă *de dicto*, prin *Teoremă*, vom avea: $[\alpha]_{w_1}^{i_1,\mu}=[\alpha]_{w_1}^{i_2,\mu}$. Şi astfel, pe baza echivalenţei $\exists x\Box P(x)\equiv\alpha$, are loc $[\exists x\Box P(x)]_{w_1}^{i_1,\mu}=[\exists x\Box P(x)]_{w_1}^{i_2,\mu}$. Însă $[\exists x\Box P(x)]_{w_1}^{i_1,\mu}=1$, pentru că există un astfel de x (i.e. e_1) care este P în ambele lumi în M_1, pe când $[\exists x\Box P(x)]_{w_1}^{i_2,\mu}=0$, deoarece nu există *nici un x* care să fie P în *ambele* lumi în M_2. Şi astfel, formula *de re* $\exists x\Box P(x)$ nu este echivalentă cu nici o formulă *de dicto* în sistemul $Q^x S5Bar$ şi deci nu va fi echivalentă cu nici o formulă *de dicto* într-un sistem mai slab decât acest sistem.

5.5. Completitudinea şi incompletitudinea în $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$

5.5.1. Completitudinea sistemelor modale $Q^x S\ Bar$

Demonstrarea completitudinii sistemelor modale $Q^x S\ Bar$ este în mare măsură un rezultat paralel demonstraţiei completitudinii unui sistem arbitrar S de logică modală propoziţională, utilizând ideea de "model canonic". Specificarea unui asemenea model înseamnă, desigur, specificarea itemilor care-l definesc. Întrucât asupra domeniului Ω nu s-a făcut nici o referire în afara nevidităţii lui, drept elemente ale acestei mulţimi vom alege componente ale alfabetului $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$, respectiv mulţimea tuturor variabilelor individuale. Lumile posibile vor fi, şi de această dată, mulţimi maximal consistente de formule[14]. Însă, spre deosebire de logica modală propoziţională, aceste mulţimi trebuie să posede o proprietate adiţională, cea a *ω-completitudinii*[15]. Această proprietate este reclamată de faptul că dacă o expresie de forma $\forall x\alpha$ nu aparţine unei lumi $w\in W$ şi este deci falsă (cf. 4.3.2., Lema 1), atunci ne trebuie un "martor" care să ateste falsitatea ei. Adică ne trebuie o variabilă individuală y, astfel încât $\alpha(x/y)$ să fie falsă.

[14] De fiecare dată prin consistenţa unei mulţimi vom înţelege $Q^x S\ Bar$-consistenţa, chiar dacă acest lucru nu este explicit menţionat.

[15] Comp. şi 3.3.1. (Compl. sist. ax. Q).

Definiția 1. O mulțime Λ este ω-completă dacă pentru orice formulă α și pentru orice variabilă individuală x există o variabilă individuală y astfel că $\neg\forall x\alpha \supset \neg\alpha(x/y) \in \Lambda$; echivalent $\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha \in \Lambda$.

Remarcă. O mulțime de genul $\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), ..., \neg\forall x\alpha(x)\}$ este o mulțime consistentă și deci admite o extensie maximal consistentă care, în schimb, nu admite nici un "martor" cu privire la *falsitatea* formulei $\forall x\alpha(x)$, pentru că nici o formulă de genul $\neg\alpha(x/y_i)$ nu poate fi adăugată consistent acestei mulțimi. Mulțimea de mai sus nu este deci și nici nu poate fi ω-completă. Mulțimi de acest gen reclamă o mică schimbare în aparatul formal: operarea cu două limbaje, $\mathcal{L}_P{}^{\square}$ și $\mathcal{L}_P{}^{\square +}$, unde $\mathcal{L}_P{}^{\square +}$ este, simplu, limbajul specificat în 5.2.1. la care se adaugă o infinitate de variabile individuale noi. Orice astfel de extensie a limbajului logicii (modale sau nu) conservă proprietatea consistenței unei mulțimi Λ de formule.

Teorema 1 (ω-completitudinea). Fie Λ o mulțime consistentă de formule ale $\mathcal{L}_P{}^{\square}$. Atunci există o mulțime Δ de formule ale $\mathcal{L}_P{}^{\square +}$ ω-completă, astfel că $\Lambda \subseteq \Delta$.

Demonstrație. Considerăm mai întâi o enumerare a tuturor formulelor cuantificate universal, $\forall x\alpha$, construite în $\mathcal{L}_P{}^{\square +}$ și a variabilelor individuale. Definim apoi un șir de mulțimi $\Delta_0, \Delta_1, ...$ astfel:

$$\Delta_0 = \Lambda$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha\}$$

unde $\forall x\alpha$ este formula cu numărul de ordine $n+1$ din enumerarea considerată, iar y este o variabilă individuală care nu apare nici în Δ_n, nici în formula α. (Existența unei asemenea variabile este garantată de faptul că toate formulele din Δ_0 conțin variabile doar din $\mathcal{L}_P{}^{\square}$, iar Δ_n e formată din Δ_0 prin adăugarea doar a n formule).

Δ_{n+1} *este o mulțime consistentă.*

Δ_0 este o mulțime consistentă (prin asumpție, fiind tocmai Λ). Vom arăta (prin contrapoziție) că dacă Δ_n este consistentă, atunci și Δ_{n+1} este consistentă. Presupunem, așadar, că Δ_{n+1} nu este consistentă. Există deci $\beta_1, ..., \beta_n \in \Delta_n$ astfel încât:

1. $\vdash \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge (\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha))$
2. $\vdash \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge \neg(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha))$
3. $\vdash \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \vee (\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha)$
4. $\vdash (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset (\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha)$
5. $\vdash (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \alpha(x/y)$; 4, $\mathcal{L}_p$
6. $\vdash (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \neg\forall x\alpha$; 4, $\mathcal{L}_p$
7. $\vdash \forall x((\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \alpha(x/y))$; 5 Gen
8. $\vdash (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \forall y\alpha(x/y)$; 7, Univ 2^x (deoarece y nu apare liberă în $\beta_1, ..., \beta_n$), MP
9. $\vdash (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n) \supset \forall x\alpha$; 8, deoarece $\forall y\alpha(y)$ este o variantă alfabetică a lui $\forall x\alpha$ (fiindcă y nu apare în α).
10. $\vdash \neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$; 6, 8, $\mathcal{L}_p$

Ceea ce contrazice ipoteza consistenței mulțimii Δ_n.

Fie acum $\Delta = \cup\Delta_n$. Δ este, evident, o mulţime consistentă şi ω-completă de formule ale $\mathcal{L}_P{}^{\Box+}$. Δ va avea o extensie maximal consistentă şi ω-completă Γ de formule ale aceluiaşi limbaj $\mathcal{L}_P{}^{\Box+}$.

Teorema 2. Fie Γ *o mulţime maximal consistentă şi* ω*-completă de formule ale* $\mathcal{L}_P{}^{\Box+}$, *fie* α *o formulă astfel că* $\Box\alpha \notin \Gamma$. *Atunci există o mulţime consistentă şi* ω*-completă* Δ *a* $\mathcal{L}_P{}^{\Box+}$ *astfel că* $\Gamma_\beta \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$ *(unde* $\Gamma_\beta = \{\beta : \Box\beta \in \Gamma\}$*).*

Demonstraţie. Considerăm o enumerare a tuturor formulelor de forma $\forall x\delta$. Definim acum un şir de formule $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ în felul următor:

$$\gamma_0 = \neg\alpha$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \wedge (\delta(x/y) \supset \forall x\delta)$$

unde $\forall x\delta$ este cea de-a $n+1$ formulă din enumerarea de mai sus, iar y este prima variabilă astfel încât mulţimea $\Gamma_\beta \cup \{\gamma_{n+1}\}$ este consistentă.

Ceea ce trebuie arătat este tocmai existenţa de fiecare dată a unui asemenea y. El nu poate fi o variabilă nouă, deoarece toate variabilele $\mathcal{L}_P{}^{\Box+}$ sunt deja angajate în formule din Γ_β. Întrucât $\gamma_0 = \neg\alpha$, mulţimea $\Gamma_\beta \cup \{\gamma_0\}$ este o mulţime consistentă (prin *Lema* 4, 4.3.1). Vom arăta, aşadar, că dacă $\Gamma_\beta \cup \{\gamma_n\}$ este consistentă, atunci există un y astfel că $\Gamma_\beta \cup \{\gamma_{n+1}\}$ este consistentă.

Presupunem că nu întotdeauna există un asemenea y. Atunci, pentru orice variabilă $y \in \mathcal{L}_P{}^{\Box+}$ există $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq \Gamma_\beta$ astfel încât

$\vdash \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \wedge \gamma_n \wedge (\delta(x/y) \supset \forall x\delta))$

$\vdash \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \vee \neg(\gamma_n \wedge (\delta(x/y) \supset \forall x\delta)))$

$\vdash (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \supset (\neg\gamma_n \vee \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta))$

$\vdash (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \supset (\gamma_n \supset \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta))$

$\vdash \Box(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \supset \Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta))$; $\mathbf{R}_3$

$\vdash (\Box\beta_1 \wedge \ldots \wedge \Box\beta_m) \supset \Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta))$; $\mathbf{K}_4^*$

Însă Γ este o mulţime maximal consistentă (prin ipoteză) iar fiindcă $\Box\beta_1, \ldots, \Box\beta_m$ sunt formule din Γ rezultă că $\Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta)) \in \Gamma$ pentru orice y. Tot prin ipoteză Γ este ω-completă. Fie acum z o variabilă care nu apare în δ sau în γ_n, fie formula $\forall z\Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$. Din ω-completitudinea mulţimii Γ rezultă că există o variabilă y astfel încât $\Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/y) \supset \forall x\delta)) \supset \forall z\Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$ este o formulă din Γ. Însă, am văzut deja, antecedentul acestei formule este deja o formulă din Γ, pentru orice y. Şi deci şi consecventul, $\forall z\Box(\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$, este o formulă din Γ. Însă Γ este o mulţime Q^xS *Bar* - maximal consistentă şi deci, prin *Bar*, rezultă că $\Box\forall z\ (\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$ este o formulă din Γ. Însă întrucât z nu apare în γ_n sau δ, prin *Univ* 2^x obţinem

$\vdash \forall z\ (\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta)) \supset (\gamma_n \supset \forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$, formulă din Γ.

Şi astfel, prin aplicarea $\mathbf{R}_3$

$\vdash \Box\forall z\ (\gamma_n \supset \neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta)) \supset \Box(\gamma_n \supset \forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$, care este o formulă din mulţimea Γ. Însă antecedentul acesti implicaţii este formula de mai sus, obţinută prin *Bar*. Şi

astfel, prin *MP*, conchidem că $\Box(\gamma_n \supset \forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))$ este o formulă din Γ. Însă prin Exerc. 4, 3.3, avem $\vdash \exists z(\delta(x/z) \supset \forall x\delta)$. Iar,

$[(\gamma_n \supset \forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))] \supset [\neg\forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta) \supset \neg\gamma_n]$

Şi deci, $\Box[(\gamma_n \supset \forall z\neg(\delta(x/z) \supset \forall x\delta))] \supset \Box[\exists z(\delta(x/z) \supset \forall x\delta) \supset \neg\gamma_n]$, $\mathbf{R}_3$

Cum antecedentul acestei implicaţii este o formulă din Γ rezultă că $\Box[\exists z(\delta(x/z) \supset \forall x\delta) \supset \neg\gamma_n]$ este o formulă din Γ; de unde, prin $\mathbf{R}_3$ obţinem $\Box\exists z(\delta(x/z) \supset \forall x\delta) \supset \Box\neg\gamma_n$ este o formulă din Γ. Însă antecedentul acestei implicaţii se obţine din teorema de mai sus, $\exists z(\delta(x/z) \supset \forall x\delta)$ şi Regula N. Aşadar, obţinem $\Box\neg\gamma_n \in \Gamma$. Şi deci $\neg\gamma_n \in \Gamma_\beta$, ceea ce face ca mulţimea Δ_n să fie inconsistentă.

Fie acum Δ reuniunea mulţimii Γ_β cu toate formulele γ_n. Δ este o mulţime consistentă, deoarece fiecare mulţime $\Gamma_\beta \cup \{\gamma_n\}$ este consistentă şi deoarece pentru orice $k \geq n$ are loc $\gamma_k \supset \gamma_n$. Δ este, totodată, ω-completă.

Definiţia 2. Un model canonic pentru un sistem $Q^x S$ Bar într-un limbaj $\mathcal{L}_P$ (cu extensia $\mathcal{L}_P^+$) este cvadruplul $\langle W, R, \Omega, \iota\rangle$, unde

W este mulţimea tuturor mulţimilor maximal consistente şi ω-complete de formule ale $\mathcal{L}_P{}^{\Box +}$.

R: wRw^* ddacă pentru orice $\Box\alpha \in w$, $\alpha \in w^*$; echivalent, pentru orice $\Box\alpha \in w$, $w_\beta \subseteq w^*$.

Ω este mulţimea tuturor variabilelor individuale ale $\mathcal{L}_P{}^{\Box +}$.

$[P(x_1,\ldots,x_n)]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_1^\mu,\ldots,x_n^\mu\rangle_w \in P^\iota$ ddacă $P(x_1,\ldots,x_n) \in w$. În cele ce urmează funcţia asignare μ este astfel că, pentru orice x, $x^\mu = x$.

Teorema 3. Pentru orice formulă $\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\Box +}$ şi pentru orice $w \in W$: $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\alpha \in w$.

Demonstraţie. (inducţie structurală)

1. $[P(x_1,\ldots,x_n)]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_1^\mu,\ldots,x_n^\mu\rangle_w \in P^\iota$ ddacă $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle_w \in P^\iota$ ddacă $P(x_1,\ldots,x_n) \in w$.

2. $[\neg\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$ ddacă $\alpha \notin w$ ddacă $\neg\alpha \in w$.

3. $[\alpha \supset \beta]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$ sau $[\beta]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $\alpha \notin w$ sau $\beta \in w$ ddacă $\alpha \supset \beta \in w$.

4. $\forall x\alpha$. a) Presupunem că $\forall x\alpha \in w$. Deducem $\alpha(x/y) \in w$ (prin *Univ* 1^x şi MP). Însă w este ω-completă. Şi deci pentru orice x există y astfel că $(\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha) \in w$. Fie ν o x-variantă arbitrară a lui μ astfel că $x^\nu = y^\mu = y$. Însă $[\alpha(x/y)]_w^{\iota,\mu} = 1$ (prin ipoteza inducţiei). Şi deci $[\alpha(x)]_w^{\iota,\nu} = 1$ pentru orice ν x-variantă a lui μ (prin *Lemă*, 3.1.2). Şi astfel, $[\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$.

b) Presupunem că $\forall x\alpha \notin w$. Atunci $\neg\forall x\alpha \in w$ şi astfel, fiindcă w este ω-completă în $\mathcal{L}_P{}^{\Box +}$, există $y \in \mathcal{L}_P{}^{\Box +}$ astfel că $\neg\alpha(x/y) \in w$. Şi deci $\alpha(x/y) \notin w$. Şi astfel $[\alpha(x/y)]_w^{\iota,\mu} = 0$. Şi deci $[\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$ (prin *Univ* 1^x).

5. $\Box\alpha$. a) Presupunem că $\Box\alpha \in w$ şi wRw^*. Atunci $\alpha \in w^*$ şi astfel $[\alpha]_{w^*}^{l,\mu} = 1$. Şi cum acest lucru are loc pentru orice w^* astfel că wRw^*, vom avea $[\Box\alpha]_{w}^{l,\mu} = 1$.

b) Presupunem că $\Box\alpha \notin w$. Atunci $\neg\Box\alpha \in w$. Şi deci există $w^* \in W$, consistentă şi ω-completă (prin *Teorema 2*) astfel că $\neg\alpha \in w^*$. Şi astfel $\alpha \notin w^*$. Şi deci $[\alpha]_{w^*}^{l,\mu} = 0$. Însă wRw^* şi astfel $[\Box\alpha]_{w}^{l,\mu} = 0$.

Echivalenţa dintre adevărul unei formule într-o lume w şi apartenenţa la lumea respectivă fundamentează echivalenţa *Can* dintre validitatea unei formule în modelul canonic pentru $Q^x S$ *Bar* şi demonstrabilitatea formulei în $Q^x S$ *Bar*.

(Can) $\qquad \vdash_{Q^x S Bar} \alpha$ *ddacă* $\vDash_{Can} \alpha$.

În 5.4. am văzut în ce sens se corelează corectitudinea unui sistem S de logică modală propoziţională cu sistemul aferent $Q^x S$ *Bar* de logică modală a predicatelor. O asemenea corelaţie poate fi semnalată şi în ceea ce priveşte incompletitudinea. Să vedem acest lucru.

Definiţia 3. Fie α *o formulă a logicii modale a predicatelor. Fie* α^* *formula obţinută din* α *prin eliminarea tuturor cuantificatorilor, a tuturor variabilelor individuale şi prin înlocuirea simultană a tuturor simbolurilor predicative distincte cu variabile propoziţionale distincte.* α^* *este transformarea propoziţională a formulei* α*; abrev* $\tau(\alpha)$.

Exemplu. $\qquad \alpha : \exists x \Box Q(x, y) \supset P(z)$

$\qquad\qquad \alpha^* : \Box q \supset p$

Lemă. Fie $\vdash_{Q^x S Bar} \alpha$ *iar* $\alpha^* = \tau(\alpha)$. *Atunci* $\vdash_S \alpha^*$.

Demonstraţie. Tot ceea ce trebuie demonstrat este următorul lucru: demonstraţia formulei α în $Q^x S$ *Bar* poate fi *convertită* într-o demonstraţie a formulei α^* în sistemul S. Însă, în acord cu definiţia unei demonstraţii, orice formulă din demonstraţia formulei α este fie o exemplificare a unei scheme de axiome, fie rezultă din formule anterioare prin aplicarea regulilor de deducţie. Dacă formula respectivă este o exemplificare a *Ax* 1^x, atunci transformarea ei propoziţională este o teoremă a sistemului propoziţional S. Dacă formula este o exemplificare a *Univ* 1^x sau *Bar*, atunci transformarea ei propoziţională este o exemplificare a teoremei $p \supset p$ şi este deci o teoremă a sistemului S. În fine, dacă formula este o exemplificare a *Univ* 2^x, atunci transformarea ei propoziţională este o exemplificare a teoremei $(p \supset q) \supset (p \supset q)$ şi este deci o teoremă a sistemului S.

Aplicarea regulilor MP şi N este similară sistemelor S şi $Q^x S$ *Bar*, iar regula *Gen* devine o aplicare a schemei $\dfrac{P}{P}$.

Considerăm acum o enumerare a tuturor variabilelor propoziţionale $p_1, p_2, \ldots$, a tuturor simbolurilor predicative monadice $P_1, P_2, \ldots$ şi a tuturor variabilelor individuale $x_1, x_2, \ldots$.

Definiţia 4. Fie β_1 *o formulă a logicii modale propoziţionale. Fie* β_2 *formula* $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$ *care rezultă din* β_1 *prin înlocuirea simultană a fiecărei variabile propoziţionale* p_i *cu formula elementară* $P_i(x_i)$. *Evident,* $\beta_1 = \tau(\beta_2)$. β_1 *şi* β_2 *se numesc formule perechi.*

Exemplu. $\qquad \beta_1 \Box p_1 \supset [\Box\Box(p_1 \supset p_2) \vee p_3]$

$\qquad\qquad \beta_2 \Box P_1(x_1) \supset [\Box\Box(P_1(x_1) \supset P_2(x_2)) \vee P_3(x_3)]$

Consecinţă a lemei de mai sus. Dacă β_1 şi β_2 sunt formule perechi, atunci dacă

$\vdash_{Q^x SBar} \beta_2$, atunci $\vdash_S \beta_1$.

Ingredientele de mai sus sunt suficiente pentru demonstrarea corelației, mai sus menționate, cu privire la incompletitudine.

Teorema 4. Dacă S este un sistem modal propozițional incomplet, atunci și sistemul $Q^x S$ Bar este incomplet.

Demonstrație. Presupunem antecedentul condiționalului din teoremă: S este incomplet. Există deci o formulă β_1 de logică modală propozițională, validă în orice cadru $\langle W, R\rangle$ al lui S, dar care nu este teoremă a lui S. Fie β_2 formula $\mathcal{L}_P$ ᵅ, perechea formulei β_1. β_2 este o formulă validă în orice cadru $\langle W, R\rangle$ al lui S (fiind o exemplificare a formulei β_1). Şi deci β_2 este validă în orice cadru $\langle W,R\rangle$ al sistemului $Q^x S$ *Bar* (cf. 5.4., *Teoremă*). Însă, prin contrapoziție din *Consecința* Lemei de mai sus, rezultă că β_2 nu este teoremă a sistemului $Q^x S$ *Bar*. Şi deci $Q^x S$ *Bar* este incomplet.

Remarcă. Echivalența din *Teoremă*, 5.4., nu generează vreun rezultat cu privire la completitudine. Căci o clasă C de cadre poate fi comună pentru două sisteme și totuşi C poate caracteriza doar unul dintre ele (comp. *Remarcă 1* şi *Remarcă 3*, 4.4.). Prin *Teoremă*, 5.4., putem obține însă un alt rezultat. Să presupunem că sistemul $Q^x S$ *Bar* este *complet*. În acord cu ideea completitudinii, există deci o clasă C de cadre care-l caracterizează. Acestea sunt cadrele pentru $Q^x S$ *Bar*. Prin *Teoremă*, 5.4., acestea sunt exact cadrele pentru S. Şi deci: *dacă $Q^x S$ Bar este complet, atunci putem menționa cel puțin o clasă de cadre care-l caracterizează, clasa tuturor cadrelor pentru S.*

Teorema 5. Fie $\langle W, R\rangle$ cadrul modelului canonic pentru $Q^x S$ Bar. Presupunem că $\langle W, R\rangle$ este un cadru pentru S. Atunci $Q^x S$ Bar este caracterizat de clasa tuturor cadrelor pentru S.

Demonstrație. Ceea ce trebuie demonstrat aşadar este următorul fapt:

$\vdash_{Q^x SBar} \alpha$ ddacă $\vDash_C \alpha$, unde C este clasa tuturor cadrelor pentru S.

a) Dacă $\vdash_{Q^x SBar} \alpha$, atunci $\vDash_C \alpha$. Presupunem antecedentul $\vdash_{Q^x SBar} \alpha$. Fie acum $\langle W,R\rangle$ un cadru arbitrar pentru S. Prin *Teoremă*, 5.4., $\langle W, R\rangle$ este şi un cadru pentru $Q^x S$ *Bar* şi deci α este validă în $\langle W,R\rangle$. Şi deci α este C-validă.

b) Dacă $\vDash_C \alpha$, atunci $\vdash_{Q^x SBar} \alpha$. Prin contrapoziție, obținem: Dacă *non* $\vdash_{Q^x SBar} \alpha$, atunci *non* $\vDash_C \alpha$. Presupunem antecedentul, *non*$\vdash_{Q^x SBar} \alpha$. Rezultă că $\neg\alpha$ este $Q^x S$ *Bar* -consistentă. Şi deci există o lume $w \in W$ astfel încât $\neg\alpha \in w$ în modelul canonic pentru $Q^x S$ *Bar*. Şi astfel, prin *Teorema 3*, de mai sus, $[\neg\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ şi deci $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$. Însă, prin ipoteză, $\langle W, R\rangle$ este un cadru pentru S. Aşadar, α nu este S-validă.

Completitudinea sistemelor modale $Q^x S$ Bar

Demonstrațiile de completituine sunt similare sistemelor modale propoziționale. Vom considera doar un exemplu. Fie sistemul $Q^x S4Bar$. Trebuie să arătăm că acest sistem este complet în raport cu clasa tuturor cadrelor reflexive și transitive. În acord cu metoda "modelului canonic", trebuie să arătăm că relația R (i.e. cadrul modelului canonic) este

reflexivă şi tranzitivă. Cum sistemul $Q^x S\ Bar$ este $Q^x K\ Bar + \Box p \supset p + \Box p \supset \Box\Box p$, vom arăta că R este reflexivă şi tranzitivă astfel:

a) R este reflexivă. Fiindcă $\Box p \supset p$ este teoremă a sistemului $Q^x S\ Bar$, $\Box \alpha \supset \alpha$ este, de asemenea, teoremă a acestui sistem (unde α este orice formulă a $\mathcal{L}_{P}{}^{\Box}$). Fiind teoremă, $\Box \alpha \supset \alpha$ aparține oricărei lumi în modelul canonic pentru $Q^x S\ Bar$. Şi deci dacă $\Box \alpha \in w$, atunci şi $\alpha \in w$. Şi deci $w_\beta \subseteq w$. Adică are loc wRw.

b) R este tranzitivă. Presupunem $w, w^*, w^{**} \in W$ astfel că wRw^* şi w^*Rw^{**}. Ceea ce trebuie arătat este că wRw^{**} are loc. Adică dacă $\Box \alpha \in w$, atunci $\alpha \in w^{**}$. Însă $\Box p \supset \Box\Box p$ este teoremă a sistemului $Q^x S\ Bar$ şi deci $\Box \alpha \supset \Box\Box \alpha$ este teoremă a acestui sistem. Şi astfel, dacă $\Box \alpha \in w$, atunci şi $\Box\Box \alpha \in w$. Însă, cum are loc wRw^*, din $\Box\Box \alpha \in w$ rezultă $\Box \alpha \in w^*$. În fine, fiindcă are loc w^*Rw^{**} vom avea $\alpha \in w^{**}$, ceea ce înseamnă că wRw^{**} are loc.

5.5.2. Incompletitudinea sistemului modal $Q^x S4MBar$

Sistemul modal propozițional $S4M$ se obține din sistemul modal $S4$ prin adăugarea axiomei M: $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p$. Validitatea acestei axiome reclamă condiția *finalității* relației R (i.e. M este validă într-un cadru $\langle W, R\rangle$ ddacă $\langle W, R\rangle$ este un cadru final). Simplu spus, prin finalitatea relației de accesibilitate înțelegem: orice lume $w \in W$ are relația R cu o lume w^* finală iar w^* se numeşte finală dacă w^* are relația R doar cu sine.

$$\langle W, R\rangle_{fin} =_{df} \forall w \in W \exists w^* \in W\left[wRw^* \wedge \forall w^{**} \in W\left(w^*Rw^{**} \supset \left(w^* = w^{**}\right)\right)\right]$$

Sistemul modal $Q^x S4MBar$ este sistemul de logică modală a predicatelor corespunzător lui $S4M$ plus formula *Bar*.

Fie γ: $\Box \exists x P(x) \supset \Diamond \exists x \Box P(x)$

Lema 1. γ este validă pe orice cadru reflexiv, tranzitiv şi final.

Demonstrație. Fie $\langle W, R\rangle$ un cadru reflexiv, tranzitiv şi final. Fie $M = \langle W, R, \Omega, \iota\rangle$ un model bazat pe $\langle W, R\rangle$; fie $w \in W$ şi o asignare μ în M astfel că $[\Box \exists x P(x)]^{\iota,\mu}_{w} = 1$. Întrucât $wRw*$ (unde w^* este o lume finală), rezultă că $[\exists x P(x)]^{\iota,\mu}_{w^*} = 1$. Există, aşadar, o asignare ν x-variantă a asignării μ, astfel încât $[P(x)]^{\iota,\nu}_{w^*} = 1$. Iar fiindcă w^* este o lume finală, vom avea $[\Box P(x)]^{\iota,\nu}_{w^*} = 1$. Şi astfel $[\exists x \Box P(x)]^{\iota,\mu}_{w^*} = 1$. Şi deci $[\Diamond \exists x \Box P(x)]^{\iota,\mu}_{w} = 1$.

Propoziția 1. γ nu este teoremă a sistemului $Q^x S4MBar$.

Pentru a demonstra această propoziție este suficient să construim un model $M = \langle W, R, \Omega, \iota\rangle$ în care orice teoremă a sistemului $Q^x S4MBar$ este validă iar γ nu. (Idee obținută prin contrapoziție din: Dacă $\vdash \gamma$, atunci $\models \gamma$).

Fie $M = \langle N, \leq, N, \iota\rangle$. Pentru orice predicat $Q \neq P$: $Q^\iota = \emptyset$ iar $P^\iota = \{\langle i\rangle_i : i \in N\}$. Echivalent, $[P(x)]^{\iota,\mu}_{w} = 1$ ddacă $\langle x^\mu\rangle_w \in P^\iota$ ddacă $\langle i\rangle_i \in P^\iota$. În acest model γ nu este validă.

Demonstrație. Întrucât R este reflexivă şi tranzitivă, rezultă că toate celelalte axiome ale sistemului $Q^x S4MBar$ sunt valide în M. De asemenea toate regulile de deducție ale sistemului $Q^x S4MBar$ conservă validitatea în model.

Fie μ o asignare arbitrară. Pentru orice $n \in N$, fie ν o x-variantă a lui μ astfel că $x^\nu = n$. În acest caz $[P(x)]_n^{\iota,\nu} = 1$. Întrucât *există* o asemenea ν x-variantă a lui μ, avem $[\exists x P(x)]_n^{\iota,\mu} = 1$ pentru *orice* $n \in N$. Şi deci $[\Box \exists x P(x)]_n^{\iota,\mu} = 1$. De unde, pentru $n = 0$, avem $[\Box \exists x P(x)]_0^{\iota,\mu} = 1$.

Fie acum un n arbitrar iar ν o x-variantă arbitrară a lui μ. Fie acum un $m \geq n$ astfel că $x^\nu \neq m$. În acest caz, $[P(x)]_m^{\iota,\nu} = 0$ şi $[\Box P(x)]_n^{\iota,\nu} = 0$ pentru orice ν x-variantă a lui μ. Şi deci $[\exists x \Box P(x)]_n^{\iota,\mu} = 0$. Iar fiindcă acest lucru are loc pentru orice $n \in N$, vom avea $[\Diamond \exists x \Box P(x)]_0^{\iota,\mu} = 0$. Şi astfel, $[\alpha]_0^{\iota,\mu} = 0$.

Propoziția 2. *Formula* $\Box\Diamond\alpha \supset \Diamond\Box\alpha$ *este validă în* $M = \langle W, R, \Omega, \iota \rangle$.

Considerăm formulele elementare *P, Q, R*, ... Pentru orice predicat n-adic Q^n, diferit de *P*, considerăm $[Q(x_1,...,x_n)]_w^{\iota,\mu} = 0$, pentru orice $w \in W$. Fie $P(x)$, monadic, astfel încât $[P(x)]_i^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $x^\mu = i$. Fie acum $m \leq n$ iar ν o asignare astfel că $x^\nu = n - m$. Evident, $[P(x)]_m^{\iota,\nu} = 1$ ddacă $x^\nu = m$. Şi astfel, deducem că dacă $x^\mu - x^\nu = n - m$, atunci $[P(x)]_n^{\iota,\mu} = [P(x)]_m^{\iota,\nu}$. Iar acest lucru este valabil pentru orice formulă α cu l variabile libere, fapt exprimat de lema de mai jos:

Lema 2. Fie α *o formulă arbitrară,* $m \leq n$, μ *şi* ν *astfel că pentru orice variabilă liberă x din* α *are loc fie*

1. $x^\mu < n$ *şi* $x^\nu < m$, *fie*

2. $x^\mu - x^\nu = n - m$

Atunci, $[\alpha]_n^{\iota,\mu} = [\alpha]_m^{\iota,\nu}$.

Demonstrație (inducție structurală)

1. Dacă α este o formulă elementară, atunci α este fie o formulă $Q(x_1,...,x_n)$, unde *Q* este un predicat n-adic diferit de *P*, fie $P(x)$. În primul caz $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$, pentru orice $w \in W$ (prin definiție) şi deci *Lema* are loc. În cel de-al doilea, avem de considerat cele două cazuri din *Lemă*. Dacă $x^\mu < n$ şi $x^\nu < m$, atunci $[P(x)]_n^{\iota,\mu} = 0$ şi $[P(x)]_m^{\iota,\nu} = 0$. Pentru 2 din *Lemă* presupunem că $x^\mu - x^\nu = n - m$. Vom avea, corespunzător, $[P(x)]_n^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $x^\mu = n$ ddacă $x^\mu - m = n - m$ ddacă $x^\mu - m = x^\mu - x^\nu$ ddacă $x^\nu = m$ ddacă $[P(x)]_m^{\iota,\nu} = 1$.

2. Presupunem că α are forma $\neg\beta$. Însă variabilele libere din α (i.e. $\neg\beta$) sunt variabilele libere din β. Cum, prin ipoteză, lema are loc pentru β, vom avea $[\beta]_n^{\iota,\mu} = [\beta]_m^{\iota,\nu}$. Şi deci $[\neg\beta]_n^{\iota,\mu} = [\neg\beta]_m^{\iota,\nu}$, echivalent $[\alpha]_n^{\iota,\mu} = [\alpha]_m^{\iota,\nu}$.

3. α are forma $\beta \circ \gamma$ (luați un exemplu; exercițiu).

4. α are forma $\Box\beta$.

a) Presupunem că $[\Box\beta]_n^{\iota,\mu} = 1$ şi $n \leq k$ astfel că nRk. Rezultă că $[\beta]_k^{\iota,\mu} = 1$. Pentru orice h astfel că $m \leq h$ şi mRh există k ($n \leq k$) astfel încât $k - h = n - m$. Considerăm fiecare pereche k şi h şi orice x liberă din α.

1*. Dacă $x^\mu < n$ şi $x^\nu < m$, atunci $x^\mu < k$ şi $x^\nu < h$.

2*. Dacă $x^\mu - x^\nu = m - n$, atunci $x^\mu - x^\nu = k - h$.

Şi deci dacă 1 şi 2 au loc pentru β în raport cu n şi m, atunci au loc şi pentru k şi h. Şi astfel $[\beta]_k^{\iota,\mu} = [\beta]_h^{\iota,\nu}$ (prin ipoteza inducţiei). Însă $[\beta]_k^{\iota,\mu} = 1$ şi astfel $[\beta]_h^{\iota,\nu} = 1$. Întrucât pentru orice $m \leq h$ există un astfel de k, vom avea $[\Box\beta]_m^{\iota,\nu} = 1$.

b) Presupunem că $[\Box\beta]_n^{\iota,\mu} = 0$. Există deci cel puţin un k, astfel că $n \leq k$, nRk şi $[\beta]_k^{\iota,\mu} = 0$. Iar dacă h este astfel încât $k - h = n - m$ vom avea $[\beta]_h^{\iota,\nu} = 0$ şi astfel $[\Box\beta]_m^{\iota,\nu} = 0$.

5. α are forma $\forall x\beta$.

a) Presupunem că $[\forall x\beta]_n^{\iota,\mu} = 0$. Rezultă că $[\beta]_n^{\iota,\rho} = 0$ pentru cel puţin o x-variantă ρ a lui μ. Presupunem acum că pentru orice variabilă liberă y din $\forall x\beta$, echivalent, pentru orice variabilă liberă din β cu excepţia posibilă a lui x, au loc 1 sau 2 din *Lemă*. Fie λ o x-variantă a lui ν astfel că $x^\rho - x^\lambda = n - m$. Atunci ρ şi λ satisfac 1 şi 2 în raport cu n şi m şi astfel, prin ipoteza inducţiei, are loc: $[\beta]_m^{\iota,\lambda} = [\beta]_n^{\iota,\rho} = 0$. Şi deci $[\forall x\beta]_m^{\iota,\nu} = 0$.

b) Dacă $[\forall x\beta]_m^{\iota,\nu} = 0$, atunci $[\beta]_m^{\iota,\lambda} = 0$ pentru o x-variantă λ a lui ν. Fie ρ x-varianta lui μ astfel că $x^\rho - x^\lambda = n - m$. Vom avea astfel $[\beta]_n^{\iota,\rho} = [\beta]_m^{\iota,\lambda} = 0$ şi astfel $[\forall x\beta]_n^{\iota,\mu} = 0$.

Din această *Lemă*, sub asumpţiile: 1 are loc şi $\mu = \nu$, obţinem:

Corolar. Dacă $x^\mu < m$ pentru orice variabilă liberă x din α iar $m \leq n$, atunci $[\alpha]_n^{\iota,\mu} = [\alpha]_m^{\iota,\mu}$.

Dat fiind acest corolar, se poate demonstra validitatea în $M = \langle W, R, \Omega, \iota\rangle$ a formulei $\Box\Diamond\alpha \supset \Diamond\Box\alpha$, unde α este o formulă arbitrară. Presupunem $[\Box\Diamond\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$. Fie w^* astfel că $w \leq w^*$ şi $x^\mu < w^*$ pentru orice variabilă liberă x din α. Din $w \leq w^*$ rezultă wRw^*. Şi deci $[\Diamond\alpha]_{w^*}^{\iota,\mu} = 1$. Şi astfel, în acord cu definiţia posibilităţii, există o lume m astfel că $w^* \leq m$ şi w^*Rm şi $[\alpha]_m^{\iota,\mu} = 1$. Iar fiindcă $x^\mu < w^*$ (pentru orice variabilă liberă x din α) iar $w^* \leq m$ rezultă că $x^\mu < m$ (pentru orice x). De unde, prin corolarul de mai sus, pentru orice n, astfel că $m \leq n$, $[\alpha]_n^{\iota,\mu} = 1$ şi astfel $[\Box\alpha]_m^{\iota,\mu} = 1$; şi astfel $[\Diamond\Box\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$.

Teoremă 2. Sistemul $Q^x S4MBar$ este incomplet.

Demonstraţie. Prin *Propoziţia* 2, de mai sus, am văzut că $\Box\Diamond\alpha \supset \Diamond\Box\alpha$ este validă în modelul $M = \langle W, R, \Omega, \iota\rangle$.Cum M este reflexiv şi tranzitiv rezultă că orice teoremă a $Q^x S4MBar$ este validă în M. Însă, prin *Propoziţia* 1, am văzut că formula γ nu este teoremă a $Q^x S4MBar$. Iar prin *Lema* 1 am văzut că γ este validă în orice cadru reflexiv, tranzitiv şi final (i.e. orice cadru pentru $S4M$). Şi deci γ este validă în orice cadru $Q^x S4MBar$. Aşadar, nu toate formulele valide ale $Q^x S4MBar$ sunt teoreme. Şi deci $Q^x S4MBar$ este incomplet.

5.5.3. Completitudinea sistemelor modale $Q^x S$

Aşa cum am văzut în 5.1. construcţia unui sistem axiomatic modal nu este independentă de consideraţii filosofice. Acceptarea, de exemplu, a formulei *Bar* ca axiomă are ca suport filosofic ideea: "Dacă orice posedă în mod necesar o anumită proprietate *P*, atunci este necesar ca orice să posede acea proprietate". Insutenabilitatea acestei idei are ca sursă faptul că chiar dacă orice există actualmente este în mod necesar *P*, aceasta nu înseamnă că n-ar fi putut exista entităţi care n-au această proprietate, caz în care consecventul implicaţiei *Bar*

n-ar mai fi un adevăr necesar. Aşadar, validarea fonnulei *Bar* este conectată cu ideea că *aceleaşi obiecte* există în orice lume posibilă. Şi deci respingerea acestei idei antrenează şi schimbări în semantică.

Pentru sistemele $Q^x S$ un model este cvadruplul $\langle W, R, \psi(\Omega), \iota\rangle$, în care *W, R, ι* sunt itemii specificaţi în 5.3., iar $\psi(\Omega)$ este o funcţie de la *W* la mulţimi $M \subseteq \Omega$. $\psi(\Omega)_w$, abreviat Ω_w, reprezintă lumea obiectelor (logice) din lumea *w*, respectiv acele elemente din Ω care sunt elemente ale lumii *w*. Iar dacă într-o formulă $P(x)$, în care *x* este variabilă liberă, lui *x* i se asignează în lumea *w* un element care nu aparţine domeniului acelei lumi, i. e. Ω_w, putem admite că $P(x)$ este *adevărată* sau *falsă* (şi nu lipsită de sens!), deoarece care elemente fac parte din P^ι acest lucru este specificat *în fiecare lume*. Pentru acest motiv clauzele $[R]$, $[\neg]$, $[\circ]$, $[\Box]$ şi $[\Diamond]$ din Def. 2, 5.3., rămân neschimbate. Doar $[\forall]$ şi $[\exists]$ se modifică.

$[\forall^*]$ $[\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ ddacă $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 1$ pentru orice ν *x*-variantă a asignării μ, astfel că $x^\nu \in \Omega_w$.

($[\exists^*]$ – corespunzător)

Iar Def. 3, 5.2. devine

Definiţia 3^*. *O formulă* α *este validă într-un model* $\langle W, R, \psi(\Omega), \iota\rangle$ *dacă* $[\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$ *pentru orice* $w \in W$ *şi pentru orice asignare* μ *astfel că* $x^\mu \in \Omega_w$, *pentru orice variabilă x.*

Este uşor de văzut că orice teoremă a $Q^x S$ este o fonnulă validă (i.e. adevărată în orice *exemplificare* a ei) în acest model. *Bar*, în schimb, nu este întotdeauna teoremă (comp. Exerc. 1, Cap. 5).

Demonstraţia completitudinii sistemelor $Q^x S$ este similară demonstrării completitudinii sistemelor $Q^x S$ *Bar* cu ajutorul metodei modelelor canonice. Pentru construcţia unui model canonic presupunem, similar expunerii din 5.5.1., două limbaje $\mathcal{L}_{P^\Box}$ şi $\mathcal{L}_{P^\Box}{}^+$, astfel încât $\mathcal{L}_{P^\Box}{}^+$ conţine o infinitate de variabile noi în raport cu $\mathcal{L}_{P^\Box}$. *W* reprezintă mulţimea tuturor mulţimilor maximal consistente. Însă întrucât lumile posibile diferă sub aspectul individualilor care le compun (i.e. variabilele individuale), acestea vor fi mulţimi maximal consistente de fonnule în limbajele aferente. O lume *w* în modelul canonic va conţine fonnule din $\mathcal{L}_{P^\Box}(w)$, limbaj care conţine toate variabilele din $\mathcal{L}_{P^\Box}$ şi posibil unele variabile din $\mathcal{L}_{P^\Box}{}^+$.

Definiţie. Fie $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{L}^*$ *două limbaje care conţin aceleaşi simboluri predicative.* $\mathcal{L}^*$ *este o extensie proprie infinită a limbajului* $\mathcal{L}$ *dacă* $\mathcal{L}^*$ *conţine o infinitate de noi variabile individuale, neconţinute în* $\mathcal{L}$. *În acest caz vom spune că* $\mathcal{L}$ *este un sublimbaj al limbajului* $\mathcal{L}^*$.

Teorema 1. Fie $w \in W$ *şi* $\neg\Box\alpha \in W$. *Atunci există o mulţime maximal consistentă şi* ω*-completă în* $\mathcal{L}_{P^\Box}(w')$ *care conţine* $\mathcal{L}_{P^\Box}(w)$ *astfel că* $w_\beta \cup \{\neg\alpha\} \subseteq w'$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{L}_{P^\Box}(w')$ un sublimbaj al $\mathcal{L}_{P^\Box}{}^+$ iar $\mathcal{L}_{P^\Box}(w)$ un sublimbaj al $\mathcal{L}_{P^\Box}(w')$. Mulţimea $w_\beta \cup \{\neg\alpha\}$ este o mulţime consistentă (prin *Lema* 4, 4.3.1). Evident, toate formulele acestei mulţimi sunt formule ale $\mathcal{L}_{P^\Box}(w)$. Întrucât $\mathcal{L}_{P^\Box}(w)$ este un sublimbaj al $\mathcal{L}_{P^\Box}(w')$ mulţimea $w_\beta \cup \{\neg\alpha\}$ admite o extensie consistentă şi ω-completă în $\mathcal{L}_{P^\Box}(w')$, Δ (prin Th. ω-completitudinii). Iar prin *Lema lui Lindenbaum* w' admite o extensie maximal consistentă.

Modelul canonic pentru un sistem $Q^x S$ este, în esență, cel din Def. 2 din 5.5.1., cu următoarele specificări. W este mulțimea tuturor mulțimilor maximal consistente și ω-complete într-un limbaj $\mathcal{L}_P{}^{\circ +}$. wRw' are loc ddacă pentru orice $\Box\alpha \in w$, $\alpha \in w'$, echivalent, pentru orice $\Box\alpha \in w$, $w_\beta \subseteq w'$. Ω este mulțimea variabilelor din $\mathcal{L}_P{}^{\circ +}$ iar Ω_w este mulțimea variabilelor din $\mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$. Dacă $x \in \Omega_w$, atunci $P(x) \supset P(x) \in w$ și deci și $\Box(P(x) \supset P(x)) \in w$. Iar dacă wRw', atunci $P(x) \supset P(x) \in w'$ și astfel $x \in \Omega_{w'}$. Adică $\mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$ este un sublimbaj al $\mathcal{L}_P{}^{\circ}(w')$, respectiv $\Omega_w \subseteq \Omega_{w'}$. Deci, *dacă* wRw', *atunci* $\Omega_w \subseteq \Omega_{w'}$ *(clauza incluziunii)*. În fine, $[P(x_1,...,x_n)]_{w}^{i,\mu} = 1$ ddacă $\langle x_1^\mu,...,x_n^\mu \rangle_w \in P^i$ ddacă $P(x_1,...,x_n) \in w$. Iar funcția asignare μ este astfel că, pentru orice x, $x^\mu = x$.

Teorema 2. Pentru orice formulă $\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$ *și pentru orice* $w \in W$: $[\alpha]_w^{i,\mu} = 1$ *ddacă* $\alpha \in w$.

Demonstrația acestei teoreme este, în esență, demonstrația teoremei 3, din 5.5.1., cu următoarele specificări. Dat fiind faptul că lumile posibile sunt mulțimi maximal consistente de formule în *diferite* sublimbaje ale $\mathcal{L}_P{}^{\circ +}$, în 2 din Th. 3 (5.5.1.) trebuie adăugată mențiunea $\neg\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$, din care conchidem $\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$, mențiune necesară, deoarece ipoteza inducției se aplică numai formulelor acestui limbaj și pentru că o conchidere de genul: *din* $\alpha \notin w$ *rezultă că* $\neg\alpha \in w$ se poate face doar pe baza faptului că $\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$, deoarece w este maximal consistentă doar în $\mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$.

Din aceleași considerente în 3 din Th. 3 introducem asumpția $\alpha \supset \beta \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$, în 4a) v este o x-variantă arbitrară a lui μ *astfel că* $x^v \in \Omega_w$, în 4b) introducem asumpția $\forall x\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$ iar în 5b), $\Box\alpha \in \mathcal{L}_P{}^{\circ}(w)$.

Completitudinea sistemelor $Q^x S$ se obține pe baza *Can* (din 5.5.1.). Mai exact, obținem completitudinea acelor sisteme S în care cadrul modelului canonic pentru $Q^x S$ este un cadru pentru S (e.g. $\mathcal{K}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{K}4, S4$).

Remarcă. Așa cum am menționat în 5.2.2., în anumite sisteme modale, eg. $Q^x\mathcal{B}$ și $Q^x S5$ formula *Bar* este demonstrabilă. Așadar, pentru $Q^x\beta$ și pentru orice extensie a acestui sistem, demonstrarea completitudinii se face în modul indicat în 5.5.1.

5.5.4. Incompletitudinea sistemelor $Q^x S4.4$ și $Q^x S4.9$

Demonstrarea incompletitudinii unui sistem de logică modală cuantificată $Q^x S$ înseamnă indicarea unei formule valide în toate cadrele $\langle W, R \rangle$ pentru S dar care nu este teoremă a sistemului $Q^x S$. Sau, echivalent, indicarea unei formule nesatisfiabile pe orice cadru $\langle W, R \rangle$ pentru S dar care este o formulă consistentă a sistemului $Q^x S$.

Sistemul modal $S4.4$ este sistemul $S4 + \mathbf{R1}: p \supset (\Diamond\Box p \supset \Box p)$ iar $S4.9$ este $S4.4 + M18: (\Diamond\Box p \supset p) \vee (\Box\Diamond q \supset \Diamond\Box q)$.

Demonstrarea incompletitudinii celor două sisteme are următoarea structură. Fie $\alpha: \Box(\forall x \Diamond\Box P(x) \wedge \exists x \neg P(x))$. Trebuie arătat că:

1. Orice cadru $\langle W, R \rangle$ reflexiv și tranzitiv în care α este satisfiabilă satisface condiția: *Cond*: $\exists w_1 \forall w_2 (w_1 R w_2 \supset \exists w_3 (w_2 R w_3 \wedge \neg w_3 R w_2))$ (Cf. Exerc. 5).

2. Axioma **R1** a sistemului $S4.4$ este nesatisfiabilă într-un asemenea cadru (Cf. Exerc. 4).
3. Din 2 şi 1 deducem că dacă nici un cadru $\langle W,R\rangle$ pentru $S4.4$ nu satisface *Cond*, atunci α este nesatisfiabilă în orice asemenea cadru. Rezultă că $\neg\alpha$ este validă în orice cadru pentru $S4.4$ şi, implicit, în orice cadru pentru $S4.9$. Pentru a arăta că formula $Q^xS4.9$-validă $\neg\alpha$ nu este teoremă a sistemului $Q^xS4.9$ trebuie construit un model în care

   a) α este satisfiabilă (echivalent: $\neg\alpha$ nu poate fi teoremă a sistemului $Q^xS4.9$.

   b) Toate teoremele sistemului $S4.9$ sunt valide (mai exact, **R1** şi **M18** sunt adevărate în orice lume).

Fie *M* următorul model $\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$, unde

W este o mulţime numărabilă

R este o relaţie reflexivă şi tranzitivă

Ω este mulţimea numerelor naturale, $\Omega_{w_i}=\{0,1,2,...,i\}$

$Q^\iota=\emptyset$ pentru orice $Q\neq P$. $\langle e\rangle_{w_n}\in P^\iota$ ddacă $e<n$. Adică în fiecare lume posibilă *P* este adevărat strict despre primele *n* -1 elemente.

a) α este satisfiabilă în *M*; i.e. $[\alpha]^{\iota,\mu}_{w_0}=1$

Formula $\exists x\neg P(x)$ este adevărată în orice lume, deoarece în lumea w_n elementul *n* aparţine domeniului Ω_{w_n} însă $n\notin P^\iota$. Apoi, pentru orice $e\in\Omega_{w_n}$ are loc: pentru orice $m>n$, $\langle e\rangle_{w_m}\in P^\iota$ şi astfel $[\forall x\Diamond\Box P(x)]^{\iota,\mu}_{w_n}=1$. Ceea ce înseamnă că pentru orice asignare μ şi pentru orice $w\in W$ are loc: $[\forall x\Diamond\Box P(x)\wedge\exists x\neg P(x)]^{\iota,\mu}_{w}=1$. Cum pentru orice $w\in W$ are loc w_0Rw, avem $[\Box(\forall x\Diamond\Box P(x)\wedge\exists x\neg P(x)]^{\iota,\mu}_{w_0}=1$.

b) **R1** şi **M18** sunt valide în *M*.

Remarcăm mai întâi că dacă pentru orice variabilă liberă *x* din formula α în lumea *w*, $x^\mu\in\Omega_w$, atunci α păstrează această proprietate (*Prop*), în asignarea μ, în toate lumile w_i astfel că wRw_i. Iar în raport cu orice asignare considerată μ, orice formulă α are cel mult o posibilitate să-şi schimbe valoarea ei de adevăr: imediat după prima lume în care α are *Prop*. Dat fiind acest lucru, cele două axiome, **R1** şi **M18**, sunt formule valide în *M*. Fie $\beta\supset(\Diamond\Box\beta\supset\Box\beta)$ o exemplificare a **R1**. Presupunem că această formulă are *Prop* în lumea w_n în raport cu asignarea μ şi presupunem că $[\beta]^{\iota,\mu}_{w_n}=1$. Atunci există următoarea alternativă: ori β este în continuare adevărată în orice lume care succede lui w_n, ori β este falsă în orice lume care succede lui w_n. Însă dacă $\Diamond\Box\beta$ este adevărată în w_n, atunci β nu poate fi falsă în nici o lume w_m, $m>n$ şi deci α trebuie să fie adevărată în orice lume care succede lumii w_n. Ceea ce implică faptul că $[\Box\alpha]^{\iota,\mu}_{w_n}=1$. În ceea ce priveste **M18**, fie $(\Diamond\Box\beta\supset\beta)\vee(\Box\Diamond\gamma\supset\Diamond\Box\gamma)$ o exemplificare a axiomei **M18**. Dacă $[\Box\Diamond\gamma]^{\iota,\mu}_{w_n}=1$, atunci α rămâne adevărată în orice lume care succede lui w_n şi astfel $[\Diamond\Box\gamma]^{\iota,\mu}_{w_n}=1$.

Aşadar, orice teoremă a sistemelor $Q^xS4.4$ şi $Q^xS4.9$ este formulă validă în modelul considerat, *M*, iar $\neg\alpha$, de mai sus, deşi validă, nu este teoremă a acestor sisteme. Şi deci $Q^xS4.4$ şi $Q^xS4.9$ sunt sisteme incomplete.

Remarcă 1. Sistemele $Q^x S4.4$ şi $Q^x S4.9$ sunt exemple tipice de sisteme de logică modală a predicatelor, care sunt *incomplete* fără formula *Bar*.

Remarcă 2. Aşa cum am văzut mai sus, validitatea formulei *Bar* este condiţionată de existenţa aceloraşi lucruri în toate lumile posibile, idee filosofic problematică[16]. Ce se întâmplă cu conversa formulei *Bar*?

CBar $\Box \forall x P(x) \supset \forall x \Box P(x)$

Această implicaţie spune: "Dacă în orice lume w_i orice lucru din w_i este *P*, atunci orice lucru este *P* în orice lume posibilă". Putem, fireşte, admite antecedentul acestei implicaţii, nu însă şi consecventul, deoarece s-ar putea ca un lucru dintr-o lume oarecare (fie aceasta lumea noastră!) să nu fie *P* într-o altă lume, ba chiar nici să nu existe în acea lume. Aceasta ne arată că validitatea formulei *CBar* este condiţionată de *clauza incluziunii* (menţionată în 5.5.3.).

Remarcă 3. Abandonarea clauzei incluziunii atrage după sine modificarea aparatului conceptual utilizat în construcţia unei logici modale. Putem, fireşte, considera că toate formulele modale sunt definite, respectiv că acestea au o valoare de adevăr în orice lume, chiar şi atunci când variabilelor lor libere le sunt asignate obiecte care nu există în acea lume. În consecinţă, conceptul validităţii trebuie redefinit: o formulă α a $\mathcal{L}_P{}^{\circ}$ este validă dacă este adevărată în orice lume şi în orice asignare (chiar dacă valoarea asignată vreunei variabile libere nu există în acea lume). Numai că, în acest caz, validitatea unei formule fundamentale ale logicii nu se mai conservă. Fie, de exemplu, următoarea exemplificare a *Univ* 1^x: $\forall x P(x) \supset P(y)$. Dacă orice lucru din orice lume are proprietatea *P* iar un element $e \notin \Omega_w$ n-are această proprietate, atunci pentru $y^\mu = e$ vom avea $[\forall x P(x) \supset P(y)]_w^{I,\mu} = 0$. Nevaliditatea axiomei *Univ* 1^x, într-un asemenea caz, are ca sursă faptul că domeniul cuantificatorilor este strict registrul lucrurilor care există. Restabilirea validităţii axiomei *Univ* 1^x se poate face prin introducerea unei restricţii pe asignări, respectiv prin introducerea explicită a unui *predicat al existenţei*, *Ex*, definit astfel: $[Ex]$ $\langle e \rangle_w \in Ex^I$ ddacă $e \in \Omega_w$.

Cu un asemenea predicat, *Univ* 1^x devine

Univ 1^x *Ex* $(\forall x \alpha \wedge Ex(y)) \supset \alpha(x/y)$[17]

Restul aparatului semantic este cel din 5.5.3.

---

[16] A. Prior oferă o interpretare temporală a operatorului „necesar": $\Box P$ înseamnă "este şi va fi întotdeauna faptul că P". În această interpretare *Bar* devine: "Dacă orice lucru va fi întotdeauna P, atunci întotdeauna acel lucru va fi P". Neplauzabilitatea ei rezultă din faptul că deşi putem admite că orice lucru *care există acum* va fi întotdeauna P, de aici nu rezultă că *întotdeauna* va fi cazul că orice există este P (Cf. *Time and Modality*, Oxford UP, 1957, 26-28).

[17] Această expresie este corespondentul axiomei *Univ* 1^x în "free logic".

Exerciții

1. Fie $Q^x\mathcal{K}$. Fie următorul model: $W=\{w_1,w_2\}, w_1Rw_2$, $\Omega=\{e_1,e_2\}$, $\Omega_{w_1}=\{e_1\}$, $\Omega_{w_2}=\{e_1,e_2\}$, $P^I=\{\langle e_1\rangle_{w_1},\langle e_1\rangle_{w_2}\}$. Determinați valoarea logică a formulei *Bar* în acest model. Este *Bar* o teoremă a sistemului $Q^x\mathcal{K}$?

2. Este conversa formulei Barcan (*CBar*) falsificabilă în modelul de mai jos?

CBar: $\Box\forall xP(x)\supset\forall x\Box P(x)$.

$W=\{w_1,w_2\},\ w_iRw_i\ (i=1,2), \Omega=\{e_1,e_2\}, \Omega_{w_1}=\{e_1,e_2\}, \Omega_{w_2}=\{e_1\}$.

$P^I=\{\langle e_1\rangle_{w_1},\langle e_2\rangle_{w_1},\langle e_1\rangle_{w_2}\}$.

Soluție (similar Exerc. 1).

3. Sistemul modal $\mathcal{S}4.4$ este sistemul $\mathcal{S}4+$**R1**: $p\supset(\Diamond\Box p\supset\Box p)$. Acest sistem este caracterizat de clasa tuturor cadrelor reflexive și tranzitive care satisfac condiția:

$(*)\qquad (w_1Rw_2\wedge w_1\neq w_2\wedge w_1Rw_3)\supset w_3Rw_2$

Arătați că modelul canonic $Q^x\mathcal{S}4.4Bar$ satisface această condiție.

4. Să se arate că **R1** poate fi falsificată pe un cadru $\langle W,R\rangle$ reflexiv și tranzitiv și care satisface condiția: $\exists w_1\forall w_2(w_1Rw_2\supset\exists w_3(w_2Rw_3\wedge\neg w_3Rw_2))$.

5. Fie α următoarea formulă a $\mathcal{L}_P{}^{\Box}$: $\Box(\forall x\Diamond\Box P(x)\wedge\exists x\neg P(x))$. Să se demonstreze că dacă α este satisfiabilă pe un cadru $\langle W,R\rangle$ reflexiv și tranzitiv, atunci $\langle W,R\rangle$ satisface condiția din exercițiul 4.

6. Fie $Q^x\mathcal{S}Ex$ următorul sistem modal în care $\mathcal{S}$ este orice sistem normal de logică modală propozițională[18]:

Axiome:	*Ax* 1^x (din sistemele $Q^x\mathcal{S}$)	
	Univ 1^x *Ex*	$(\forall x\alpha\wedge Ex(y))\supset\alpha(x/y)$; cu x și y variabile arbitrare.
	Distr	$\forall x(\alpha\supset\beta)\supset(\forall x\alpha\supset\forall x\beta)$; cu α,β,x arbitrare.
	Eq	$\alpha\equiv\forall x\alpha$; x nu este liberă în α
	UnivEx	$\forall xEx(x)$

Reguli de deducție: MP, N, Gen, GenMod

GenMod $\dfrac{\alpha_1\supset\Box(\alpha_2\supset\ldots\supset\Box(\alpha_n\supset\Box\beta)\ldots)}{\alpha_1\supset\Box(\alpha_2\supset\ldots\supset\Box(\alpha_n\supset\Box\forall x\beta)\ldots)}$; x nu este liberă în $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

a) Demonstrați, în $Q^x\mathcal{S}Ex$, următoarele teoreme:

Th1. $\forall y(\forall x\alpha\wedge Ex(y))\supset\alpha(x/y)$, unde x și y sunt variabile arbitrare

Th2. $\forall x\alpha\equiv\forall y\beta$, unde α și β sunt similare (sau variante alfabetice: $\beta=\alpha(x/y)$ iar $\alpha=\beta(y/x)$ cu x nu este liberă în β iar y nu este liberă în α)

Th3. $\exists y(\alpha(x/y)\supset\forall x\alpha)$

b) Demonstrați corectitudinea acestui sistem (în raport cu conceptual validității menționat în *Remarcă 3*, 5.5.4).

7. Fie $Q^x\mathcal{S}BarId$ sistemul modal axiomatic specificat în 5.4. *Remarcă 2.* Să se demonstreze că în acest sistem formula *NecId* este o teoremă.

NecId $\quad (x=y)\supset\Box(x=y)$

[18] Este sistemul din Hughes și Cresswell, *A New Introduction...*, 293.

8. Fie $Q^{*}\mathcal{B}BarId$, unde $\mathcal{B}$ este sistemul modal propozițional brouwerian. Să se demonstreze că în acest sistem *NecNonId* este o teoremă.

NecNonId $\quad (x \neq y) \supset \Box (x \neq y)$

9. Să se demonstreze că formula $\Box \exists x \alpha \supset \exists x \Box \alpha$ este o formulă validă într-o semantică de genul celei specificate în 5.4. *Remarcă 3*.

Soluțiile exercițiilor

Capitolul 4. Logica modală propozițională ($\mathcal{L}_p^{\Box}$)

4.1. Sintaxa $\mathcal{L}_p^{\Box}$

4.1.2. Sisteme de logică modală propozițională

Sistemul modal $\mathcal{K}$

1. Se utilizează următoarele formule valide ale $\mathcal{L}_p$: $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$, $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$, din care, prin **MP**, se obțin $p \supset q$ și $q \supset p$, din care, prin **Subst**, se obțin $\alpha \supset \beta$ și $\beta \supset \alpha$, din care, prin $\mathbf{R_3}$ se obțin $\Box\alpha \supset \Box\beta$ și $\Box\beta \supset \Box\alpha$. Pe baza $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$ plus substituțiile adecvate obținem rezulztatul. Același rezultat se obține dacă în locul $\mathbf{R_3}$ utilizăm **N** și **K**.

2. $\mathbf{K_4}$. Din $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{K_3}$ $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$, Subst, **MP**.

$\mathbf{K_5}$. Din $p \supset (p \vee q)$, $q \supset (p \vee q)$, $\mathbf{R_3}$, $(p \supset q) \supset [(r \supset q) \supset ((p \vee r) \supset q)]$, Subst: $p/\Box p$, $q/\Box(p \vee q)$, $r/\Box q$, **MP**.

$\mathbf{K_7}$. Din $(p \wedge q) \supset p$, $(p \wedge q) \supset q$, $\mathbf{R_5}$, $(p \supset q) \supset [(p \supset r) \supset (p \supset (q \wedge r))]$, Subst: $p/\Diamond(p \wedge q)$, $q/\Diamond p$, $r/\Diamond q$.

$\mathbf{K_{10}}$. Demonstrăm această teoremă într-o formă echiveridică (i.e. echivalentă): $(\Diamond p \wedge \Box q) \supset \Diamond(p \wedge q)$ eq $\neg\Diamond(p \wedge q) \supset \neg(\Diamond p \wedge \Box q)$ eq $\Box\neg(p \wedge q) \supset (\neg\Diamond p \vee \neg\Box q)$ eq $\Box\neg(p \wedge q) \supset (\Box\neg p \vee \neg\Box q)$ eq $(\Box\neg(p \wedge q) \wedge \Box q) \supset \Box\neg p$. Însă această implicație are loc, deoarece $\Box\neg(p \wedge q)$ eq $\Box(q \supset \neg p)$ eq $\Box q \supset \Box\neg p$ și deci formula devine $[(\Box q \supset \Box\neg p) \wedge \Box q] \supset \Box\neg p$ (prin $\mathbf{L_p}$).

$\mathbf{K_{11}}$. Presupunem argumentul stâng al echivalenței și, prin derivări corecte, obținem argumentul drept.

$\Box[(p \wedge q) \supset r] \equiv \Box[(\neg r \wedge q) \supset \neg p] \equiv \Box\Box[(\neg r \wedge q) \supset \neg p]$ (prin **N**) $\equiv \Box[\Box(\neg r \wedge q) \supset \Box\neg p]$ (prin $\mathbf{R_3}$) $\equiv \Box[(\Box\neg r \wedge \Box q) \supset \Box\neg p]$ (prin $\mathbf{K_4}$) $\equiv (\neg\Box\neg p \wedge \Box q) \supset \neg\Box\neg r$ (prin $\mathbf{L_p}$) $\equiv$

$\equiv [(\Diamond p \wedge \Box q) \supset \Diamond r]$ (**Intersch**).

$\mathbf{K_{12}}$ - similar.

4. 1. $(p \wedge q) \supset q$, $\mathbf{L_p}$

2. $(p \wedge \Diamond p) \supset \Diamond p$; 1 $q/\Diamond p$

3. $\Box[(p \wedge \Diamond p) \supset \Diamond p]$; 2 **N**

4. $\Box(\neg(p \wedge \Diamond p) \vee \Diamond p)$; 3 $\mathbf{L_p}$

5. $\Box[(\neg p \vee \neg\Diamond p) \vee \Diamond p]$; $\mathbf{L_p}$

6. $\Box(\neg p \vee \neg\Diamond p) \vee \Diamond\Diamond p$; 5 $\mathbf{K_8}$

7. $\Box\neg p \vee \Diamond\neg\Diamond p \vee \Diamond\Diamond p$; 6 $\mathbf{K_8}$

8. $\neg\Diamond p \vee \neg\Box\Diamond p \vee \Diamond\Diamond p$; 7 **Intersch**

9. $\neg(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p) \vee \Diamond\Diamond p$; 8 $\mathbf{L_p}$

10. $(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond p$; 9 $\mathbf{L_p}$

11. $\Box[(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond p]$; 10 **N**

12. $\Box[(\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond\Diamond p]$; 11, $\mathbf{K_{12}}$

13. $\Box[(\Diamond\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Box\Diamond p) \supset \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p]$; 12, $\mathbf{K_{11}}$

Sistemul modal $\mathcal{T}$

1. $\mathrm{T_1}$ plus $\mathbf{K_9}$ (**Subst**).

2. Trebuie să arătăm că axiomele şi regulile unui sistem sunt deductibile în celălalt. Aşadar: a) că $\Box p \supset p$ este deductibilă în $\mathcal{K} + p \supset \Diamond p$ şi b) că $p \supset \Diamond p$ este deductibilă în $\mathcal{T}$
a): $p \supset \Diamond p$ + **Subst** $(p/\neg p)$ + contrapoz + **Intersch**. b): $p \supset \Diamond p$ este $\mathrm{T_1}$.

3. Din $\Box p \supset p$ + $\mathbf{T_1}$ + $\mathbf{L_p}$

Sistemul modal $\mathcal{D}$

1. $\mathbf{K_9}$ + Subst (q/p) + $\mathbf{D_1}$
2. **N** + **D** + **Subst** + **MP**
3. În $q \supset (p \supset p)$ subst q/α + $\mathbf{R_5}$ + **MP**
4. Formula este echivalentă, prin $\mathbf{L_p}$, cu $\neg\Box p \vee \Diamond\neg q \vee \Diamond(p \vee q)$, adică $\Diamond\neg p \vee \Diamond\neg q \vee \Diamond(p \vee q)$, adică $\Diamond(\neg p \vee \neg q \vee p \vee q)$, adică $\Diamond(p \vee \neg p)$, adică $\Diamond(p \supset p)$. Iar $\Diamond(p \supset p)$ este tocmai $\mathbf{D_1}$.
5. Din $p \supset p$ +**N** + **D** + **MP**.

Sistemul modal $\mathcal{K}4$

K4$_2$ 1. $(\Diamond p \wedge \Box\Box\Diamond p) \supset \Diamond(p \wedge \Box\Diamond p)$; $\mathbf{K_{10}}$ + **Subst**

2. $\Diamond(p \wedge q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)$; $\mathbf{K_7}$

3. $\Diamond(p \wedge \Box\Diamond p) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond\Box\Diamond p)$; 2 + **Subst**

4. $(p \supset q) \supset [(q \supset (r \wedge s)) \supset (p \supset s)]$

5. $(\Diamond p \wedge \Box\Box\Diamond p) \supset \Diamond\Box\Diamond p$; 1, 3, 4, **Subst**, **MP**

6. $\Box(\Diamond p \wedge \Box\Box\Diamond p) \supset \Box\Diamond\Box\Diamond p$; 5 **N** + **K**

7. $\Box p \supset \Box\Box p$; **4**

8. $\Box\Box p \supset \Box\Box\Box p$; 7 + **Subst**

9. $\Box p \supset \Box\Box\Box p$; 7, 8 $\mathbf{L_p}$

10. $\Box\Diamond p \supset \Box\Box\Box\Diamond p$; 9 + **Subst**

11. $\Box\Diamond p \supset (\Box\Diamond p \wedge \Box\Box\Box\Diamond p)$; 10

12. $\Box\Diamond p \supset \Box(\Diamond p \wedge \Box\Box\Diamond p)$; 10, $\mathbf{K_4}$
13. $\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond\Box\Diamond p$; 12, 5, **N**, prin $\mathbf{L_p}$

$\mathbf{K4_3}$: Din $\mathbf{K4_1}$, $\mathbf{K4_2}$ prin $\mathbf{L_p}$.

$\mathbf{K4_4}$: Din $(p \supset q) \equiv [(p \wedge q) \equiv p]$ + **4** + Subst $p/\Box p$, $q/\Box\Box p$.

Sistemul modal S4

1. c) $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box\Diamond p$ 1. $p \supset \Diamond p$; $\mathbf{T_1}$, 2. $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box\Diamond p$; 1 **Subst**
d) $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box\Diamond p$ 1. $p \supset \Diamond p$; 2. $\Box p \supset \Box\Diamond p$; 1 $p/\Box p$; 3. $\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box\Diamond p$; 2 $\mathbf{R_5}$
$\Box p \supset \Box\Diamond p$ din a) şi b) prin $\mathbf{L_p}$ etc.
e) $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; 1. $\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; **T** + **Subst**; 2. $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond\Diamond p$; 1 $\mathbf{R_5}$; 3. $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; 2 $\mathbf{S4_3}$, **Inloc**
f) $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; 1. $\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; **T** + **Subst**; 2. $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond\Diamond p$; 1 $\mathbf{R_5}$; 3. $\Diamond\Box\Diamond p \supset \Diamond p$; 2 $\mathbf{S4_3}$, **Inloc**

2. $\Box\Diamond\Box\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$; 1. $\Box\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond\Box\Diamond p$; c $\mathbf{R_3}$, 2. $\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond\Box\Diamond p$; 1 $\mathbf{S4_1}$ **Inloc**, 3. $\Box\Diamond\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond p$; f $\mathbf{R_3}$; Din 2 şi 3, prin $\mathbf{L_p}$, se obține rezultatul.

3. Din $\mathbf{K4_1}$ Subst $p/\neg p$ + Contrapoz + **Intersch**.

5. Trebuie să demontrăm că sistemul *S4**, ale cărui axiome sunt $\mathbf{L_p}$, $\mathbf{K}^*$: $\Box(p \supset q) \supset \Box(\Box p \supset \Box q)$ şi **T**: $\Box p \supset p$, este deductiv echivalent cu *S4* .

Trebuie să demonstrăm : 1. a) **K** şi b) **4** sunt demonstrabile în *S4**
2. $\mathbf{K}^*$ este demonstrabilă în *S4*

1. a) **K** este demonstrabilă în *S4**
1. $\Box(p \supset q) \supset \Box(\Box p \supset \Box q)$; $\mathbf{K}^*$
2. $\Box p \supset p$; **T**
3. $\Box(\Box p \supset \Box q) \supset (\Box p \supset \Box q)$; 2 p/$\Box p \supset \Box q$
4. $\Box(p \supset q) \supset \Box(\Box p \supset \Box q)$; 1, 3 $\mathbf{L_p}$

b) **4** este demonstrabilă în *S4**
1. $p \supset ((p \supset p) \supset p)$
2. $\Box p \supset \Box((p \supset p) \supset p)$; 1 $\mathbf{R_3}$
3. $\Box((p \supset p) \supset p) \supset \Box(\Box(p \supset p) \supset \Box p)$; $\mathbf{K}^*$, $p/\,p \supset p$, $q\,\backslash p$
4. $\Box p \supset \Box(\Box(p \supset p) \supset \Box p)$; 2, 3 $\mathbf{L_p}$
5. $\Box(\Box(p \supset p) \supset \Box p) \supset (\Box\Box(p \supset p) \supset \Box\Box p)$; **K** $p/\,\Box(p \supset p)$, $q/\Box p$
6. $\{(p \supset q) \supset [q \supset (r \supset s)]\} \supset [r \supset (p \supset s)]$; $\mathbf{L_p}$
7. $\Box\Box(p \supset p) \supset (\Box p \supset \Box\Box p)$; din 4 şi 5, prin 6, cu subst: $p/\Box p$, $q/\Box(\Box(p \supset p) \supset \Box p)$, $r/\Box\Box(p \supset p)$, $s/\Box\Box p$ plus **MP**
8. $p \supset p$; $\mathbf{L_p}$

9. $\Box(p\supset p)$; 8 **N**
10. $\Box\Box(p\supset p)$; 9 **N**
11. $\Box p\supset \Box\Box p$, 10, 7 **MP**

2.$\Box(p\supset q)\supset \Box(\Box p\supset \Box q)$
1. $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset \Box q)$; **K**
2. $\Box(\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset \Box q))$; 1 **N**
3. $\Box(\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset \Box q))\supset(\Box\Box(p\supset q)\supset \Box(\Box p\supset \Box q))$; 1 $p/\Box(p\supset q)$, $q/\Box p\supset \Box q$
4. $\Box\Box(p\supset q)\supset \Box(\Box p\supset \Box q)$; 2, 3 **MP**
5. $\Box p\supset \Box\Box p$; 4
6. $\Box(p\supset q)\supset \Box\Box(p\supset q)$; 5 $p/(p\supset q)$
7. $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset \Box q)$; 6, 4 **MP**

6. 1. $\Diamond\Diamond p\supset \Diamond p$; $\mathbf{S4_2}$
2. $\Diamond\Diamond(p\supset q)\supset \Diamond(p\supset q)$; 1 $p/p\supset q$
3. $\Diamond(p\supset q)\equiv(\Box p\supset \Diamond q)$; $\mathbf{K_9}$
4. $\Diamond(\Box p\supset \Diamond q)\supset \Diamond(p\supset q)$; 2, 3 **Inloc**

Sistemul modal S5

1. Cum am văzut, $\Box p\equiv\Box\Box p$ este o teoremă a sistemului *S4*. Este aşadar suficient să demonstrăm că *S5* este o extensie a sistemului *S4*, respectiv că axioma **4**: $\Box p\supset \Box\Box p$ este demonstrabilă în *S5*. Demonstraţia este simplă:

1. $p\supset \Diamond p$; $\mathbf{T_1}$
2. $\Box p\supset \Diamond\Box p$; 1 $p/\Box p$
3. $\Diamond\Box p\equiv\Box\Diamond\Box p$; $\mathbf{S5_3}$ $p/\Box p$
4. $\Box p\supset \Box\Diamond\Box p$; 2, 3, $\mathbf{L_p}$
5. $\Box p\supset \Box\Box p$; 4, $\mathbf{S5_2}$

Faptul că **4** este demonstrabilă în *S5* iar **5** nu este demonstrabilă în *S4* arată că *S5* este o extensie *proprie* a lui *S4*.

4. Tot ceea ce trebuie să arătăm este deductibilitatea lor reciprocă. Mai exact, că în *S5* sunt demonstrabile axiomele **4**: $\Box p\supset \Box\Box p$ (fapt arătat mai sus, în exerciţiul 1) şi **B**, iar în *S5** este demonstrabilă axioma **5**: $\Diamond p\supset \Box\Diamond p$.

Demonstraţia lui **B** în *S5*: 1. $p\supset \Diamond p$; $\mathbf{T_1}$
2. $\Diamond p\supset \Box\Diamond p$; **5**
3. $p\supset \Box\Diamond p$.; 1, 2 $\mathbf{L_p}$

Demonstraţia lui **5** în *S5**: 1. $\Diamond\Diamond p\supset \Diamond p$; $\mathbf{S4_2}$
2. $\Box\Diamond\Diamond p\supset \Box\Diamond p$; 2 $\mathbf{R_3}$
3. $\Diamond p\supset \Box\Diamond\Diamond p$; din **B** + **Subst**
4. $\Diamond p\supset \Box\Diamond p$; 3, 2 $\mathbf{L_p}$

5. Trebuie să arătăm că a) în $\mathcal{S5}$ este demonstrabilă **D**, şi b) în $\mathcal{S5}^{**}$ este demonstrabilă T.

a) $\mathcal{S5}$ este $\mathcal{T}$ + **5** iar **D** este o teoremă a lui $\mathcal{T}$, obţinându-se din **T**, $\mathbf{T_1}$ prin $\mathbf{L_p}$.

Sistemele modale $\mathcal{Triv}$ *şi* $\mathcal{Ver}$

Trebuie să arătăm că sistemul $\mathcal{K}$ + $\mathcal{Triv}$ + $\mathcal{Ver}$ este inconsistent, fapt elementar, căci dacă $\Box p$ şi $p \equiv \Box p$, atunci p este teoremă şi deci orice formulă este teoremă (prin **Subst**).

Sistemul modal $\mathcal{B}$

1. $p \supset \Box\Diamond p$; **B**
2. $\neg p \supset \Box\Diamond\neg p$; 1 $p/\neg p$
3. $\neg p \supset \neg\Diamond\Box p$
4. $(p \supset q) \supset [(\neg p \supset \neg r) \supset (r \supset q)]$
5. $\Diamond\Box p \supset \Box\Diamond p$; 1 şi 3 prin 4, cu subst $q/\Box\Diamond p$, $r/\Diamond\Box p$

Sistemul modal $\mathcal{GL}$

1. α rezultă din $\mathbf{GL_2}$, prin contrapoz + $\mathbf{L_p}$; β rezultă din α prin subst $p/\neg p$ + **Intersch**; γ rezultă din $\mathbf{GL_1}$.

2. Din $\mathbf{GL_3}$, **Subst** + $\mathbf{L_p}$.

3. Din $\mathbf{GL_3}$, Subst $p/\top$ + Contrapoz: $\neg\Box\bot \equiv \Box\Diamond\top$; însă $\Box\Diamond\top \equiv \Box\neg\Box\neg\top \equiv \Box\neg\Box\bot$ şi deci $\neg\Box\bot \equiv \neg\Box\neg\Box\bot$ (**Inloc**).

4.2. Semantica logicii modale propoziţionale

4.2.1. S-validitatea formulelor $\mathcal{L}_p^{\Box}$

1. Cum orice teoremă a lui $\mathcal{T}$ este validă pe un cadru reflexiv, verificarea nevalidităţii acestei formule presupune construirea unui cadru reflexiv în care formula nu-i validă. Mai exact, un model bazat pe un asemenea cadru, astfel încât pentru o $w \in W$ $V(p \supset \Box p, w) = 0$. Fie $W = \{w_1, w_2\}$ astfel încât wRw_1, wRw, w_1Rw_1 şi $V(p, w_1) = 1$ iar $V(p, w_2) = 0$. Într-un astfel de model $V(p \supset \Box p, w) = 0$.

2. Trebuie construit deci un cadru reflexiv $\langle W, R\rangle$ în care **4** nu este validă. Respectiv, un model $\langle W, R, V\rangle$, bazat pe $\langle W, R\rangle$ în care **4** este falsă. Fie $W = \{w, w_1, w_2\}$, astfel că wRw, w_1Rw_1, w_2Rw_2, wRw_1, w_1Rw_2 şi *non* wRw_2. Fie $V(p, w) = 1$, $V(p, w_1) = 1$ şi $V(p, w_2) = 0$. De aici deducem a) $V(\Box p, w) = 1$, pentru că wRw şi wRw_1, iar în w şi w_1 p este adevărată, şi b) $V(\Box p, w_1) = 0$, pentru că w_1Rw_2, iar în w_2 p este falsă. Şi deci $V(\Box\Box p, w) = 0$. Şi deci, din a) şi b) rezultă $V(\Box p \supset \Box\Box p, w) = 0$, pentru că wRw_1.

3. Trebuie construit un model $\langle W,R,V\rangle$ bazat pe *S4*-cadru $\langle W,R\rangle$ (i.e. reflexiv şi tranzitiv) astfel încât pentru o lume $w\in W$: $V(\Diamond p\supset\Box\Diamond p,w)=0$. Presupunem $W=\{w,w_1\}$, wRw, w_1Rw_1, wRw_1 şi *non* w_1Rw_1, $V(p,w)=1$ şi $V(p,w_1)=0$. Avem $V(\Diamond p,w)=1$, pentru că în w p este adevărată, iar wRw are loc. $V(\Diamond p,w_1)=0$, deoarece în w_1 p este falsă şi *non* w_1Rw. $V(\Box\Diamond p,w)=0$, deoarece wRw_1. De aici falsitatea formulei în modelul considerat şi deci nevaliditatea ei într-un cadru *S4*.

4. Observăm mai întâi că dacă R este convers bine-fondată, atunci R este ireflexivă, căci dacă wRw, atunci există o mulţime nevidă (e.g. $\{w\}$) fără cel mai mare R-element. Mai trebuie să demonstrăm conversa: dacă R este ireflexivă (i.e. $\langle W,R\rangle$ este ireflexiv), atunci R este convers bine-fondată. Presupunem că R este ireflexivă şi nu este convers bine-fondată. Observăm mai întâi că dacă $w_1,\ldots,w_n$ este un şir de elemente din W astfel că w_iRw_{i+1} (pentru orice $i<n$), atunci $w_i\neq w_j$ dacă $i<j$ (căci, în caz contrar $w_i=w_j$ iar prin tranzitivitate w_iRw_j, ceea ce contrazice ireflexivitatea).
Din asumpţia faptului că R nu este convers bine-fondată, rezultă că există o submulţime nevidă $\Gamma\subseteq W$ astfel că pentru orice $w\in\Gamma$ există $w_i\in\Gamma$ şi wRw_i. Atunci, pentru orice n>0, există un şir $w_1,\ldots,w_n$ de elemente din Γ astfel că w_iRw_{i+1} pentru orice $i<n$. Şi deci pentru *orice* n>0 mulţimea $\Gamma\subseteq W$ are n elemente. W este aşadar infinită, ceea ce contrazice asumpţia făcută.

4.2.2. Verificarea validităţii formulelor în sistemul modal *S5*

$$\alpha_2:\Box(p\equiv\neg\Box p)\supset\Box(p\equiv\neg\Box(p\wedge\neg p))$$
$$\Box[(p\supset\neg\Box p)\wedge(\neg\Box p\supset p)]\supset\Box[p\supset\neg\Box(p\wedge\neg p)\wedge\neg\Box(p\wedge\neg p)\supset p]$$
$$\neg\Box(p\supset\Diamond\neg p)\wedge(\Diamond\neg p\supset p)\vee\Box[\neg p\vee\neg\Box(p\wedge\neg p)\wedge(\Box(p\wedge\neg p)\vee p)\}$$
$$[\Diamond\neg(\neg p\vee\Diamond\neg p)\wedge(\neg\Diamond\neg p\vee p)\}\vee\Box[(\neg p\vee\Diamond\neg(p\wedge\neg p))\wedge(\Box(p\wedge\neg p)\vee p)]$$
$$[\Diamond(p\wedge\neg\Diamond\neg p)\wedge(\Box p\vee p)]\vee[\Box(\neg p\vee\Diamond\neg(p\wedge\neg p)\wedge\Box(\Box(p\wedge\neg p)\vee p)]$$
$$[\Diamond(p\wedge\Box p)\wedge(\Box p\vee p)\}\vee[\Box\neg p\vee\Diamond\neg(p\wedge\neg p)]\wedge(\Box\Box(p\wedge\neg p)\vee\Box p)$$
$$[(\Diamond p\wedge\Box p)\wedge(\Box p\vee p)\}\vee[\Box\neg p\vee\Diamond\neg(p\wedge\neg p))\wedge(\Box(p\wedge\neg p)\vee\Box p)]$$
$$(\Diamond p\vee\Box\neg p\vee\Diamond p\vee\neg p))\wedge(\Diamond p\vee\Box(p\wedge\neg p)\vee\Box p)(\Box p\vee\Box\neg p\vee\Diamond\neg(p\wedge\neg p))\wedge$$
$$\wedge(\Box p\vee\Box(p\wedge\neg p)\vee\Box p)\wedge(\Box p\vee p\vee\Box\neg p\vee\Diamond\neg(p\vee\neg p))\wedge(\Box p\vee p\vee\Box(p\wedge\neg p)\vee\Box p)$$

4.2.3. Cadrele sistemelor modale

1. Această aserţiune împreună cu conversa ei formează *Teorema 1*. Conversa rezultă imediat din Teorema corectitudinii. Aşadar, presupusă fiind Th. corectitudinii, demonstrarea aserţiunii completează demonstrarea *Teoremei 1*.
Presupunem că $\langle W,R\rangle$ nu este reflexiv. Există aşadar o lume $w\in W$, astfel că *non* wRw. Fie $\langle W,R,V\rangle$ un model bazat pe $\langle W,R\rangle$, astfel că $V(p,w)=0$ şi $V(p,w_i)=1$ pentru orice $w_i\in W$, astfel că $w_i\neq w$. Din *non* wRw deducem că $V(\Box p,w)=1$, deoarece p este adevărată în orice $w_i\in W$ astfel că wRw_i (iar wRw nu are loc). Însă $V(p,w)=0$ (prin asumpţie) şi deci $V(\Box p\supset p,w)=0$. Şi deci $\Box p\supset p$ nu este validă în $\langle W,R\rangle$.

2. Presupunem că $\langle W,R\rangle$ este serial şi $\Box p \supset \Diamond p$ nu este validă în $\langle W,R\rangle$. Există aşadar un model $\langle W,R,V\rangle$ bazat pe $\langle W,R\rangle$ şi o lume $w \in W$ astfel că $V(\Box p \supset \Diamond p,w)=0$. Adică 1. $V(\Box p,w)=1$ şi 2. $V(\Diamond p,w)=0$. Însă wRw_i are loc pentru $w_i \in W$ (R fiind serială prin presupoziție). De unde, din 1, deducem $V(p,w_i)=1$. Iar din 2. $V(p,w_i)=0$. Contradicție.

3. Presupunem că $\langle W,R\rangle$ este netranzitiv. Adică există $w,w_1,w_2 \in W$, astfel că wRw_1, w_1Rw_2 şi *non* wRw_2. Fie $\langle W,R,V\rangle$ un model bazat pe $\langle W,R\rangle$, astfel că $V(p,w_2)=0$ şi $V(p,w_i)=1$ pentru orice $w_i \in W$ astfel că $w_i \neq w_2$. Atunci $V(\Box p,w)=1$. Însă cum w_1Rw şi $V(p,w_2)=0$ avem $V(\Box p,w_1)=0$ şi deci $V(\Box\Box p,w)=0$. Rezultă că $V(\Box p \supset \Box\Box p,w)=0$ şi deci formula este nevalidă în $\langle W,R\rangle$.

4. Presupunem că $p \supset \Box\Diamond p$ este validă în $\langle W,R\rangle$. Fie wRw_1 şi $V(p,w_i)=1$ ddacă $w_i = w$. Avem aşadar $V(p,w)=1$. Din asumpția validității implicației deducem $V(\Box\Diamond p,w)=1$. Şi, cum are loc wRw_1, deducem $V(\Diamond p,w_1)=1$. Există aşadar o lume w_i astfel că w_1Rw_i şi $V(p,w_i)=1$. Cum $V(p,w_i)=1$ ddacă $w_i=w$ rezultă că w_1Rw are loc şi deci R este simetrică.

5. Presupunem că $\langle W,R\rangle$ nu este simetric. Există aşadar două lumi $w^*,w^{**} \in W$ astfel că w^*Rw^{**} însă *non* $w^{**}Rw^*$. Fie $\langle W,R,V\rangle$ un model bazat pe $\langle W,R\rangle$ în care $V(p,w^*)=0$ şi $V(p,w_i)=1$ pentru orice $w_i \in W$ astfel că $w_i \neq w^*$. Atunci 1. $V(\neg p,w^*)=1$ (prin *Cond* [$\neg\alpha$]). Din *non* $w^{**}Rw^*$ deducem $V(\Box p,w^{**})=1$ (pentru că p este adevărată în orice lume, alta decât w^* iar relația $w^{**}Rw^*$ nu are loc). Şi deci $V(\neg\Box p,w^{**})=0$. Din w^*Rw^{**} deducem 2. $V(\Box\neg\Box p,w^*)=0$. Iar din 1 şi 2 deducem $V(\neg p \supset \Box\neg\Box p,w^*)=0$.

4.3. Modele canonice

1. 1. R este reflexivă ddacă R este 0,0,1,0-conv.

Prin *Conv*, R este 0,0,1,0-conv ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(wR^0w_1 \wedge wR^0w_2) \supset \exists w_3(w_1R^1w_3 \wedge w_2R^0w_3)]$ ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(w=w_1 \wedge w=w_2) \supset \exists w_3(w_1Rw_3 \wedge w_2=w_3)]$ ddacă $\forall w \; wRw$ ddacă R este reflexivă.

2. R este simetrică ddacă R este 0,1,0,1-conv.

Prin *Conv*, R este 0,1,0,1-conv ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(wR^0w_1 \wedge wR^1w_2) \supset \exists w_3(w_1R^0w_3 \wedge w_2R^1w_3)]$ ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(w=w_1 \wedge wRw_2) \supset \exists w_3(w_1=w_3 \wedge w_2Rw_3)]$ ddacă $\forall w_1 \forall w_2 (w_1Rw_2 \supset w_2Rw_1)$ ddacă R este simetrică.

3. R este tranzitivă ddacă R este 0,2,1,0-conv.

Prin *Conv*, R este 0,2,1,0-conv ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 [(wR^0w_1 \wedge wR^2w_2) \supset \exists w_3(w_1R^1w_3 \wedge w_2R^0w_3)]$ ddacă $\forall w \forall w_1 \forall w_2 \{ [w=w_1 \wedge \exists v(wRv \wedge vRw_2)] \supset \exists w_3(w_1Rw_3 \wedge w_2=w_3) \}$ ddacă $\forall w_1 \forall w_2 [\exists v(w_1Rv \wedge vRw_2) \supset w_1Rw_2]$ ddacă $\forall w_1 \forall v \forall w_2 [(w_1Rv \wedge vRw_2) \supset w_1Rw_2]$ ddacă R este tranzitivă.

2. Γ este S-inc. Căci din cele două implicații demonstrabile în S, prin $\mathbf{L_p}$: $(p \supset q) \supset [(\neg p \supset r) \supset \neg(q \wedge r)]$ prin substit p/α, $q/\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, $r/\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m$ prin **MP**, obținem rezultatul.

4. Tot ceea ce trebuie demonstrat este faptul că R este conexă. Plecăm așadar de la ceea ce înseamnă că un cadru $\langle W, R\rangle$ este conex:
$\langle W, R\rangle_{con} =_{df} \forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 [(w_1Rw_2 \wedge w_1Rw_3) \supset (w_2Rw_3 \vee w_3Rw_2)]$. Presupunem prin *reductio ad absurdum* că pentru orice w_1, w_2, w_3 are loc conjuncția din antecedentul implicației și n-are loc disjuncția din consecvent. Cum *non* w_2Rw_3, rezultă că există o formulă α astfel că:
1. $\Box\,\alpha \in w_2$ și $\alpha \notin w_3$. Cum *non* w_3Rw_2 rezultă că există o formulă β astfel că 2. $\Box\beta \in w_3$ și $\beta \notin w_2$. Din 1. și 2. obținem 3. $\Box\alpha \supset \beta \notin w_2$ și 4. $\Box\beta \supset \alpha \notin w_3$. Însă w_1Rw_2 și w_1Rw_3 au loc (prin ipoteză) și deci, din 3. și 4. obținem 5. $\Box(\Box\alpha \supset \beta) \notin w_1$ și 6. $\Box(\Box\beta \supset \alpha) \notin w_1$. Așadar, nici disjuncția lor, $\Box(\Box\alpha \supset \beta) \vee \Box(\Box\beta \supset \alpha)$ nu aparține lui w_1, ceea ce este imposibil, pentru că această din urmă formulă se obține din axioma $\mathbf{D_1}$ prin substituție, este deci o teoremă a lui *S4.3* și deci aparține oricărei mulțimi max *S4.3*-con (prin *Lema 2.(4)*), echivalent, aparține oricărei lumi din modelul canonic al sistemului modal *S4.3*.

Capitolul 5. Logica modală a predicatelor ($\mathcal{L}_P\Box$)

1. *Bar*: $\forall x \Box P(x) \supset \Box \forall x P(x)$. Fie μ o asignare arbitrară astfel că x^μ este o valoare din Ω_{w_1}, adică e_1. Cum Ω_{w_1} are un singur element, μ are o singură x-variantă: μ însăși. Însă, prin asumpție $[P(x)]_{w_1}^{\iota,\mu} = 1$ și $[P(x)]_{w_2}^{\iota,\mu} = 1$. Din faptul că w_1Rw_2 rezultă că $[\Box P(x)]_{w_1}^{\iota,\mu} = 1$ și astfel $[\forall x \Box P(x)]_{w_1}^{\iota,\mu} = 1$. Fie acum ν o x-variantă a lui μ astfel că $x^\nu = e_2$. Însă $e_2 \in \Omega_{w_2}$. Vom avea astfel $[\forall x P(x)]_{w_2}^{\iota,\mu} = 0$. Și deci, din faptul că w_1Rw_2 are loc, obținem $[\Box \forall x\, P(x)]_{w_1}^{\iota,\mu} = 0$. Și astfel *Bar* este falsificabilă în acest model.

3. *(Reductio)*. Presupunem $w_1 \neq w_2$. Atunci există o formulă $\alpha \in w_1$ și $\alpha \notin w_2$. Și deci $\neg\alpha \in w_2$. Presupunem *non* w_3Rw_2. Există deci o formulă $\Box\beta \in w_3$ astfel că $\beta \notin w_2$. Și deci $\neg\beta \in w_2$. Fiindcă $\Box\beta \in w_3$, $\Box(\alpha \vee \beta) \in w_3$ și astfel $\Diamond\Box(\alpha \vee \beta) \in w_1$. Fiindcă $\alpha \in w_1$, $\alpha \vee \beta \in w_1$. Și deci prin **R1** și MP obținem $\Box(\alpha \vee \beta) \in w_1$. Însă w_1Rw_2 are loc. Și astfel $\alpha \vee \beta \in w_2$, ceea ce contrazice rezultatul de mai sus, după care $\neg\alpha$ și $\neg\beta$ sunt formule din w_2.

4. Presupunem w_1, w_2, w_3 astfel că w_iRw_j ddacă $i \leq j$. $V(p, w_1) = 1$, $V(p, w_2) = 0$, $V(p, w_3) = 1$. Atunci V (**R1**, w_1) $= 0$.

5. *Demonstrație*. Presupunem că există o lume $w_1 \in W$ din $\langle W, R\rangle$ astfel încât $[\alpha]_{w_1}^{\iota,\mu} = 1$ și w_1Rw_2 are loc. Atunci a) $[\forall x \Diamond\Box P(x) \wedge \exists x \neg P(x)]_{w_2}^{\iota,\mu} = 1$. Și deci b)

$[\forall x \Diamond \Box P(x)]_{w_2}^{\iota,\mu} = 1$ și c) $[\exists x \neg P(x)]_{w_2}^{\iota,\mu} = 1$. Din c) deducem că există o x-variantă ν a lui μ astfel că d) $[\neg P(x)]_{w_2}^{\iota,\nu} = 1$, iar din b) deducem e) $[\Diamond \Box P(x)]_{w_2}^{\iota,\nu} = 1$, pentru orice ν x-variantă a lui μ. Din e) deducem că există o lume w_3 astfel că $w_2 R w_3$ și f) $[\Box P(x)]_{w_3}^{\iota,\nu} = 1$. Iar dacă presupunem că are loc $w_3 R w_2$ atunci din f) deducem g) $[P(x)]_{w_2}^{\iota,\nu} = 1$, rezultat care-l contrazice pe cel din d).

6. a) *Th1*

1. $\forall y(\forall x\alpha \wedge Ex(y)) \supset \alpha(x/y)$; *Univ* 1^x *Ex*, Gen
2. $[(\forall x\alpha \wedge Ex(y)) \supset \alpha(x/y)] \equiv [Ex(y) \supset (\forall x\alpha \supset \alpha(x/y))]$

(din $[(p \wedge q) \supset r] \equiv [q \supset (p \supset r)]$ + Subst).

3. $\forall y(Ex(y) \supset (\forall x\alpha \supset \alpha(x/y)))$; 1, 2 Th. Inloc.
4. $\forall y Ex(y) \supset \forall y(\forall x\alpha \supset \alpha(x/y))$; 3, Distr
5. $\forall y Ex(y)$; *UnivEx*
6. $\forall y(\forall x\alpha \supset \alpha(x/y))$; 4, 5 MP

Th2

1. $\forall y(\forall x\alpha \supset \alpha(x/y))$; Th1, echival. $\forall y(\forall x\alpha \supset \beta)$
2. $\forall y(\forall x\alpha \supset \beta) \supset (\forall y \forall x\alpha \supset \forall y\beta)$, Distr.
3. $\forall y \forall x\alpha \supset \forall y\beta$; 1, 2 MP
4. $\forall x\alpha \supset \forall y\beta$; 3, Eq

(Demonstrația conversei se face la fel).

Th3

1. $(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \alpha(x/y)$; $\mathcal{L}_p$: $(p \wedge q) \supset p$ + Subst.
2. $\forall y(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \forall y\alpha(x/y)$; 1, Gen, Distr
3. $\forall y(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \forall x\alpha$; 2 Th2.
4. $(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \neg\forall x\alpha$; 1, $\mathcal{L}_p$: $(p \wedge q) \supset q$ + Subst.
5. $\forall y(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \forall y \neg\forall x\alpha$; 4, Gen, Distr
6. $\forall y(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha) \supset \neg\forall x\alpha$; 5, Eq
7. $\neg\forall y(\alpha(x/y) \wedge \neg\forall x\alpha)$; 3, 6, $\mathcal{L}_p$
8. $\neg\forall y \neg(\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha)$; 7, $\mathcal{L}_p$
9. $\exists y\alpha(x/y) \supset \forall x\alpha$; 8, Def $\exists$

a) Sistemul $Q^x SEx$ este corect

Ax 1^x este axiomă a sistemelor $Q^x S$.

Univ 1^x *Ex* $(\forall x\alpha \wedge Ex(y)) \supset \alpha(x/y)$ (*Reductio*). Presupunem că *Univ* 1^x *Ex* este nevalidă. Există deci un model M, o lume $w \in W$ și o asignare μ în M astfel că $[\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 1$, $[Ex(y)]_w^{\iota,\mu} = 1$ și $[\alpha(x/y)]_w^{\iota,\mu} = 0$. Fie acum o x-variantă ν a asignării μ astfel că $x^\nu = y^\mu$. Avem deci $[\alpha]_w^{\iota,\nu} = 0$ (prin Lemă, 3.1.2). Apoi, întrucât $[Ex(y)]_w^{\iota,\mu} = 1$, rezultă că $x^\nu \in \Omega_w$. Și astfel, prin $[\forall^*]$ (5.5.3.), avem $[\forall x\alpha]_w^{\iota,\mu} = 0$, ceea ce contrazice supoziția de mai sus.

Distr (exercițiu). *Eq* și *UnivEx*, rezultatele sunt imediate (sub asumpția nevidității domeniului Ω_w pentru *Eq*). Regulile *MP, N, Gen* sunt cele deja utilizate în capitolele anterioare.

Regula *GenMod*. Fără a altera ideea conținută în generalitatea formulării acestei reguli, luăm cazul $n = 2$. Regula devine

$$\frac{\alpha_1 \supset \Box(\alpha_2 \supset \Box\beta)}{\alpha_1 \supset \Box(\alpha_2 \supset \Box\forall x\,\beta)}$$

cu restricția: x nu este liberă în α_1, α_2.

Contrapoziție. Presupunem că $[\alpha_1 \supset \Box(\alpha_2 \supset \Box\forall x\,\beta)]_{w_1}^{\iota,\mu}=0$. Fie $w_1, w_2, w_3 \in W$ astfel că $w_1Rw_2Rw_3$. Fie $[\alpha_1]_{w_1}^{\iota,\mu}=1$, $[\alpha_2]_{w_2}^{\iota,\mu}=1$ și $[\forall x\beta]_{w_3}^{\iota,\mu}=0$. Deducem astfel că există o x-variantă ν a asignării μ astfel încât $x^{\nu} \in \Omega_{w_3}$ și $[\beta]_{w_3}^{\iota,\nu}=0$. Însă prin restricția regulii, x nu este liberă în α_1 și α_2. Și deci $[\alpha_i]_{w_i}^{\iota,\nu}=[\alpha_i]_{w_i}^{\iota,\mu}=1$ $(i=1,2)$. Și astfel $[\alpha_1 \supset \Box(\alpha_2 \supset \Box\beta)]_{w_1}^{\iota,\nu}=0$.

7.
1. $(x=y)\supset(\Box(x=x)\supset\Box(x=y))$; Id2
2. $[p\supset(q\supset r)]\equiv[q\supset(p\supset r)]$; $\mathcal{L}_p$
3. $\Box(x=x)\supset((x=y)\supset\Box(x=y))$; prin 2, Inloc
4. $x=x$; Id1
5. $\Box(x=x)$; 4, N
6. $(x=y)\supset\Box(x=y)$; 3, 5, MP

8.
1. $(x=y)\supset\Box(x=y)$; NecId
2. $\neg\Box(x=y)\supset\neg(x=y)$; 1, Contrapoz
3. $\Diamond\neg(x=y)\supset\neg(x=y)$; 2, Intersch
4. $\neg(x=y)\supset\Box\neg(x=y)$; echivalent

   $(x\neq y)\supset\Box(x\neq y)$; 3, prin $\mathbf{R}_6$, 4.1.2.

9. Fie $\langle W,R,\Omega,\iota\rangle$ un model, $w\in W$, μ o asignare arbitrară în acest model și $[\Box\exists x\alpha]_w^{\iota,\mu}=1$. Rezultă că pentru orice $w^*\in W$ astfel că wRw^*, $[\exists x\alpha]_{w^*}^{\iota,\mu}=1$. Există deci o asignare ν în w^*, x-variantă a lui μ, astfel încât $[\alpha]_{w^*}^{\iota,\nu}=1$. Definim acum o asignare ρ x-variantă a lui μ astfel: $x_{w^*}^{\rho}=x_{w^*}^{\nu}$, pentru orice w^* astfel că wRw^*. Deducem astfel că $[\alpha]_{w^*}^{\iota,\rho}=1$, pentru orice w^* astfel că wRw^*. Și deci $[\Box\alpha]_w^{\iota,\rho}=1$. Însă cum ρ este o x-variantă a lui μ, obținem $[\exists x\Box\alpha]_w^{\iota,\rho}=1$.

Bibliografie

Abrevieri

J.S.L. – The Journal of Symbolic Logic
J.Ph.L. – Journal of Philosophical Logic
N.D.J.F.L. – Notre Dame Journal of Formal Logic
Z.M.L.G.M. – Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik
J.L.Co. – Journal of Logic and Computation
H.Ph.L. – Handbook of Philosophical Logic

Logica tradiţională

1. Aristotel, a) *Organon*, I, Editura IRI, Bucureşti, 1997.
b) *Metafizica*, Editura IRI, Bucureşti, 1999.
2. Bacon, J., Syllogistic without existence, *N.D.J.F.L.*, 8, 1967, 195-219.
3. Bird, O., *Syllogistic and its Extensions*, Prentice Hall, Inc., 1964.
4. Blanche, E., *La Logique et son Histoire*, Paris, Armand Colin, 1970.
5. Bochenski, I.M., a) *Ancient Formal Logic*, Amsterdam, North Holland Publ. Co, 1957.
b) *A History of Formal Logic*, University of Notre-Dame Press, 1961.
6. Caroll, L., *Symbolic Logic*, London, 1896.
7. Church, A., The history of the question of existential import of categorial propositions, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceeding of the 1964 Int. Congr., Amsterdam, 1965.
8. Corcoran, J. (ed), *Ancient Logic and its Modern Interpretations*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland/Boston – USA, 1974.
9. Didilescu, I.; P. Botezatu, *Silogistica. Teoria clasică şi interpretările moderne*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1976.
10. Dumitriu, A., a) *Logica polivalentă*, Ed. Encicl. Rom, Bucureşti, 1971.
b) *Istoria logicii*, Ed. a II-a, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1969.
11. Ebbinghaus, K., *Ein formales Modell des Syllogistik des Aristoteles*, Göttingen, 1964.
12. Goblot, E., *Traité de Logique*, Paris, Annand Colin, 1925.
13. Hacker, E.A., a) Number system for the immediate inferences and the syllogism in Aristotelian logic, *N.D.J.F.L.*, 8, 1967, 318-320.
b) The octogon of opposition, *N.D.J.F.L.*, XVI, 3, 1975.
14. Hasenjaeger, G., *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik*, Freiburg-München, 1962.
15. Hintikka, J., *Time and Necessity*, Oxford, 1973.
16. Hughes, G.E.; D.G. Londey, *The Elements of Formal Logic*, London, 1965.
17. Iwanus, B., An extension of the traditional logic containing the elementary ontology and the algebra of classes, *Studia Logica*, 25, 1969, 97-139.
18. Jaskowski, St., On the rules of suppositions in formal logic, *Studia Logica*, 1, 1934, 5-32.
19. Kneale, W. & M., *Dezvoltarea logicii*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, vol. 1 (1974), vol. 2 (1975).
20. Leibniz, G., *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1708), Flamarion, Paris, 1935.
21. Lorenzen, P., *Formale Logik*, 2. Aufl., Berlin, 1962.
22. Lukasiewicz, J., *Aristotle's Syllogistic form the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford 1951, 1957.
23. Marga, A., a) *Exerciţii de logică generală* (multigr.), Univ. „Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Partea I (1983), Partea a II-a (1987).
b) *Argumentarea*, Editura Fundaţiei Studiilor Europene, Cluj-Napoca, 2006.
24. Menne, A. (ed), a) *Logico-Philosophical Studies*, Dordrecht-Holland, 1962.
b) *Logik und Exitenz*, Meisenheim, 1954.
c) *Einführung in die Logik*, 5. Aufl., Francke, 1993.

25. Moisil, G., *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, Ed. Şt., Bucureşti, 1965.
26. Mc Call, S., *Aristotle's Modal Syllogisms*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1963.
27. Patzig, G., *Silogistica aristotelică*, Ed. Şt., Bucureşti, 1970.
28. Prior, A.N., *Formal Logic*, Oxford, Clarenden Press, 1955.
29. Rescher, N., a) Venn diagrams for plurarive syllogism, in *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht-Holland, 1968, 126-133.
b) *Many-valued logics*, McGraw Hill, 1969.
30. Rose, L.E., *Aristotle's Syllogistic*, Sprinfield, Illinois, Ch. C. Thomas-Publ., 1968.
31. Ross, D., *Aristotle*, London, Methuen & Co L.T.D., 1966.
32. Russell, B., *Probleme der Philosophie*, Frankfurt/M, 1969.
33. Sayre, K.M., Syllogistic inference within the propositional calculus, *N.D.J.F.L.*, 5, 1964, 238-240.
34. Scholz, H., *Concise History of Logic*, New York, Philosophical Library, 1961.
35. Stoianovici, D.; T. Dima; A. Marga, *Logică generală*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1990.
36. Strawson, P.F., a) *Introduction to Logical Theory*, London, 1964.
b) *Logico-Linguistic Papers*, London, 1971.
37. Ţuţugan, F., *Silogistica judecăţilor de predicaţie*, Edit. Acad. R.S.R., 1957.
38. Vieru, S., *Axiomatizări şi modele ale sistemelor silogistice*, Bucureşti, 1973.

Logică clasică

1. Ackermann, W., a) Begründung des „tertium non datur" mitttels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, *Mathematische Annalen*, 93, 1925, 1-36.
b) Zum Hilbertschen Aufbau der reelen Zahlen, *Mathematische Annalen*, 99, 1928, 118-133.
c) Zur Widersprunchsfreiheit der Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 117, 1940, 162-194.
d) *Solvable Cases of the Decision Problem*, Amsterdam, 1954.
2. Anderson, R., a) Completeness Results for E-resolution, *Proceedings AFIPS*, 1970, Spring Joint Computer Conference, Vol. 36, Montvale, NJ: AFIPS Press, 653-656.
b) *Minds and machines*, New Jersey: Prentice Hall, 1964.
3. Anderson, R.; W.W. Bledsoe, A linear format for resolution with merging and a new technique for establishing completeness, *Journal of the ACM*, 17, 1970, 525-534.
4. Andrews, Peter, B., a) Resolution in Type Theory, *J.S.L.*, 36(3), 1970, 414-432.
b) Theorem Proving via General Matings, *Journal of the ACM*, 28(2), 1981, 193-214.
c) *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof*, New York, Academic Press, 1986.
5. Barwise, Jon, (ed) *Handbook of Mathematical Logic*, *Studies in Logic*, vol. 90, Elsevier North Holland, New York, 1977.
6. Barwise, J.; Etchemendy, J., *Language, Proof and Logic*, Seven Bridges Press, New York, 1999.
7. Becker, O., *Grundlagen der Matematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg: Alber, 1954.
8. Beeson, J.M., *Foundation of Constructive Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
9. Benacerraf, P.; H. Putnam (eds), *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed, Cambridge, 1982 (1st ed, 1964).
10. Bernays, P., a) Sur le platonisme dans les mathematiques, *L'Enseignement Mathématique*, 34,1935, 52-69 ; in engl. in Benacerraf; Puttnam, 258-271.
b) *Logical Calculus*, Inst. For Adv. Study, Princeton, N.J., 1936.
c) *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam, North Holland, 1958.
d) Comments on L. Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*, *Ratio* 2,1959; retip. in Benacerraf ; Puttnam (1st ed).
11. Beth, E.W., a) A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel, *Indag. Math*, 13, 1951, 436-444.
b) On Padoa's method in the theory of definition, *Indag. Math.*, vol. 15, 330-339, 1953.
c) Some consequences of the theorem of Löwenheim-Gödel-Malcev, *Indag. Math*, 15, 1953, 66-71.
d) *The Foundations of Mathematics*, North-Holland, 1959.
12. Bishop, E., *Foundation of Constructive Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.

13. Bocheński, I.M., *Formale Logik*, Freiburg – München, 1956.
14. Book, Ronald, *Formal Language Theory*, New York, Academic Press, 1980.
15. Boyer, R.S.; J.S. Moore, *A Computational Logic*, New York, Academic Press, 1979.
16. Bundy, Alan, *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning*, New York, Academic Press, 1983.
17. Butterfield, J. (ed), *Language, Mind and Logic*, Cambridge UP, 1986.
18. Carnielli, W.A., Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux, *J.S.L.*, 52, 473-493, 1987.
19. Chang, C.C.; H.J. Keisler, *Model Theory*, Studies in Logic, vol. 73, Amsterdam: Elsevier North Holland, 1973.
20. Chang, C.; R.C. Lee, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, New York, Academic Press, 1973.
21. Church, A., a) An unsolvable problem of number theory, *American Journal of Mathematics*, 58, 1936, 345-363.
b) A note on the Entscheidungsproblem, *J.S.L.*, 1, 1936, 40-41, 101-102; retip. in *The Undecidable*, M. Davis (ed), 110-115, Raven Press, 1965.
c) The constructive second number class, *Bull. Am. Math. Soc.*, 44, 1938, 224-232.
d) *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton UP 1956.
22. Clocksin, W. F.; C. S. Mellish, *Programing in PROLOG*, New York, Springer Verlag, 1981.
23. Cook, S. A.; R. A. Reckhow, The relative efficiency of propositional proof systems, *J.S.L.*, 44(1), 1979, 33-50.
24. Copi, I., *Symbolic Logic*, The Macmillan Co. New York, 1967.
25. Craig, W, a) Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem, *J.S.L.*, 22, 1957, 250-268.
b) Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *J.S.L.*, 22, 1957, 269-285.
26. Curry, H., a) *A Theory of Formal Deductibility*, Notre Dame Mathematical Lectures, nr. 6, Notre Dame UP, 1950.
b) *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland, 1951.
c) *Foundations of Mathematical Logic*, New York, 1963.
27. Davis, M. D., Eliminating the irrelevant from mechanical proofs, *Proceedings of a Symposium on Applied Mathematics*, Vol. XV, Providence, RI, 15-30, 1963.
28. Davis, M. D.; H. Putnam, A computing procedure for quantification theory, *Journal of the ACM*, 7, 1960, 201-215.
29. Davis, M. D.; E. J. Weyuker, *Computability, Complexity and Languages*, New York, Academic Press, 1983.
30. Digricoli, V.J.; M.C.Harrison, Equality-based binary resolution, *Journal of the ACM*, 33, 1986, 253-289.
31. Dowling, W. F.; J. H. Gallier, Linear-time algorithms for testing the satisfiability of propositional Horn formulae, *Journal of Logic Programming*, 3, 1984, 267-284.
32. Dreben, B.; W.D. Goldfarb, *The Decision Problem*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1979.
33. Ebbinghaus, H.D.; J. Flum; W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York, 1994.
34. Enderton, H. B., *A Mathematical Introduction to Logic*, New York, Academic Press, 1972.
35. Feferman, S., a) Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fundamenta Mathematicae*, XLIX, 1960, 35-92.
b) Transfinite recursive progressions of axiomatic theories, *J.S.L.*, 27, 1962, 259-316.
c) Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions, *J.S.L.*, 53, 1988, 364-384.
36. Feys, R., Les methodes récentes de déduction naturelle, *Revue philosophique de Louvain*, 44,1946, 370-400.
37. Field, H., a) *Science without Numbers*, Oxford, Blackwell, 1980.
b) *Realism, Mathematics and Modality*, Blackwell, UK, 1989.
38. Fitting, M.C., a) *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, D. Reidel Publ. Co., 1983.
b) Resolution for Intuitionistic Logic, *Methodologies for Intelligent Systems*, Z.W.Ras, M. Zemankova (eds), North-Holland, 1987, 400-407.

c) First-Order Modal Tableaux, *Journal of Automated Reasoning*, 4, 1988, 191-213.
d) Negation as refutation, *Proc. Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science*, IEEE Computer Society Press, 1989, 63-70.
e) *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
39. Frege, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*, Hale, 1879, in engl. in Heijenoort (ed), 1-82.
40. Gallier, J.H., *Logic for Computer Science. Foundations of Automatic Theorem Proving*, 2003.
41. Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1935, 176-210; 405-431.
42. Garey, M.R.; D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, New York, Freeman, 1979.
43. Gilmore, P.C., A proof method for quantification theory: Its justification and realization, *IBM J Res Develop*, 1960, 28-35.
44. Girard, J.Y., *Proof Theory and Logical Complexity*, vol. 1, Naples, Bibliopolis, 1987.
45. Gödel, K., a) Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 1930; in engl. in vol Heijenoorth (ed), şi în *Coll. Works*, I.
b) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 1931, 173-98; în engl. în Heijenoorth (ed) şi *Coll. Works*,I.
c) *On decidable proposition offormal mathematical systems*, Princeton, 1934.
d) *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications* (1951), in *Coll. Works*, III, Oxford UP, 1995, 304-323.
e) Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica*, 12, 1958, 280-287.
46. Grzegorczyk, A., *An Outline of Mathematical Logic*, Varsovia, 1974.
47. v. Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, Harvard UP, 1967.
48. Henkin, L., a) The completeness of the first-order functional calculus, *J.S.L.*, 14, 1949, 159-166.
b) A problem concerning provability, *J.S.L.*, 17, 1952, 160.
c) Some interconnections between modern algebra and mathematical logic, *Transactions of the American Mathematical Society*, 74, 1953, 410-427.
d) A generalization of the concept of ω-completeness, *J.S.L.*, 22, 1957, 1-41.
49. Herbrand, Jacques, a) *Logical Writings*, Hingham, MA, Reidel Publishing Company, 1971.
b) *Recherches sur la théorie de la demonstration*, Thesis at the Univ. of Paris (1930); in engl. *Investigations in Proof Theory*, 44-202 in Jacques Herbrand, *Logical Writings*, W. Goldfarb (ed), Harvard University Press, 1971.
c) Sur la non-contradiction de l'Arithmetique, *Journ. reine u. angew. Math.*, 166, 1932, 1-8; in engl. in Heijenoorth (ed).
50. Hermes, H., a) *Vorlesungen über Entscheidungsproblem in Mathematik und Logik*, Münster, 1955.
b) *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*, Berlin, 1961.
c) *Einführung in die mathematische Logik*, B.G. Teubner V., Stuttgart, 1963.
51. Heyting, A., *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam, North Holland, 1956.
52. Hilbert, D.; W. Ackerman, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928, zw. verb. Aufl., New York, 1946, vierte verb. Aufl. 1959.
53. Hilbert, D.; P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, vol. I, 1934; vol. II, 1939.
54. Hintikka, K.J.J., a) Form and content in quantification theory, *Acta Philosophica Fennica*, vol.8, 1955, 7-55.
b) *Essays on Mathematical and Philosophical Logic*, Dordrecht, Reidel, 1978.
55. Hopcroft, J.E.; J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, 1979.
56. Kalish, D.; R. Montague, *Logic: Techniques of Formal Reasoning*, NY: Harbourt, Brace, World, 1964.
57. Kleene, Stephen C., a) *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, Elsevier North Holland, 1952.
b) *Mathematical Logic*, New York, Wiley Interscience, 1967.

c) λ-Definability and Recursiveness, *Duke Math. Journal*, 2, 1936, 340-353.
d) General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.*, 112, 1936, 727-742.
e) A symmetric form of Gödel's theorem, *Konink. Neder. Akad. van Wetensch.*, 53, 1950, 800-802.
58. Kneebone, G.T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, D. van Nostrand Co LTD, London, 1963.
59. Knuth, Donald, *The Art of Computer Programming, vol. 1: Fundamental Algorithms*, Readings, MA: Addison Wesley, 1968.
60. Körner, S., *The Philosophy of Mathematics*, London, 1960.
61. Kowalski, R. A., *Logic for Problem Solving*, New York, Elsevier, North-Holland, 1979.
62. Kowalski, R.; P. Hayes, Semantic trees in automatic theorem proving, *Machine Intelligence*, 4, 1969, American Elsevier, New York, 87-101.
63. Kowaslki, R. A.; D. Kuehner, Linear resolution with selection function, *Artificial Intellicence*, 2, 1970, 227-260.
64. Kowalski, R. A.; M.H. van Emdem, The semantics of predicate logic as a programming language, *Journal of the ACM*, 23(4), 1976, 733-742.
65. Kreisel, G.; A. Levy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 14, 1968, 97-142.
66. Kutschera, F., a) *Die Antinomien der Logik*, Freiburg, 1964.
b) *Elementare Logik*, Springer-Verlag, Wien, 1967.
67. Lewis, C.I.; C.H.Langford, *Symbolic Logic*, sec. ed., Dover Publ., Inc., 1959.
68. Löb, M.H., Solution of a problem of Leon Henkin, *J.S.L.*, 20, 1955, 115-118.
69. Lorenzen, P., *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin, 1955.
70. Löwenheim, L., Über Möglichleiten im Relativkalkül, *Math. Ann.* 76, 1915, 447-470; in engl. in Heijenoorth (ed), 228-251.
71. Lloyd, J.W., *Foundations of Logic Programming*, New York, Springer Verlag, 1984.
72. Loveland, Donald W., a) A linear format for resolution, *Proc. IRIA Symp. Automatic Demonstration, Versailles, France, 1968*, Springer Verlag, New York, 1970, 147-162.
b) *Some linear Herbrand proof procedures: An analysis*, Dept. Computer Science, Carnegie-Mellon University, 1970.
c) *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, New York, Elsevier North Holland, 1979.
73. Lukasiewicz, J., Untersuchungen über den Aussagenkalkül, C.R.Soc.Sci., Varsovie, 23, III, 1930; in engl. in Tarski, *Logics, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956, Cap. IV.
74. Manna, Z.; R. Waldinger, *The Logical Basis for Computer Programming*, Reading, MA, Addison Wesley, 1985.
75. Martin-Löf, P., a) On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws, *Atti Degli Incontri di Logica Matematica*, vol. 2, Siena, 1983-4, 203-281.
b) *Intuitionistic Type Theory*, Napoli, Bibliopolis, 1984.
76. Meltzer, B., Theorem-proving for computers: Some results on resolution and renaming, *Computer J.*, 8, 1966, 341-343.
77. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1966.
78. Mönnich, Uwe (ed), *Aspects of Philosophical Logic*, Dordrecht, Reidel, 1981.
79. Nagel, E., J.R. Newman, *Gödel's Proof*, Routledge and Kegan Paul Ltd., 1958.
80. Nelson, G.; D.C. Oppen, Simplification by cooperating decision procedure, *TOPLAS* 1(2), 1979, 245-257.
81. Nicod, J.G.P., A reduction in the number of the primitive propositions of logic, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 19, 1917.
82. Oppacher, F.; E. Suen, HARP: A tableau-based theorem prover, *Journal of Automated Reasoning*, 4, 1988, 69-100.
83. Paris, J.; L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*, in J. Barwise (ed), 1133-1142.
84. Paterson, M.S.; M.N. Wegman, Linear Unification, *Journal of Computer and System Sciences* 16(2), 1978, 158-167.
85. Penrose, R., a) *The Emperor's New Mind*, Oxford UP, 1989, retip. 1990.

b) *Shadows of the Mind*, Oxford UP, 1994.
86. Pollock, J., *Introduction to Symbolic Logic*, NY: Holt, R & W, 1969.
87. Popplestone, R.J., Beth-tree methods in automatic theorem-proving, in *Machine Intelligence*, N.L. Collins, D. Michie (eds), American Elsevier, 1967, 31-46.
88. Post, E., a) Introduction to a general theory of elementary of elementary propositions, *Amer. Journ. of Math*., 43, 1921; retip. in Heijenoorth (ed), 264-284.
b) Finite combinatory processes – fonnulation I, *J.S.L*, 1, 1936, 103-105.
c) Degrees of recursive unsolvability (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc*., 54, 1948, 641-642.
89. Prawitz, Dag, a) An Improved Proof Procedure, *Theoria* 26, 1960, 102-139.
b) *Natural Deduction*, Stockholm, Almquist & Wiksell, 1965.
c) Meaning and Proofs, *Theoria*, 43, 1977.
d) Review of Dummett *The Logical Basis of Metaphysics*, *Mind* 103, 1994.
90. Quine, W.v.O., a) On Natural Deduction, *J.S.L*., 15, 1950, 93-102.
b) *Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1972.
c) *Mathematical Logic*, Harper T., sec. ed., New York, 1951.
d) *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, sec. ed. 1986.
e) A note on Nicod's postulate, *Mind*, 41, 1932, 345-350.
91. Rasiowa, H.; R. Sikorski, a) A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fundamenta Mathematicae*, 37, 1950, 193-200.
b) *The Mathematics of Metamathematics*, Varsovia, 1968.
92. Robinson, J.A., a) A machine oriented logic based on the resolution principle, *Journal of the ACM* 12(1), 1965, 23-41.
b) *Logic: Form and Function*, New York, Elsevier North-Holland, 1979.
c) The generalized resolution principle, *Machine Intelligence* 3, Dale and Michie (eds), Oliver & Boyd, 1968, 77-93.
93. Robinson, A., *Non-Standard Analysis*, North-Holland, ed. rev., 1974.
94. Robinson G.A.; L. Wos, Paramodulation and theorem-proving in first-order logic with equality, *Machine Intelligence*, 1969, vol. 4, 135-150.
95. Rogers, H.R., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, New York, McGraw-Hill, 1967.
96. Rosser, J.B., a) Constructibility as a criterion for existence, *J.S.L*., 1, 1936.
b) Extensions of some theorems of Gödel and Church, *J.S.L*., 1, 1936, 87-91.
c) Gödel theorems for non-constructive logics, *J.S.L*., 2, 1937, 129-137.
d) An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem, *J.S.L*., 4, 1939.
e) *Logic for Mathematicians*, New York, 1953.
97. Schoenfield, J.R., a) *Mathematical Logic*, Reading, MA: Addison Wesley, 1967.
b) *Degrees of Unsolvability*, Amsterdam, 1971.
98. Schütte, K., a) *Beweistheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1960.
b) *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer Verlag, 1968.
99. Siekman, J.; G. Wrightson, G., *Automation of Reasoning*, New York, Springer Verlag, 1983.
100. Skolem, T., a) Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, *Fundamenta Mathematicae*, 23, 1934, 150-161.
b) Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Vidensk. Skrifter*, 4,1920; in engl. in Heijenoorth (ed), 254-268.
c) Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begündung der Mengenlehre, *Mathematikerkongressen, Helsingfors des 4-7 Juli 1922*; in engl. in Heijenoorth (ed), 290-301.
d) Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgit av Det Norske Videnskaps – Akademi I Oslo, I, 4, 1929.*
e) Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik, idem, 7, 1930.
f) Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem, *Les entretiens de Zurich*, Zürich, 1941, 25-47.
g) *Abstract Set Theory*, Notre Dame, Indiana, 1962.

101. Slupecki, J.; L. Borkowski, *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*, Pergamon Press, 1967.
102. Smullyan, R.M., *First-order Logic*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968.
103. Stegmüller, W., *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit*, zw. Aufl., Springer-Verlag, Wien, 1970.
104. Sterling, L.; E. Shapiro, *The Art of Prolog*, The MIT Press, 1986.
105. Szabo, M.E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen,* Studies in Logic, New York, Elsevier North Holland, 1970.
106. Takeuti, G., *Proof Theory,* Studies in Logic, vol. 81, Amsterdam, Elsevier North Holland, 1975.
107. Tarski, A.; A. Mostowski; R.M. Robinson, *Undecidable Theories*, Studies in Logic, Amsterdam, Elsevier North Holland, 1971.
108. Visser, A., *Aspects of Diagonalization and Provability*, Thesis, Dep. Of Philosophy, Univ. of Utrecht, 1981.
109. Wang, H., *From Mathematics to Philosophy*, London, Routledge and Kegan Paul, 1974.
110. Whitehead, A.N.; B. Russell, *Principia Mathematica*, 3 vol. Cambridge, 1910-1913.
111. Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus.*
112. Wilder, R.L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, New York, Wiley, 1952.
113. Wos, L.; R. Overbeek; E. Lusk; J. Boyle, *Automated Reasoning, Introduction and Applications*, Prentice-Hall, 1984.
114. Zalta, E., *Intensional Logic and Metaphysics of Intentionality*, Cambridge, Mass, London, 1988.

Logică modală

1. Abramski, S.; D.M. Gabbay; T.S.E. Mailbaum (eds), *Handbook of Logic in Computer Science*, vol. 2, Clarendon Press, 1992.
2. Andreka H.; J.v. Benthem; I. Nemeti, Modal languages and bounded fragments of predicate logic, *J. Ph. L.*, 27, 1998, 214-274.
3. Artemov, S.N., Finite Kripke models and predicate logics of provability, *J.S.L.*, 55, 1990, 1090-1098.
4. Avron, Arnon, On modal systems having arithmetical interpretations, *J.S.L.*, 49, 1984, 935-942.
5. Anderson, A.R., Improved decision procedures for Lewis's calculus *S4* and von Wright's calculus *M*, *J.S.L.*, 19, 1954, 201-214 (cu o corecție în *J.S.L.* 20, 1954, 150).
6. Balbiani, Ph.; Farinas del Cerro; T. Tinchev; D. Vakarelov, Modal logics for incidence geometries, *J.L.Co.*, 7, 1997, 59-78.
7. Barcan Marcus, R., a) A functional calculus of first order based on strict implication, *J.S.L.*, 11, 1946, 1-16.
b) Modalities and intensional languages, *Synthese*, 13, 1961, 303-322.
c) Interpreting quantification, *Inquiry*, 5, 1962, 252-259.
8. Barwise, J; L.S. Moss, Modal correspondence for models, *J.Ph.L.*, 27, 1998, 275-294.
9. Becker, O., Zur Logik der Modalitäten, *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung*, 11, 1930, 497-548.
10. Bellissima, F.; M. Mirolli, On the axiomatization of finite $\mathcal{K}$-frames, *Studia Logica*, 1983, 383-388.
11. Benthem, J.F.A.K. van, a) Two simple incomplete logics, *Theoria*, 44, 1978, 25-37.
b) Canonical modal logics and ultrafilter extensions, *J.S.L.*, 44, 1979, 1-8.
c) Syntactic aspects of modal incompleteness theorems, *Theoria*, 45, 1979, 63-77.
d) Some kinds of modal completeness, *Studia Logica*, 39, 1980, 125-141.
e) *Modal Logic and Classical Logic*, Naples, Bibliopolis, 1983.
f) Correspondence Theory, in D.M. Gabbay; F. Guenthner (eds), *H.Ph.L.*, vol. II, Cap. 4, 167-247.
12. Beklemishev, L.D., Provability logics for natural Turing progressions of arithmetical theories, *Studia Logica*, 50, 1991, 107-128.
13. Bernardi, C., a) The fixed-point theorem for diagonalizable algebras, *Studia Logica*, 34, 1975, 239-251.

b) On the equational class of diagonizable algebras, *Studia Logica*, 34, 1975, 321-331.
c) The uniqueness of the fixed-point in every diagonalizable algebra, *Studia Logica*, 35, 1976, 335-343.
14. Blackburn, P., Nominal tense logic, *N.D.J.F.L*, 34, 1993, 56-83.
15. Blackburn, P.; J. Seligman, Hybrid languages, *Journal of Logic, Language and Information*, 4, 1995, 251-272.
16. Blackburn, P.; M. Tzakova, a) Hybridizing concept languages, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 24, 1998, 23-49.
b) Hybrid languages and temporal logic, *Logic Journal of the IGPL*, 7(1), 1999, 27-54.
17. Block, W.J., a) An axiomatization of the modal theory of the veiled recession frame, Technical report, Dept. of Math., Univ. of Amsterdam, 1977.
b) On the degree of incompleteness in modal logic and the covering relations in the lattice of modal logics, Technical report 78-07, Dept. of Math., Univ. of Amsterdam, 1978.
c) The lattice of modal algebras: An algebraic investigation, *J.S.L.*, 45, 1980, 221-236.
d) An axiomatization of the veiled recession frame, *Studia Logica*, 38, 1979, 37-47.
e) The lattice of modal logics: an algebraic investigation, *J.S.L.*, 44, 1980, 221-236.
18. Boolos, G., a) *The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic*, Cambridge UP, 1979.
b) On deciding the truth of certain statements involving the notion of consistency, *J.S.L.*, 41, 1976, 779-781.
c) Reflection principles and iterated consistency assertion, *J.S.L.*, 44, 1979, 33-35.
d) Omega-consistency and the diamond, *Studia Logica*, 39, 1980, 237-243.
e) Provability, truth, and modal logic, *J.Ph.L.*, 8, 1980, 1-7.
f) Provability in arithmetic and a schema of Grzegorczyk, *Fundamenta Mathematicae*, 96, 1980, 41-45.
g) On systems of modal logic with provability interpretations, *Theoria*, 46, 1980, 7-18.
h) Extremely undecidable sentences, *J.S.L.*, 47, 1982, 191-196.
i) On the nonexistence of certain normal forms in the logic of provability, *J.S.L.*, 47, 1982, 638-640.
j) The logic of provability, *American Math. Monthly*, 91, 1984, 470-480.
k) The analytical completeness of Dzhaparidze's polymodal logics, *Annals of Pure and Applied Logic*, 61, 1993, 95-111.
l) *The Logic of Provability*, Cambridge U.P., 1993.
19. Boolos, G.; R.C. Jeffrey, *Computability and Logic*, 3d ed, Cambridge UP, 1989.
20. Boolos, G.; Vann McGee, The degree of the set of sentences of predicative provability logic that are true under every interpretation, *J.S.L.*, 52, 1987, 165-171.
21. Boolos, G.; G. Sambin, a) An incomplete system of modal logic, *J. Ph. L.*, 14, 1985, 351-358.
b) Provability: the emergence of a mathematical modality, *Studia Logica*, 50, 1991, 1-23.
22. Bowen, K.A., *Model Theory of Modal Logic*, Dordrecht, Reidel, 1979.
23. Bull, R., An approach to tense logic, *Theoria*, 36, 1970, 282-300.
24. Bull, R. A., That all normal extensions of *S4.3.* have the finite model property, *Z.M.L.G.M.*, 12, 1966, 314-344.
25. Bull, R.A.; K. Segerberg, Basic modal logic, in *H.Ph.L.*, vol. II, Cap. 1, 1-88.
26. Burgess, J.P., Basic tense logic, *H.Ph.L.*, Vol. II, Cap. 1, 89-113.
27. Burgess, J.P.; Y. Gurevich, The decision problem for linear temporal logic, *N.D.J.F.L.*, 26, 1985, 115-128.
28. Buss, S.R., a) The modal logic of pure provability, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 225-231.
b) (ed), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier Science, 1998.
29. Carnap, R., a) Modalities and quantification, *J.S.L.*, 11, 1946, 33-64.
b) *Meaning and Necessity*, Chicago UP, 1947.
30. Chagrov, A.; F. Wolter; M. Zakharyaschev, Advanced modal logic, *H.Ph.L.*, Kluwer Acad. Publ. (sec. ed.).
31. Chagrov, A.; M. Zakharyaschev, *Modal Logic, Oxford Logic Guides*, 35, Oxford UP, 1997.
32. Chagrova, L.A., An undecidable problem in correspondence theory, *J.S.L.*, 56, 1991, 1261-1272.
33. Chellas, B.F., *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge UP, 1980.

34. Corsi, G., Quantified modal logics of positive rational numbers and some related systems, *N.D.J.F.L.*, 34, 1993, 263-283.
35. Cresswell, M.J., a) A Henkin completeness theorem for *T*, *N.D.J.F.L.*, 8, 1967, 186-190.
b) The elimination of *de re* modalities, *J.S.L.*, 34, 1969, 329-330.
c) Frames and models in modal logic, in J.L. Crossley, *Algebra and Logic*, Springer-Verlag, 1975.
d) *KM* and the finite model property, *N.D.J.F.L.*, 24, 1983, 323-327.
e) An incomplete decidable modal logic, *J.S.L.*, 49, 1984, 520-527.
f) Magari's theorem via the recession frame, *J.Ph.L.*, 16, 1987, 13-15.
g) Necessity and contingency, *Studia Logica*, 47, 1988, 146-149.
h) Incompleteness and the Barcan formula, *J.Ph.L.*, 24, 1995, 379-403.
36. Dalen, D. van, Intuitionistic logic, *H.Ph.L.*, vol. III, Cap. 4, 225-239.
37. D'Agostino, M.; D.M. Gabbay; R. Hähnle, J. Posegga (eds.), *Handbook of Tableau Methods*, Kluwer Acad. Publ. 1999.
38. Dummett, M.A.E.; E.J. Lemmon, Modal logics between *S4* and *S5*, *Z.M.L.G.M.*, 5, 1959, 250-264.
39. Dunn, J.M., Relevance logic and entailment, *H.Ph.L.*, vol. III, Cap. 3, 117-224.
40. Dzhaparidze, G., a) Decidable and enumerable predicate logics of provability, *Studia Logica*, 49, 1990, 7-21.
b) Provability logic with modalities for arithmetical complexities, *Bulletin of the Academy of Science of the Georgian SSR*, 138, 1990, 481-484.
c) Predicate provability logic with non-modalized quantifiers, *Studia Logica*, 50, 1991, 149-160.
41. Emerson, E.A., Temporal and modal logics, in van Leeuwen (ed), *Handbook of Theoretical Computer Science*, B, Elsevier, 1990, 995-1072.
42. Esakia, L.L., Topological Kripke models, *Soviet Mathematics Doklady*, 15, 1974, 147-151.
43. Feferman, S., a) Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fundamenta Mathematicae*, 49, 1960, 35-92.
b) Transfinite recursive progressions of axiomatic theories, *J.S.L.*, 27, 1962, 259-316.
44. Feys, R., *Modal Logics*, Louvain, E. Nauwelaerts, 1965.
45. Fine, K., a) The logics containing *S4.3.*, *Z.M.L.G.M.*, 17, 1971, 371-376.
b) Logics containing *K4*, Part I, *J.S.L.*, 39, 1974, 31-42.
c) Normal frames in modal logic, *N.D.J.F.L.*, 16, 1975, 229-237.
d) Model theory for modal logic, Part I, the *de re / de dicto* distinction, *J.Ph.L.*, 7, 1978,125-156.
46. Fitch, F., A correlation between modal reduction principles and properties of relations, *J.Ph.L.*, 2, 1973, 97-101.
47. Fitting, M., a) Basic modal logic, in Gabbay, Hogger, Robinson (eds), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. 1, Oxford UP, 1993, 368-449.
b) *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, Dordrecht, Reidel, 1983.
48. Fitting, M.; R.L. Mendelsohn, *First-Order Modal Logic*, Kluwer Acad. Publ., 1998.
49. Forbes, G., *Languages of Possibility*, Oxford, Basil Blackwell, 1989.
50. Gabbay, D.M., a) Decidability results in non-classical logics, *Annals of Mathematical Logic*, 10, 1971, 237-285.
b) On decidable, finitely axiomatizable modal and tense logics without the finite model property, I, *Israel Journal of Mathematics*, 10, 1971, 478-495, II, 496-503.
c) *Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics*, Dordrecht, Reidel, 1976.
51. Gabbay, D.M.; F. Guenthner (eds), *Handbook of Phlosophical Logic*, Dordrecht, Reidel, 4 vol.
52. Gabbay, D.M.; C.J. Hogger; J.A. Robinson (eds), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. 1, Oxford UP, 1993, vol. 4, 1994.
53. Garson, J.W., a) The unaxiomatizability of a quantified intensional logic, *J.Ph.L.*, 9, 1980, 59-72.
b) Quantification in modal logic, *H.Ph.L.*, vol. II, Cap. 5, 249-307.

54. Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift* , 39, 1934, 176-210.
55. Ghilardi, G., Incompleteness results in Kripke semantics, *J.S.L.*, 56, 1991, 517-538.
56. Ghiraldi, S.; G. Meloni, Constructive canonicity in non-classical logics, *Annals of Pure and Applied Logic*, 86, 1997, 1-32.
57. Girle, R., *Modal Logics and Philosophy*, Acumen, 2000.
58. Gleit, Z.; W. Goldfarb, Characters and fixed points in provability logic, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 26-36.
59. Goldblatt, R., a) First-order definability in modal logic, *J.S.L.*, 40, 1975, 35-40.
b) Metamathematics of modal logic, *Reports on Mathematical Logic*, I, 6, 1976, 41-77; II, 7, 21-52.
c) *Mathematics of Modality, Lecture Notes*, 43, CSLI Publ., 1993.
d) Algebraic polymodal logic: a survey, *Logic Journal of the IGPL*, 8, 2000, 393-450.
e) Arithmetical necessity, provability and intuitionistic logic, *Theoria*, 44, 1978, 38-46.
60. Goranko, V., Modal definability in enriched languages, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 81-105.
61. Grädel, E.; I. Walukiewicz, Guarded fixed point logic, *Proceedings 14th IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS'99*, 1999.
62. Gödel, K., a) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 1931, 173-198.
b) Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, 1933, 34-40.
63. Halmos, P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Publ. Co., 1962.
64. Halpern, J.Y.; B.M. Kapron, Zore-one laws for modal logic, *Annals of Pure and Applied Logic*, 69, 1994, 157-193.
65. Halpern, J.Y.; Y.O. Moses, A quide to the completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief, *Artificial Intelligence*, 54, 1992, 319-379.
66. Harel, D., Dynamic logic, *H.Ph.L.*, vol. II, 497-604.
67. Harel, D.; D. Kozen; J. Tiuryn, *Dynamic Logic*, The MIT Press, 2000.
68. Hazen, A., Actuality and quantification, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 498-508.
69. Hawthorn, J., Natural deduction in normal modal logic, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 263-273.
70. Hemaspaandra, E., The price of universality, *N.D.J.F.L.*, 37, 1996, 174-203.
71. Heyting, A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Prussischen Akademie der Wissenschaften, Ph-math. Klasse*, 1930, 42-56.
72. Hintikka, J.J.K., a) Modality and quantification, *Theoria*, 27, 1961, 110-128.
b) The modes of modality, *Acta Philosophica Fennica – Modal and Many-valued Logics*, 1963, 65-81.
73. Hodes, H.T., Some theorems on the expressive limitations of modal languages, *J.Ph.L.*, 13, 1984, 13-26.
74. Hodges, W., a) *Logic*, Penguin Books, 1977.
b) *Model Theory*, Cambridge UP, 1993.
75. Hollenberg, M., Safety for bisimulation in general modal logic, *Proceedings 10th Amsterdam Colloquium*, 1996.
76. Hughes, G.E., a) Equivalence relations and *S5*, *N.D.J.F.L.*, 21, 1980, 577-584.
b) Every world can see a reflexive world, *Studia Logica*, 49, 1990.
77. Hughes, G.E.; M.J.Cresswell, a) *A New Introduction to Modal Logic*, London, Routledge, 1996.
b) *A Companion to Modal Logic*, London, Methuen, 1984.
78. Humberstone, I.L., Inaccesible Worlds, *N.D.J.F.L.*, 24, 1983, 346-52.
79. Hut, M.R.A.; M.D. Ryan, *Logic in Computer Science*, Cambridge UP, 2000.
80. Isard, S., A finitely axiomatizable undecidable extension of $\mathcal{K}$, *Theoria*, 43, 1977, 195-202.
81. Ignatiev, K.N., a) On strong provability predicates and the associated modal logics, *J.S.L.*, 58, 1993, 249-290.
b) The closed fragment of Dzhaparidze's polymodal logic and the logic of Σ_1-conservativity, *ITLI Prepublication Series for Mathematical Logic and Foundations*, X-92-02, University of Amsterdam, 1992.

82. Jeffrey, R.C., *Formal Logic: Its Scope and Limits*, Ed. a III-a, McGraw-Hill, 1991.
83. Jenings, R.E., A note on the axiomatization of Brouwersche modal logic, *J.Ph.L.*, 10, 1981, 341-343.
84. Jeroslow, R.G., Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, *J.S.L.*, 38, 1973, 359-367.
85. Jónsson, B., On the canonicity of Sahlqvist identities, *Studia Logica*, 4, 1994, 473-491.
86. Kanger, S., *Provability in Logic*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1957
87 Kaplan, D., On the logic of demonstratives, *J.Ph.L.*, 7, 1978, 81-98.
88. Kneale, W.C.; M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford, Clarenden Press, 1962.
89. Kracht, M., a) Even more about lattice of tense logics, *Archive of Mathematical Logic*, 31, 1992, 243-357.
b) How completeness and correspondence theory got married, in M. de Rijke (ed), *Diamonds and Defaults*, Synthese Library, 229, Kluwer A. Publ., 1993, 175-214.
c) Splitting and the finite model property, *J.S.L.*, 58, 1993, 139-157.
d) Lattices of modal logics and their groups of automorphism, *Journal of Pure and Applied Logic*, 100, 1999, 99-139.
e) *Tools and Techniques in Modal Logic, Studies in Logic*, 142, Elsevier, Amsterdam, 1999.
90. Kracht, M.; M. de Rijke; H. Wansing; M. Zakharyaschev (eds), *Advanced in Modal Logic*, vol. I., Lecture Notes, 87, CSLI Publications, 1998.
91. Kracht, M.; F. Wolter, Simulation and transfer results in modal logic: A survey, *Studia Logica*, 59, 1997, 149-177.
92. Kreisel, G., *Mathematical Logic*, in *Lectures on Modern Mathematics*, III, T.L. Saaty, John Wiley & Sons, 1965.
93. Kreisel, G.; A. Lévy, Reflections principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, *Z.M.L.G.M.*, 14, 1968, 97-142.
94. Kripke, S., a) A completeness theorem in modal logic, *J.S.L.*, 24, 1959, 1-14.
b) The undecidability of monadic modal quantification theory, *Z.M.L.G.M.*, 8, 1962, 113-116.
c) Semantical analysis of modal logic I,. *Z.M.L.G.M.*, 9, 1963, 67-96.
d) Semantical considerations on modal logics, *Acta Philosophica Fennica – Modal and Many-valued Logics*, 16, 1963, 83-94.
e) Semantical analysis of intuitionistic logic I, in J.N. Crossley, M.A.E. Dummett (eds), *Formal Systems and Recursive Functions*, Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1965, 92-129.
f) Semantical analysis of modal logic II, in J.W. Addison, L. Henkin, A. Tarski, *The Theory of Models*, Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1965, 206-220.
95. Konikowska, B., a) A formal language for reasoning about indiscernability, *Bulletin of Polish Academy of Sciences*, 35, 1987, 239-249.
b) A logic for reasoning about relative similarity, *Studia Logica*, 58, 1997, 185-226.
96. Kozen, D., A completeness theorem for Kleene algebras and the algebra of regular events, *Proceedings 6th IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS'91*, 1991, 214-225.
97. Kuhn, S., a) Quantifiers as modal operators, *Studia Logica*, 39, 1979.
b) Quantifiers as diamonds, *Studia Logica*, 39, 1980, 173-195.
c) The domino relation: Flattening a two-dimensional modal logic, *J.Ph.L.*, 18, 1989, 173-195.
98. Kunen, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North Holland, 1980.
99. Kurtonina, N.; M. de Rijke, Expressiveness of concept expressions in forst-order description logics, *Artificial Intelligence*, 107, 1999, 303-333.
100. Kurz, A., A co-variety-theorem for modal logic, in Zakharyaschev, K. Segerberg, M. de Rijke, H. Wansing (eds), *Advances in Modal Logic*, vol. 2, CSLI Publ., 2000.
101. Ladner, R., The computational complexity of provability in systems of modal logic, *SIAM Journal on Computing*, 6, 1977, 467-480.
102. Lemmon, E.J., a) New foundations for Lewis modal systems, *J.S.L.*, 22, 1957, 176-186.
b) An extension algebra and the modal system $\mathcal{T}$, *N.D.J.F.L.*, 1, 1960, 2-12.
c) Some results on finite axiomatizability in modal logic, *N.D.J.F.L.*, 6, 1965, 301-307.
d) Algebraic semantics for modal logics I, *J.S.L.*, 31, 1966, 46-65; II, 191-218.
103. Lemmon, E.J.; D.S. Scott, *The "Lemmon Notes": An Introduction to Modal Logic*, ed. K. Segerberg, Oxford, Basil Blackwell, 1977.

104. Lewis, C.I.; C.H. Langford, *Symbolic Logic*, New York, Dover Publ. 1932.
105. Lewis, D.K., a) Counterpart theory and quantified modal logic, *Journal of Philosophy*, 65, 1968, 113-126.
b) *Counterfactuals*, Oxford, Basil Blackwell, 1973.
c) *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Basil Blackwell, 1986.
106. Loux, M.J., *The Possible and the Actual. Readings in the Metaphysics of Modality*, Ithaca, Cornell UP, 1979.
107. Löb, M.H., a) Solution of a problem of Leon Henkin, *J.S.L.*, 20, 1955, 115-118.
b) Extensional interpretations of modal logics, *J.S.L.*, 31, 1966, 23-45.
108. Lutz, C.; U. Sattler, The complexity of reasoning with Boolean modal logics, *Workshop Proceedings AIML-2000*, Institut für Informatik, Universität Leipzig, 2000, 175-184.
109. Macintyre, A.; H. Simmons, Gödel's diagonalization technique and related properties of theories, *Colloquium Mathematicum*, 28, 1973, 165-180.
110. Magari, R., a) The diagonalizable algebras, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 4, 1975, 321-331.
b) Representation and duality theory for diagonalizable algebra, *Studia Logica*, 34, 1975, 305-313.
111. Makinson, D.C., a) On some completeness theorems in modal logic, *Z.M.L.G.M.*, 12, 1966, 379-384.
b) A normal modal calculus between $\mathcal{T}$ and *S4* without the finite model property, *J.S.L.*, 34, 1969, 35-38.
c) Some embedding theorems in modal logic, *N.D.J.F.L.*, 12, 1971, 252-254.
112. Maksimova, Larisa L., a) Interpolation theorems in modal logic and amalgable varieties of topological Boolean algebras, *Algebra and Logic*, 18, 1979, 348-370.
b) Definability theorems in normal extensions of the provability logic, *Studia Logica*, 48, 1989, 495-507.
113. Marx, M.; L. Pólos; M. Masuch (eds), *Arrow Logic and Multi-Modal Logic, Studies in Logic, Language and Information*, CSLI Publ., 1996.
114. Marx, M.; Y. Venema, Multidimensional Modal Logic, *Applied Logic Series*, 4, Kluwer Acad. Publ, 1997.
115. McGee, Vann, *Truth, Vagueness, and Paradox: An Essay on the Logic of Truth*, Hackett Publ. Co., 1991.
116. McMillan, K., *Symbolic Model Checking*, Kluwer Acad. Publ., 1993.
117. McKay, T.J., a) Essentialism in quantified modal logic, *J.Ph.L.*, 7, 1975, 423-438.
b) The principle of predication, *J.Ph.L.*, 7, 1978, 19-26.
118. Mc Kinsey, J.C.C., On the syntactical construction of systems of modal logic, *J.S.L.*, 10, 1945, 83-96.
119. Mc Kinsey, J.C.C.; A. Tarski, The algebra of topology, *Annals of Mathematics*, 45, 1944, 141-191.
120. Mints, G., *A Short Introduction to Modal Logic*, Lecture Notes, 30, CSLI Publ., 1992.
121. Myhill, J.R., Problems arising in the formalization of intensional logic, *Logique et Analyse*, 1(2), 1958, 74-83.
122. Moisil, G., *Essais sur les logiques nonchrisippiennes*, Ed. Acad. RSR, Buc., 1972.
123. Montagna, F., a) On the diagonizable algebra of Peano arithmetic, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 5, 16-B, 1979, 795-812.
b) The predicate modal logic of provability, *N.D.J.F.L.*, 25, 1984, 179-189.
124. Montague, R.M., *Formal Philosophy*, New Haven, Yale UP, 1974.
125. Montgomery, H.A.; F.R. Routley, Contingency and non-contingency bases for normal modal logics, *Logique et Analyse*, 9, 1966, 318-328.
126. Ohama, S., Conjunctive normal forms and weak modal logics without the axiom of necessity, *N.D.J.F.L.*, 25, 1982, 141-151.
127. Ohlbach, H.J.; A. Nonnengart; M. de Rijke; D.M. Gabbay, Encoding nonclassical logics in classical logic, in Robinson and Voronkov (ed), *Handbook of Automated Reasoning*, Elsevier Sc. Publ.
128. Ohlbach, H.J.; R.A. Schmidt, Functional translation and second-order frame properties of modal logics, *J.L.Co.*, 7, 1997, 581-603.

129. Ono, H.; A. Nakamura, On the size of refutation Kripke models for linear modal and tense logics, *Studia Logica*, 39, 1980, 325-333.
130. Parks, Z., Semantics for contingent identity systems, *N.D.J.F.L.*, 15, 1974, 333-334.
131. Plantinga, A., *Natura necesităţii*, Ed. Trei, Bucureşti, 1998.
132. Pollok, J.L., The paradoxes of strict implication, *Logique et Analyse*, 34, 9, 1966, 180-196.
133. Popkorn, S., *First Steps in Modal Logic*, Cambridge UP, 1992.
134. Ponse, A.; M. de Rijke; Y. Venema (eds), *Modal Logic and Process Algebra: A Bisimulation Perspective, Lecture Notes*, 53, 1995, CSLI Publ.
135. Prior, A.N., a) *Formal Logic*, Oxford UP, Sec. Ed., 1962.
b) Modality and quantification in *S5*, *J.S.L.*, 21, 1956, 60-62.
c) *Time and Modality*, Oxford UP, 1957.
d) Possible worlds, *The Philosophical Quarterly*, 12, 1962, 36-43.
e) *Past, Present and Future*, Oxford UP, 1967.
136. Prior, A.N.; K. Fine, *Worlds, Times and Selves*, University of Massachusetts Press, 1977.
137. Quine, W.V., a) The problem of interpreting modal logic, *J.S.L*, 12, 1947, 43-48.
b) *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass, Harvard Univ. Press, 1953.
c) *Word and Object*, MIT Press and John Wiley and Sons, 1960.
d) *The Ways of Paradox and Other Essays*, Harvard UP, 1976.
138. Rasiowa, H.; R. Sikorski, *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, North Holland, 1974.
139. Rautenberg, W., a) Der Verband der normalen verzweigten Modallogiken, *Mathematische Zeitschrift.*, 156, 1977, 123-140.
b) *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik: Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vieweg, 1979.
140. Reidhaar-Olson, Lisa, A new proof of the fixed-point theorem of provability logic, *N.D.J.F.L.*, 31, 1990, 37-43.
141. Rescher, N., On the logic of existence and denotation, *The Philosophical Review*, 58, 1959, 157-180.
142. Rijke, M. de, a) The modal logic of inequality, *J.S.L.*, 57, 1992, 566-584.
b) (ed) *Diamonds and Defaults*, Synthese Library, 229, Kluwer Acad. Publ., 1993.
c) A Lindström theorem for modal logic, in Ponse, de Rijke, Venema (ed), *Modal logic and...*, 217-230.
d) (ed) Advances in Intensional Logic, *Applied Logic Series*, 7, Kluwer Acad. Publ., 1997.
e) A system of dynamic modal logic, *J.Ph.L.*, 27, 1998, 109-142.
143. Rijke, M. de; H. Sturm, Global definability in basic modal logic, in H. Wansing (ed), *Essays on Non-Classical Logic*, King's College UP, 2000.
144. Rijke, M. de; Y. Venema, Sahlqvist's theorem for Boolean algebras with operators, *Studia Logica*, 95, 1995, 61-78.
145. Rosen, E., Modal logic over finite structures, *Journal of Logic, Language and Information*, 6, 1997, 427-439.
146. Rozenberg, G.; A. Salomaa (eds) *Handbook of Formal Languages*, vol. 3: *Beyond Words*, Springer, 1997.
147. Rößiger, M., Colagebras and modal logic, *Electronic Notes in Computer Science*, 33, 2000, 299-320.
148. Russell, B., On denoting, *Mind*, 14, 1905, 479-493.
149. Sahlqvist, H., Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic, in S. Kanger (ed), *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam, North Holland, 1975, 110-143.
150. Sambin, G.; V. Vaccaro, A topological proof of Sahlqvist's theorem, *J.S.L.*, 54, 1989, 992-999.
151. Sambin, G., An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonizable algebras, *Studia Logica*, 35, 1976, 345-361.
152. Sambin, G.; S. Valentini, The modal logic of provability: The sequential approach, *J.Ph.L.*, 11, 1982, 311-342.
153. Schütte, K., *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer-Verlag, 1968.
154. Schweizer, P., A syntactical approach to modality, *J.Ph.L.*, 22, 1992, 1-31.
155. Scott, D., A decision method for validity of sentences in two variables, *J.S.L.*, 27, 1962, 377.

156. Segerberg, K., a) Decidability of *S4.1*, *Theoria*, 34, 1968, 7-20.
b) *An Essay in Classical Modal Logic*, Univ. of Upsala, 1971.
c) Post completeness in modal logic, *J.S.L.*, 37, 1972, 711-715.
d) Two-dimensional modal logics, *J.Ph.L.*, 2, 1973, 77-96.
e) A completeness theorem in the modal logic of programs, *Notices of the American Mathematical Society*, 24, 1977, A-552.
f) A completeness theorem in the modal logic of programs, in T. Traczyk (ed), *Universal Algebra and Applications, Banach Centre Publications*, 9, PWN-Polish Sc. Publ., 1982, 31-46.
157. Shavrukov, V. Yu., a) The Lindenbaum fixed point algebra is undecidable, *Studia Logica*, 50, 1991, 143-147.
b) A note on the diagonizable algebras of PA and ZF, *ITLI Prepublication Series for Mathematical Logic and Foundations*, ML-91-09, Univ. of Amsterdam, 1991.
158. Shehtman, V., Two-dimensional modal logics, *Mathematical Notices of USSR Academy of Sciences*, 23, 1978, 417-424.
159. Shumm, G.F., a) Wajsberg normal forms for *S5*, *J.Ph.L.*, 4, 1975, 357-60.
b) Some noncompactness results for modal logic, *N.D.J.F.L.*, 30, 1987, 285-290.
160. Sistla, A.P.; E.M. Clarke, The complexity of linear temporal logic, *Journal of the ACM*, 32, 1985, 733-749.
161. Smorynski, C., a) *Self-Reference and Modal Logic*, Springer, New York, 1985.
b) Applications of Kripke models, in A.S. Troelstra, *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Springer-Verlag, 1973, 324-391.
c) *Consistency and related metamathematical properties*, Univ. of Amsterdam, Report 75-02, Dept. of Mathematics, 1975.
d) The incompleteness theorems, in Barwise (ed), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, 1977, 821-865.
e) Beth's theorem and self-referential sentences, *Logic Colloquium '77*, Macintyre, Pacholski, Paris (eds), North Holland, 1978, 253-261.
f) Calculating self-referential statements I: Explicit calculations, *Studia Logica*, 38, 1979, 17-36.
g) Fifty years of self-reference: Löb's theorem, in Th. Drucker (ed), *Perspectives on the History of Math. Logic*, Birkhäuser, 1991, 110-133.
162. Smullyan, A.F., Modality and description, *J.S.L.*, 13, 31-37.
163. Smullyan, R.M., a) Languages in which self-reference is possible, *J.S.L.*, 22, 1957, 55-67.
b) *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford UP, 1992.
c) *Forever Undecided*, Oxford UP, 1987.
164. Sobocinski, B., a) Remarks about the axiomatizations of certain modal systems, *N.D.J.F.L.*, 5, 1964, 71-80.
b) Modal system *S4.4*, *N.D.J.F.L.*, 5, 1964, 305-12.
165. Solovay, R., Provability interpretations of modal logic, *Israel Journal of Mathematics*, 25, 1976, 287-304.
166. Stirling, C., Modal and temporal logics, in Abramski, Gabbay, Maibaum (eds), *Handbook of Logic in Computer Science*, vol. 2, Claredon Press, 1992, 477-563.
167. Tarski, A.; A. Mostowski; R. Robinson, *Undecidable Theories*, North Holland, 1953.
168. Thayse, A. (ed), *From Modal Logic to Deductive Databases*, Wiley, 1989.
169. Thomason, R.H, a) Some completeness results for modal predicate calculi, in K. Lambert (ed), *Philosophical Problems in Logic*, Dordrecht, Reidel, 1970, 56-76.
b) Modality and metaphysics, in K. Lambert (ed), *The Logical Way of Doing Things*, New Haven, Yale UP,1970.
170. Thomason, R.H.; R.C. Stalnaker, Modality and reference, *Noûs*, 2, 1968, 359-372.
171. Thomason, S.K., a) Noncompactness in propositional modal logic, *J.S.L.*, 37, 1972, 716-720.
b) An incompleteness theorem in modal logic, *J.S.L.*, 40, 1974, 30-34.
c) Reduction of tense logic to modal logic, *J.S.L.*, 39, 1974, 549-551.
d) Reduction of tense logic to modal logic, II, *Theoria*, 41, 1975, 154-169.
e) Reduction of second-order logic to modal logic, *Z.M.L.G.M.*, 21, 1975, 107-114.
172. Tichý, P., On *de dicto* modalities in quantified *S5*, *J.Ph.L.*, 2, 1973, 687-692.

173. Urquhart, A., Decidability and the finite model property, *J.Ph.L.*, 10, 1981, 367-370.
174. Vardi, M.Y., Why is modal logic so robustly decidable?, DIMACS *Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 31, 1977, 149-184. AMS.
175. Vardi, M.Y.; P. Wolper, Automata-theoretic techniques for modal logics of programs, *Journal of Computer and System Sciences*, 32, 1986, 183-221.
176. Valentini, S., The modal logic of provability, *J.Ph.L.*, 12, 1983, 471-476.
177. Venema, Y., a) Modal definability, purely modal, in J. Gerbrandy, M. Marx, M. de Rijke, Y. Venema (eds), *J.F.A.K. Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday*, Vossiuspers AUP, Amsterdam, 1991.
b) Derivation rules as anti-axioms in modal logic, *J.S.L.*, 58, 1993, 1003-1034.
c) Cylindric modal logic, *J.S.L.*, 60, 1995, 591-623.
d) Points, lines and diamonds: a two-sortet modal logic for projective geometry, *J.L.Co.*, 9, 1999, 601-621.
178. Visser, A., a) An overview of interpretability logic, in Kracht & Co (eds), *Advances...*, I, 307-359.
b) *Aspects of Diagonalization and Provability*, Thesis, Department of Philosophy, Univ. of Utrecht, 1981.
c) The provability logics of recursively enumerable theories extending Peano Arithmetic at arbitrary theories extending Peano Arithmetic, *J.Ph.L.*, 13, 1984, 97-113.
d) Peano's smart children: A provability logical study of systems with built-in consistency, *N.D.J.F.L.*, 30, 1989, 161-196.
e) The formalization of interpretability, *Studia Logica*, 50, 1991, 81-105.
179. Wansing, H., a) (ed) *Proof Theory of Modal Logic*, Kluwer Acad, Publ., 1996.
b) *Displaying Modal Logic*, Kluwer Acad, Publ., 1998.
180. Williamson, T., a) Assertation, denial and some cancellation rules in modal logic, *J.Ph.L.*, 17, 1988, 299-318.
b) An alternative rule of disjunction in modal logic, *N.D.J.F.L.*, 33, 1992, 89-100.
c) Non-genuine MacIntosh Logics, *J.Ph.L.*, 23, 1994, 87-101.
181. Wolter, F., a) Tense logic without tense operators, *Mathematical Logic Quartely*, 42, 1996, 145-171.
b) Completeness and decidability of tense logics closely related to logics containing *K4*, *J.S.L.*, 62, 1997, 131-158.
c) The structure of lattices of subframe logics, *Annals of Pure and Applied Logic*, 86, 1997, 47-100.
182. Wright, G.H. von, *An Essay in Modal Logic*, North Holland Publ. Co., 1951.
183. Zakharyaschev, M., Canonical formulas for modal and superintuitionistic logics: a short outline, in M. de Rijke (ed), *Advances...*, 1997.
184. Zakharyaschev, M.; A. Alekseev, All finitely axiomatizable normal extensions of *K4.3* are decidable, *Mathematical Logic Quartely*, 41, 1995, 15-23.
185. Zakharyaschev, M.; K. Segerberg; M. de Rijke; H. Wansing (eds), *Advanced in Modal Logic*, vol. 2, C.S.L.I., Publ., 2000.
186. Zakharyaschev, M. V., a) Syntax and semantics of modal logics containing *S4*, *Algebra and Logic*, 27, 1988, 408-428.
b) Cannonical formulas for *K4*, Part. I: basic results, *J.S.L.*, 57, 1992, 1377-1402.
187. Zeman, J.J., *Modal Logic: The Lewis Systems*, Oxford, Clarendon Press, 1973.

678824

Index

A
Ackermann, W., 92, 108, 194, 195, 199, 200.
Algoritmul unificării, 213
Antilogism, 39
Arbore - colapsat, 152
- contraexemplu, 124
- deductiv, 124, 133
- demonstrativ, 124
- diadic, 77
- finit, 77
- neordonat, 77
- ordonat, 77
- subiacent grafului acidic, 153
Aristotel, 1, 2, 3, 21
Asignări - într-un model, 163
- x-variante, 164
Axiomatica $\mathcal{L}_p$, 91
Axiomă a calculului secvenților, 124, 146

B
Barcan Marcus, R., 286
Bază Herbrand, 206
Becker, O., 237
Beth, E., 79, 224
Boethius, 7
Boolos, G., 239
Borkowski, L., 109, 116, 118
Brentano, F., 32, 38, 39
Brower, E.J., 237

C
Cadrele sistemelor modale, 255
Cadru $\langle W, R\rangle$, 244
- convergent, 264
de echivalență, 249
euclidian, 256
final, 299
reflexiv, 247
serial, 248
simetric, 249
- tranzitiv, 248
Calculul secvenților în $\mathcal{L}_p$, 123
Calude, C., 3
Carnap, R., 283, 291
Chellas, B.F., 236, 266
Church, A., 92, 195
Clase de echivalență, 150
Clasificarea propozițiilor categorice, 5
Clauză, 142
Compacitate, 131, *în* $\mathcal{L}_p$, 90
Completitudinea
- deductivă a modelului Brentano, 39, 44
- metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$, 87, 88
- metodei rezoluției, 158
- funcțională, 59
- sistemelor modale, 263
- sistemelor modale $Q^x\mathcal{S}$, 301
- sistemelor modale $Q^x\mathcal{S}$ Bar, 293, 298
- sistemului deducției naturale, 121
- sistemului axiomatic S, 103
- sistemului axiomatic Q, 185, 190
- sistemului axiomatic G, 127
- sistemului axiomatic G^*, 147
- sistemului HA^Q, 198
Consistența
- în LK^*, 137
- sistemului HA^Q, 198
Contrapoziția, 11
Convergență, 266
Conversa formulei Barcan, 284
Conversia demonstrațiilor, 150, 153, 155
Conversiunea, 10
Copi, I., 92
Corectitudinea
- metodei rezoluției, 158
- metodei rezoluției în $\mathcal{L}_P$, 216
- metodei tablourilor analitice în $\mathcal{L}_p$, 87
- sistemelor modale $Q^x\mathcal{S}$ Bar, 287
- sistemului axiomatic Q, 185
- sistemului axiomatic S, 103
- sistemului deducției naturale, 120
- sistemului G^*, 147
Craig, W., 130, 219, 223, 225, 227
Cresswell, M.J., 292

D
Davidson, D., 282
Davis, M., 204, 209, 211, 218
De dicto / de re, 291
Deducție, 94
- naturală, 109

Definibilitate
explicită, 224
implicită, 224
în $\mathcal{L}_P$, 219
Definiție explicită, 224
Demonstrație, 94
- a validității, 81, 167
prin rezoluție, 143
prin rezoluție g.a., 153
De Morgan, 52, 53
Designatori rigizi, 283
Dima, T., 5
Distribuirea termenilor logici, 12
Drăghici, V., 229
Dualitatea, 50
Dummett, M., 264
$\mathcal{D}$-validitatea, 247

E
Ebbinghaus, H.D., 160
Echiveridicitate, 56, 57
Eigenvariable, 219
Evaluări booleene, 78
Expresia clauzală a unei formule, 143
Extensie
- a modelului Brentano, 44
a unui limbaj $\mathcal{L}_P$, 226
directă a unui tablou, 80
- proprie infinită a unui limbaj, 302
Extensiune, 4

F
Factor al unei clauze, 215
Feys, R., 232
Figuri silogistice, 14
Fitting, M., 130
Flum, J., 160
Forma standard a unei formule a $\mathcal{L}_P$, 204
Forme normale
- conjunctive, 34, 68, 133, 250
disjunctive, 36, 70, 134
în $\mathcal{L}_p$, 68
perfecte, 69, 71
prenexe, 182
- Skolem, 183
Formula Barcan, 283
Formulă - adevărată / validă într-un model, 166, 245
- adevărată într-o lume într-un model $\langle W, R, V \rangle$, 245
- a $\mathcal{L}_p$, 48, 77
- a $\mathcal{L}_P$, 161
- deductibilă în S din mulțimea Γ, 105
- elementară a $\mathcal{L}_P$, 161
- închisă, 162
- nesatisfiabilă, 51, 70
- remarcabilă, 52
- satisfiabilă, 51, 166
- validă, 51, 69
- validă într-un cadru $\langle W, R \rangle$, 245, 287
- validă (universal validă), 166
- α, β, 80
- γ, δ, 170
Frege, G., 92
Funcție
- de adevăr, 48, 49
- evaluare (V), 244

G
Gabbay, D., 285
Gallier, J., 145
Garson, J.W., 285
Geach, P.T., 239, 264
Gentzen, G., 79, 91, 109, 123, 136, 138, 139, 145, 146, 147, 219, 226
Gilmore, P.C., 209
Gödel, K., 200, 239, 290
Grafuri aciclice, 152
Gradul
- unei formule, 48
- modal al unei formule, 250
Guenthner, F., 285

H
Hacker, E.A., 13
Harman, G., 282
Hauptsatz (*pentru* LK*), 138
Hayes, P., 207
Heidegger, M., 1
Heijenoorth, J.v., 92
Henkin, L., 106, 190
Herbrand, J., 95, 166, 167, 189, 204, 206, 207, 208, 209, 217, 218
Hermes, H., 160
Heyting, A., 92
Hilbert, D., 91, 92, 108, 194, 195, 199, 200
Hintikka, J.J., 79, 87, 89, 90, 91, 135
Hispanus, Petrus, 19
Hughes, G.E., 292

I

Incompletitudinea
sistemelor $Q^x S4.4$ și $Q^x S4.9$, 303
sistemului $\mathcal{KH}$, 277
sistemului modal $Q^x S4$ MBar, 299
Inferențe, 9
- imediate, 10, 38
- mediate, 14, 39
Intensiune, 4, 283
Interpolant, 130, 219
Interpolare în $\mathcal{L}_P$, 219
Interpretarea
- Brentano, 22
- unei variabile propoziționale, 49
Inversa, 11

J

Jaskowski, S., 109

K

Kleene, S.C., 92, 139
Kneebone, G.T., 195
Kowalski, R., 207
König, D., 90, 208
Kripke, S., 228, 282, 283
$\mathcal{K}4$ *-validitatea*, 248
$\mathcal{K}$ *-validitatea*, 245

L

Langford, C.H., 237
Leibniz, G., 2
Lema
consistenței (pentru G), 132
formei normale, 148
interpolării (Craig), 130, 219
lui Hintikka, 89, 90
lui König, 90
lui Lindenbaum, 106, 186, 191, 260
- satisfiabilității (pentru G), 132, 223
Lewis, C.I., 237
Limbaj de ordinul întâi ($\mathcal{L}_P$), 161
Lindenbaum, A., 106, 191, 192, 193, 260
Literal, 142
Löb, M.H., 239
Löwenheim, L., 190
$\mathcal{L}_P$ *axiomatizată*, 174
Lukasiewicz, J., 1, 92

M

Marga, A., 5
Menne, A., 29
Metoda
- antilogismului, 39
- aplicării regulilor generale, 15
- Davis-Putnam, 209
- reducerii directe, 21
- reducerii indirecte, 23
- tablourilor analitice, 77, 79
Modalitate, 235
- iterată, 235
Modalități echivalente, 235
Model
- canonic, 259, 261, 296
- finit, 269
- Herbrand
- Herbrand pentru o mulțime de clauze, 206
- pentru limbajul $\mathcal{L}_P$, 163
- pentru un limbaj $\mathcal{L}_P{}^\square$, 287
- predicativ Brentano, 32, 40
- $\langle W, R, V \rangle$, 244
Moduri
- indirecte, 26
- silogistice, 14
- valide, 18, 19
Montague, R., 283
Mulțime
- cofinită, 278
- Craig-consistentă, 219
- G – in/consistentă, 131
- independentă, 58
- maximal-consistentă, 106, 259
- saturată, 78
- S-inconsistentă, 105, 259, 270
- ω-completă, 191, 294

N

Nicod, J., 92

O

Obversiunea, 10
Operator
- derivat, 58
- funcțional independent, 58
- fundamental, 58

P

Pacius, Julius, 27
Parametri, 170
Partiție a unei mulțimi, 219
Pătratul lui Boethius, 7

Premisă
- majoră, 14
- minoră, 14
Prior, A., 305
Procedee de decizie în $\mathcal{L}_p$, 65
Procedeul
- matriceal, 51, 65
- Quine, 66
Propoziții
- categorice, 5
cu termeni negativi, 13
Punct
falsificare, 208
- inferențial, 208
Putnam, H., 305

Q
Quine, W.v.O., 66, 92

R
Ramură, 77
adevărată, 87
completă, 84
- închisă, 81
Raporturi (logice)
- dintre propozițiile categorice, 6
dintre termeni, 4
- intensionale, 4
R-demonstrația și demonstrația Gentzen, 145
Reductio
ad absurdum, 23
test, 66
Regula
clauzei 1-literale, 209
divizării, 210
generalizării
- existențiale (Rd_3), 178
- universale, 174
înlocuirii, 230
interschimbării (Intersch), 230
literalului fără conjugat, 210
Modus Ponens, 92, 174
particularizării (Rd_2), 178
redenumirii variabilelor legate, 195
tăieturii, 136
rezoluției (Rez), 143
- $R\alpha$, $R\beta$, 80
$R\gamma$, $R\delta$, 170
$R\delta^*$, 178
$\exists$ GenFL, 285
$\forall$ InstFL, 285
Reguli
- de adevăr ale operatorilor logici, 67
- de deducție derivate, 112; în Q, 178; 229
- de eliminare, 109
- de introducere, 109
- fundamentale, 109
- operaționale, 136
- specifice modurilor valide, 20, 21
- structurale, 109, 136
Relația
- de accesibilitate, 244
- de consecință semantică, 54
Relație
- bine-fondată, 257
- convergentă, 268
- convers bine-fondată, 257
- euclidiană, 256
Rescher, N., 3
Rezoluția
- g.a., 153
- în $\mathcal{L}_p$, 142
- în $\mathcal{L}_P$, 204, 212, 215
Rezolventă, 142
- binară, 215
Robinson, G.A., 145
Robinson, J.A., 142, 207
Rosser, B., 92
Russell, B., 1, 108

S
Scheme
- de axiome, 92
- deductive, 55
Scott, D., 228, 236, 249, 266
Secvent, 123
- demonstrabil, 124
- falsificabil, 124
- satisfiabil, 124
- valid, 124
Segerberg, K., 228, 236, 248
Silogism, 14
Silogistica
- cu termeni negativi, 27
- modernă, 32
Singleton, 213
Sistem axiomatic complet (în sens tare), 105
Sistem modal canonic, 269
- caracterizat de o clasă C de cadre, 279
- decidabil, 277
Sisteme
- de logică modală a predicatelor, 286
- de logică modală propozițională, 228

Sistemul
- axiomatic S, 92, 94
- axiomatic S^*, 92
- deducției naturale, 109
- G, 123
- G^*, 146
- Hilbert-Ackermann, 194
- LK, 219
- LK^*, 136

Sistemul modal $\mathcal{B}$, 237; $\mathcal{D}$, 233; $\mathcal{GL}$, 239; $\mathcal{K}$, 228; $\mathcal{K4}$, 233; $\mathcal{Kf1}$, 283; $\mathcal{Kf2}$, 284; $\mathcal{S4}$, 234; $\mathcal{S5}$, 236; $\mathcal{T}$, 232; $\mathcal{Triv}$, 238; $\mathcal{Ver}$, 238.
Skolem, T., 183, 185, 190, 200, 204
Slupecki, J., 109, 116, 118.
Smullyan, R., 79
Stoianovici, D., 5
Subformulă, 77
Substituția variabilelor individuale, 162
Substituții, 212
Suportul unei substituții, 212
Stringuri, 150

T

Tabelul lui Wittgenstein, 50
Tablou
adevărat, 87
analitic, 80
analitic pentru un secvent, 128
închis, 81
în $\mathcal{L}_P$, 170
- semantic (Hintikka), 86

Takeuti, G., 139
Tarski, A., 92
Teorema
- compacității, 90; pentru G, 131
- completitudinii
  - metodei tablourilor analitice, 88; în $\mathcal{L}_P$, 172
  - metodei rezoluției, 159; în $\mathcal{L}_P$, 217
  - sistemului: G, 129; G^*, 149; HA^Q, 200; Q^+, 193; $\mathcal{S}$, 105, 107; $\mathcal{S5}$, 254;
  - sistemului deducției naturale, 121
- corectitudinii
  - metodei tablourilor analitice, 88; în $\mathcal{L}_P$, 172
  - metodei rezoluției, 158
  - sistemelor modale: $\mathcal{D}$, 248; $\mathcal{K}$, 245; $\mathcal{S4}$, 249; $\mathcal{T}$, 247
  - sistemului deducției naturale, 120; G, 126; G^*, 147; LK^*, 137; Q, 185; $\mathcal{S}$, 103
- consistenței (Robinson), 226
- deducției (Herbrand), 95, 176, 177, 204, 208, 209
- definibilității, 224
- de normalitate, 74
- de reducere, 251
- dualității, 75
- echivalenței, 180
- formei normale prenexe, 182
- formei normale Skolem, 183
- înlocuirii, 73, 98, 180
- χ_0-satisfiabilității, 193
- substituției, 73
- unificării, 214
- ω-completitudinii, 294

Teoria
- funcțiilor de adevăr, 47
- inferenței, 9

Termen
- extrem, 14
- închis, 161
- liber pentru *x*, 163
- logic, 3
- mediu, 14

Thomas, W., 160
Tichý, P., 292
Transformarea propoziționale a unei formule, 297
Triadă silogistică, 39
$\mathcal{T}$ *-validitatea*, 247

U

Unificator, 213

V

Validitatea
- $\mathcal{B}$-validitatea, 249
- $\mathcal{GL}$-validitatea, 249
- $\mathcal{S}$-validitatea formulelor $\mathcal{L}_P$ $^\square$, 243
- $\mathcal{S4}$-validitatea, 248
- $\mathcal{S5}$-validitatea, 249

Variabilă
- liberă, 162
- legată, 162

VonWright, G.H., 232

W

Whitehead, A.N., 108
Wittgenstein, L., 50, 56, 67
Wos, L., 145